T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TOPOLOJİ BİLİM DALI

ESNEK KATEGORİLER

Aysun ERDOĞAN SERT

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ



MANİSA–2019

TEZ ONAYI

Aysun ERDOĞAN SERT tarafından hazırlanan **"Esnek Kategoriler"**adlı tez çalışması 06/02/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Ali MUTLU** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL** Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi	.....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Aysun ERDOĞAN SERT

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ	III
TEŞEKKÜR	IV
ÖZET	V
ABSTRACT	VI
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	2
2.1. Esnek Küme Teorisi	2
2.2. Kategori Teorisi	4
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER	7
3.1. *SFun* Kategorisi	7
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	13
4.1. *SFun* Kategorisi Morfizm Özellikleri	13
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	41
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	44

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Φ	Boş Esnek Küme
$SFun^{\rightarrow}$	Esnek Comma Kategorisi
$((F,A),e)$	Esnek Kategoride Bir Morfizm Çiftinin Eşitleyicisi (Equalizer'ı)
$(F^*,0)$	Esnek Kategori için Başlangıç Nesnesi
$(F^*,1)$	Esnek Kategori için Bitiş Nesnesi
(F,E)	Esnek Küme
$\tilde{\cup}$	Esnek Kümelerde Birleşim
$\tilde{\cap}$	Esnek Kümelerde Kesişim
$SFun$	Esnek Kümelerin ve Esnek Fonksiyonların Kategorisi
(x_e,E)	Esnek Nokta
f_s	Esnek Morfizm
(X,τ,E)	Esnek Topoloji
$dom(f)$	f nin Tanım Kümesi
$cod(f)$	f nin Değer Kümesi
$\mathcal{C}$	Kategori

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1. *SFun* Morfizmlerin Değişmeli Diyagramı.	7
Şekil 3.2. Morfizmlerin Yatay Bileşkelerinin Değişmeli Diyagramı.	8
Şekil 3.3. Morfizmlerin Düşey Bileşkelerinin Değişmeli Diyagramı.	9
Şekil 3.4. $SFun^{\rightarrow}$ Morfizmlerin Değişmeli Diyagramı.	10
Şekil 3.5. $^{\rightarrow}SFun$ Morfizmlerin Değişmeli Diyagramı.	10
Şekil 4.1. *SFun* Morfizmlerin Kübü .	17

TEŞEKKÜR

Lisans dönemimden itibaren bana topolojiyi sevdiren; duruşuyla, sevgisi ve saygısıyla, alanına hakimiyetiyle kendime örnek aldığım, bu çalışmanın başından itibaren bana desteğini esirgemeyen, lisansüstü eğitimim boyunca bilgi, deneyim ve tecrübesi ile bana yol gösteren, görüş ve önerileriyle önemli katkılar sağlayan, maddi, manevi her yönden yardımlarıyla bana destek olan, kendisini tanımaktan ve öğrencisi olmaktan büyük onur duyduğum ve duymaya devam edeceğim danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ'a, ayrıca lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca ilminden faydalandığım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ali MUTLU'ya, bugünlere gelmemde büyük emeği olan biricik aileme, süreç boyunca anlayışıyla, sabrıyla maddi, manevi desteğini esirgemeyen can eşim İlhan SERT'e ve çalışma boyunca akıllı ve uslu duran canım kızım Asya SERT'e ve sevgili dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Aysun ERDOĞAN SERT
Manisa, 2019

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Esnek Kategoriler

Aysun ERDOĞAN SERT

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak esnek fonksiyon tanımı kullanılarak esnek kümelerin ve esnek fonksiyonların kategorisi tanımlanmış ve bu kategori *SFun* ile gösterilmiştir.

SFun kategorik yapısı için esnek monomorfizm, esnek epimorfizm tanımlanmış, bu esnek morfizmlerle ilgili bazı özellikler elde edilmiştir. Daha sonra esnek kesit tanımlanmış olup, esnek kesit ve esnek monomorfizm arasındaki ilişki sunulmuştur. Bununla birlikte esnek retraksiyon tanımı verilerek esnek retraksiyon ve esnek epimorfizm arasındaki ilişki elde edilmiştir.

Esnek izomorfizm tanımlanarak, esnek izomorfizmin esnek monomorfizm, esnek epimorfizm, esnek retraksiyon ve esnek kesit ile olan ilişkilerini ifade eden önerme ve teoremler elde edilmiş ve ispatlanmıştır.

SFun kategorisi için başlangıç ve bitiş nesneleri tanımlanarak bu nesnelerin esnek izomorfizmaya bağlı olarak tek olduğu ispatlanmıştır.

Son olarak *SFun* kategorisinde sıfır nesnesi tanımlanmış, sıfır nesnesine sahip olan *SFun* kategorisi için bazı özellikler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Esnek Küme, Esnek Kategori, *SFun* Kategorisi, *SFun* Morfizmleri, Başlangıç Nesnesi, Bitiş Nesnesi, Sıfır Nesnesi.

2019, 44 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Soft Categories

Aysun ERDOĞAN SERT

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Simge ÖZTUNÇ

In this thesis study, at first the category of soft sets and soft functions is defined by using the definition of soft function and this category is sembolized by $SFun$.

Soft monomorphism and soft epimorphism are defined for $SFun$ categorical structure and some properties are obtained dealing with these soft morphisms.

Afterwards, soft section is defined and the connection between soft section and soft monomorphism is stated. Moreover definiton of soft retraction is given and the connection between soft retraction and soft epimorphism is obtained.

By defining soft isomorphism some theorem and prepositions which state the connections between soft monomorphism, soft epimorphism, soft retraction and soft section are obtained and proved.

Initial and terminal objects are defined for the category $SFun$ and it is proved that this objects are unique up to soft isomorphism.

Finally, zero object is defined for the category $SFun$ and some properties are stated for the category $SFun$ which has zero object.

Keywords: Soft Set, Soft Category, The Category $SFun$, Morphisms of $SFun$ Initial Object, Terminal Object, Zero Object.

2019, 44 pages

1. GİRİŞ

Esnek kümeler ilk olarak 1999'da D. Molodtsov [1] tarafından tanımlanmıştır. Esnek küme teorisi mühendislikte, ekonomide, bilgisayar bilimlerinde, medikal ve sosyal bilimlerde önemli bir araç olarak yer almıştır. Esnek küme teorisinin teorik özellikleri bazı matematikçiler tarafından incelenmiştir.

Esnek kümeler üzerindeki bazı işlemler Maji [2] tarafından verilmiştir. Shabir ve Naz [3] ile Zorlutuna [4] esnek topolojik uzay kavramı üzerine çalışmış, ayrıca Zorlutuna ve Çakır [5] ve Aras, Sönmez, Çakallı [6] esnek dönüşümlerin esnek sürekliliği üzerine çalışmalarda bulunmuşlardır. Esnek küme teorisi ve esnek sürekli fonksiyonlarla ilgili özellikler [7,8]'de içerilir.

Diğer taraftan kategori teorisi farklı yapıların dönüşümünü sağlayan multidisipliner bir konu olması açısından oldukça büyük öneme sahiptir. Esnek kategori ilk olarak Sardar ve Gupta [9] ve Zhou, Li ve Akram [10] tarafından çalışılmış, Zhou, Li ve Akram [10] bu çalışmada kullandığımız esnek fonksiyon tanımını vermiştir. Esnek kümelerin kategorik özellikleri ayrıca Zahiri [11] ve Varol, Shosttak, Aygün [12] tarafından incelenmiştir.

Ayrıca Öztunç [13,14] esnek kategorilerin bazı özelliklerini incelemiş esnek kategorilerin monomorfizm ve epimorfizm özellikleri Öztunç, Mutlu ve Erdoğan Sert [15] tarafından çalışılmıştır.

Bu tez çalışmasında literatürde kategori teorisiyle ilgili temel kaynaklar olarak yer alan [16,17,18,19,20,21]'den yararlanılarak ve Zhou, Li ve Akram [10] tarafından verilen esnek fonksiyon tanımı kullanılarak esnek kümelerin ve esnek dönüşümlerin kategorisi tanımlanmış ve bu kategorinin morfizm özellikleri incelenmiştir.

Diğer taraftan tezin son halini almasında ulusal ve uluslararası konferanslarda sunulan bildiriler [22,23,24] ve [13] makalesi katkı sağlamıştır.

Bu tezde kategorik bir yapı olarak yeni tanımlanan $SFun$ kategorisinin morfizm özelliklerinin incelenmesi ve morfizm özellikleriyle ilgili sonuçların elde edilmesi amaçlanmaktadır. Ayrıca bu tez çalışmasının kategori teorisi ve esnek küme teorisi alanlarında çalışanlar için önemli özellikleri ve faydalı araçları içeren bir kaynak olması hedeflenmektedir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde esnek küme teorisi ve kategori teorisi ile ilgili temel kavramlardan bahsedilmiştir.

2.1. Esnek Küme Teorisi

Tanım 2.1.1. [1] X evrensel bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. $P(X)$, X 'in kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ olmak üzere;

$$F : A \to P(X)$$

ise (F, A) çifti X üzerinde bir esnek küme olarak adlandırılır.

Herhangi bir (F, A) esnek kümesi, her $e \in A$ için $F(e) \neq \varnothing$ ve her $e \in E \setminus A$ için $F(e) = \varnothing$ olmak üzere (F, E) şeklinde bir esnek kümeye genişletilebilir.

Tanım 2.1.2. [2] X üzerinde iki (F, A) ve (G, B) esnek kümesinin kesişimi (H, C) esnek kümesidir. $C = A \cap B$ ve $\forall c \in C$ olmak üzere $H(c) = F(c) \cap G(c)$ dir. Bu kesişim $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. [2] X üzerinde iki (F, A) ve (G, B) esnek kümesinin birleşimi yine bir esnek kümedir. $C = A \cup B$ ve $\forall \varepsilon \in C$ için,

$$H(\varepsilon) = \begin{cases} F(\varepsilon), & \varepsilon \in A - B \\ G(\varepsilon), & \varepsilon \in B - A \\ F(\varepsilon) \cup G(\varepsilon), & \varepsilon \in A \cap B. \end{cases}$$

Bu bağıntı $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. [2] X üzerindeki bir (F, A) esnek kümesi $\forall a \in A$ için $F(a) = \varnothing$ ise bir boş (null) esnek küme olarak adlandırılır ve Φ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. [2] X üzerindeki $\tilde{X}$ mutlak esnek kümesi $\forall a \in A$ için $F(a) = X$ olacak şekilde tanımlı bir (F, X) esnek kümesidir.

Tanım 2.1.6. [25] (F,E), X üzerinde bir esnek küme olsun. (F,E) esnek kümesi, bir $e\in E$ için $F(e)=\{x\}$ ve tüm $e'\in E-\{e\}$ için $F(e')=\varnothing$ ise bir esnek nokta olarak adlandırılır, (x_e,E) ile gösterilir.

Tanım 2.1.7. [3] τ, X üzerinde esnek kümelerin bir koleksiyonu olsun. Bu takdirde τ aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa X üzerinde bir esnek topoloji olarak adlandırılır.

i) $\Phi,\tilde{X}=(F,X)\in\tau$,

ii) τ 'daki herhangi (keyfi) sayıda esnek kümelerin birleşimi τ 'ya aittir.

iii) τ ' daki herhangi iki esnek kümenin kesişimi yine τ 'ya aittir.

(X,τ,E) üçlüsüne X üzerinde bir esnek topolojik uzay denir.

Tanım 2.1.8. [26] (X,τ,E), X üzerinde esnek topolojik uzay, (F,E), X üzerinde bir esnek küme olsun. Bu takdirde $x\in(G,E)\subseteq(F,E)$ olacak şekilde (G,E) esnek açık kümesi varsa (F,E) esnek kümesine $x\in X$ noktasının esnek komşuluğu denir.

Tanım 2.1.9. [26] (X,τ,E), X üzerinde esnek topolojik uzay, (F,E), X üzerinde bir esnek küme ve $x\in X$ olsun. Bu takdirde $x\in(G,E)\subseteq(F,E)$ olacak şekilde (G,E) esnek açık kümesi varsa $x\in X$ noktasına (F,E) nin esnek iç noktasıdır denir.

Tanım 2.1.10. [6] (X,τ,E) ve (Y,τ',E) iki esnek topolojik uzay olsun. $f:(X,\tau,E)\to(Y,\tau',E)$ bir dönüşüm olsun. $(f(x_e),E)$ ' nin her bir (H,E) esnek komşuluğu için $f((F,E))\subset(H,E)$ olacak şekilde (x_e,E) 'nin bir (F,E) esnek komşuluğu mevcutsa bu takdirde f 'e (x_e,E) 'de esnek sürekli dönüşüm denir.

Lemma 2.1.11. [6] (X,τ,E) esnek topolojik uzay olsun. $1_X:X\to X$ birim dönüşümü esnek sürekli olmak zorunda değildir.

İspat: $X=\{h_1,h_2,h_3\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve $\tau=\{\phi,\tilde{X},(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E),(F_4,E)\}$ ve

$\tau'=\{\phi,\tilde{X},(G_1,E),(G_2,E),(G_3,E),(G_4,E)\}$, X üzerinde iki esnek topolojik uzay ve

$(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E),(F_4,E),(G_1,E),(G_2,E),(G_3,E),(G_4,E),$ X üzerinde esnek açık kümeler olmak üzere

$F_1(e_1)=\{h_2\}, F_1(e_2)=\{h_1\}, F_2(e_1)=\{h_2,h_3\}, F(e_1)=\{h_1\}, F_2(e_2)=\{h_1,h_2\}, F_3(e_1)=\{h_3\},$

$F_3(e_2)=\{h_1,h_2\}$, $F_4(e_1)=\varnothing$, $F_2(e_2)=\{h_1\}$;

ve

$G_1(e_1)=\{h_2\}$, $G_1(e_2)=\{h_1\}$, $G_2(e_1)=\{h_2,h_3\}$, $G_2(e_2)=\{h_1,h_2\}$, $G_3(e_1)=\{h_1,h_2\}$,

$G_3(e_2)=X$, $G_4(e_1)=\{h_2\}, G_4(e\ )=\{h_1,h_2\}$

olarak tanımlansın. $f^{-1}((G_3,E))=\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,X)\}\notin(X,\tau,E)$ ve

$f^{-1}((G_4,E))=\{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\{h_1,h_2\})\}\notin(X,\tau,E)$ dir. Bundan dolayı $f=1_x:X\to X$ dönüşümü esnek sürekli değildir.

2.2. Kategori Teorisi

Tanım 2.2.1. [16,17] Bir $\mathcal{C}$ kategorisi aşağıdaki verilerden oluşur:

- Nesneler: $A,B,C,...$
- Morfizmler: $f,g,h,...$
- Her bir f morfizmi için, verilen $dom(f), cod(f)$ nesneleri sırasıyla f'in tanım kümesi (domain) ve değer kümesi (codomain) olarak adlandırılır. $f:A\to B$ morfizmi için $A=dom(f)$ ve $B=cod(f)$ yazılır.
- $cod(f)=dom(g)$ olmak üzere, $f:A\to B$ ve $g:B\to C$ morfizmleri verilsin. Bu takdirde f ve g'nin bileşkesi olan $g\circ f:A\to C$ bir morfizmdir.
- Her bir A nesnesi için $1_A:A\to A$ birim dönüşümü bir morfizmdir. Buna A'nın birim morfizmi denir.

Bu veri aşağıdaki iki özelliği sağlar:

Birleşme: Tüm $f:A\to B$, $g:B\to C$ ve $h:C\to D$ morfizmleri için $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

Birim: Tüm $f:A\to B$ morfizmleri için $f\circ 1_A=f=1_B\circ f$.

Tanım 2.2.2. [16,17] Herhangi bir $\mathcal{C}$ kategorisinde bir $f : A \to B$ morfizmi soldan sadeleşebilir ise f morfizmine bir monomorfizm denir.

Önerme 2.2.3. [16,17] Bir somut kategoride f morfizminin birebir olması için gerek ve yeter şart f 'in soldan sadeleşebilir olmasıdır.

Tanım 2.2.4. [16,17] $\mathcal{C}$ bir kategori olmak üzere, $\mathcal{C}$' de bir $f : A \to B$ morfizmi sağdan sadeleşebilir ise bir epimorfizm olarak adlandırılır.

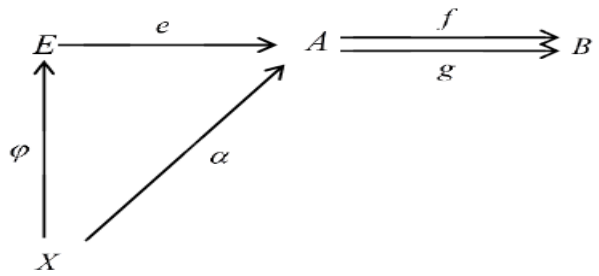
Önerme 2.2.5. [16,17] Bir somut kategoride f morfizminin örten olması için gerek ve yeter şart f 'in sağdan sadeleşebilir olmasıdır.

Tanım 2.2.6. [16,17] Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $f, g : A \to B$ morfizmleri verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise (E, e) çiftine f ve g nin equalizeri (eşitleyicisi) denir.

(a) $e : E \to A$ bir morfizmdir.

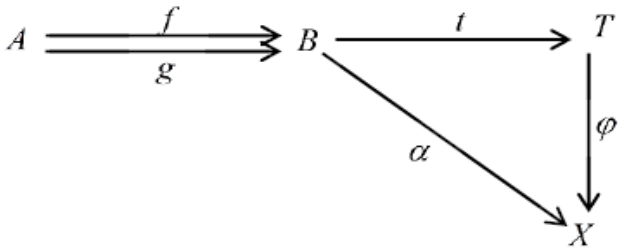
(b) $fe = ge$.

(c) Eğer $f\alpha = g\alpha$ olacak şekilde bir $\alpha : X \to A$ morfizmi verilirse



diyagramı değişmeli, yani $e\varphi = \alpha$ olacak şekilde bir tek $\varphi : X \to E$ morfizmi vardır.

Tanım 2.2.7. [16,17] Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $f, g : A \to B$ morfizmleri için $tf = tg$ olacak şekilde bir $t : B \to T$ morfizmi verilsin. Eğer $\alpha f = \alpha g$ olacak şekilde her $\alpha : B \to X$ morfizmi için



diyagramı değişmeli, yani $\varphi t = \alpha$ olacak şekilde $\varphi : T \to X$ morfizmi varsa $t : B \to T$ ye f ve g nin coequalizeri (dual eşitleyicisi) denir.

Tanım 2.2.8. [16,17] $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $\mathcal{C}$'de bir $f : A \to B$ morfizmi için, $g \circ f = 1_A$ olacak şekilde bir $g : B \to A$ morfizmi var ise f morfizmine bir kesit (section) denir.

Tanım 2.2.9. [16,17] $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $\mathcal{C}$'de bir $f : A \to B$ morfizmi için, $f \circ g = 1_B$ olacak şekilde bir $g : B \to A$ morfizmi var ise f morfizmine bir retraksiyon (geri çekilim) denir.

Tanım 2.2.10. [16,17] Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $f : A \to B$ morfizmi için $g \circ f = 1_A$ ve $f \circ g = 1_B$ olacak şekilde bir $g : B \to A$ morfizmi var ise f dönüşümüne bir izomorfizm denir.

Önerme 2.2.11. [16,17] Bir morfizm hem bir kesit hem de bir retraksiyon ise bir izomorfizmdir.

Ayrıca bir somut kategoride her izomorfizmin bir bijeksiyon, buradan monik ve epik olduğuna ve dolayısıyla bir bimorfizm olduğuna dikkat edelim. Bu durumun tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 2.2.12. [16,17] U bir $\mathcal{C}$ kategorisinde bir nesne olmak üzere, eğer $\mathcal{C}$'nin her X nesnesi için $Mor_C(U, X)$ kümesi tek elemanlı ise, U'ya bir başlangıç nesnesi denir.

Tanım 2.2.13. [16,17] Dual olarak, U bir $\mathcal{C}$ kategorisinde bir nesne olmak üzere, eğer $\mathcal{C}$'nin her X nesnesi için $Mor_C(X, U)$ kümesi tek elemanlı ise, U'ya bir bitiş nesnesi denir.

Tanım 2.2.14. [16,17] Bir $\mathcal{C}$ kategorisinin bir Z nesnesi $\mathcal{C}$'de hem başlangıç hem de bitiş nesnesi ise bir sıfır nesnesi olarak adlandırılır.

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1. *SFUN* KATEGORİSİ

Bu bölümde Zhou, Li ve Akram [10] tarafından verilen esnek fonksiyon tanımı kullanılarak *SFun* kategorisi oluşturulmuştur. Ayrıca bu kategorinin bazı özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.1.1. (F,A) ve (G,B), X üzerinde iki esnek küme olsun. Her $a \in A$ için $F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a)$ oluyorsa, bu takdirde $f_s : A \to B$ dönüşümüne (F,A)' dan (G,B)'ye bir esnek fonksiyon denir. [10]

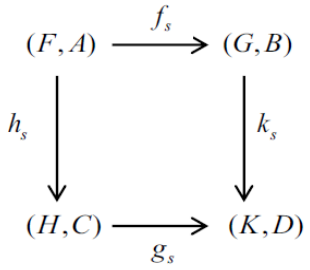
Esnek kümelerin ve esnek fonksiyonların kategorisini aşağıdaki gibi oluşturalım:

Tanım 3.1.2.

- Nesneler: $(F,A),(G,B),(H,C),...$ esnek kümeler;
- Morfizmler: $f_s, g_s, h_s, ...$ esnek fonksiyonları;
- $f_s : (F,A) \to (G,B)$ ve $g_s : (G,B) \to (H,C)$ iki esnek fonksiyon olmak üzere $F(a) \subseteq (H \circ g_s \circ f_s)(a)$ koşulunu sağlayan $g_s \circ f_s : (F,A) \to (H,C)$ bileşke dönüşümü bir esnek fonksiyondur.
- Her (F,A) nesnesi için $1_{(F,A)} : (F,A) \to (F,A)$ birim dönüşümü bir esnek fonksiyondur.

Bu kategoriyi *SFun* ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.3. *SFun* kategorisindeki morfizmlerin bir

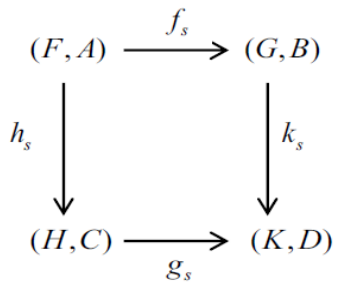


Şekil 3.1. *SFun* **Morfizmlerin Değişmeli Diyagramı**

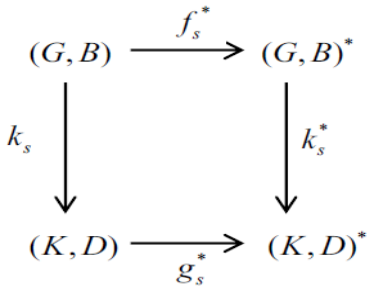
diyagramı verilsin. Eğer bir başlangıç ve bir bitiş nesnesi seçildiğinde başlangıçtan bitişe giden bütün morfizmler birbirine eşit oluyorsa, yani $k_s \circ f_s = g_s \circ h_s$ ise bu takdirde bu diyagrama değişmeli diyagram denir.

Önerme 3.1.4. *SFun* kategorisinde değişmeli diyagramların yatay bileşkeleri ve düşey bileşkeleri yine birer değişmeli diyagramdır.

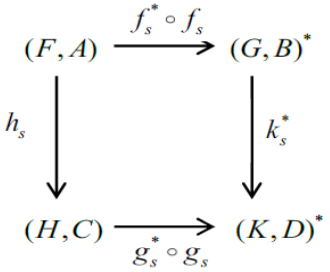
İspat: Eğer,



ve



diyagramları değişmeli ise bunların yatay bileşkeleri olan



Şekil 3.2. Morfizmlerin Yatay Bileşkesinin Değişmeli Diyagramı

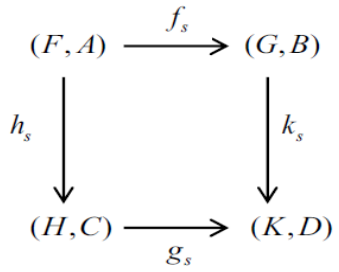
diyagramı da değişmelidir. Çünkü $k_s^* \circ f_s^* = g_s^* \circ k_s$ olduğundan

$$k_s^* \circ (f_s^* \circ f_s) = (k_s^* \circ f_s^*) \circ f_s = (g_s^* \circ k_s) \circ f_s = g_s^* \circ (k_s \circ f_s).$$

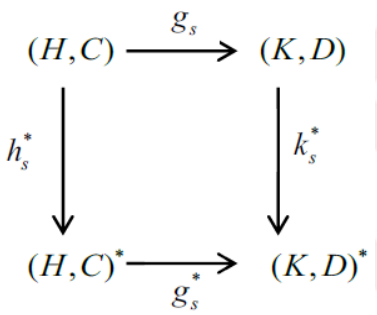
Fakat $g_s \circ h_s = k_s \circ f_s$ olduğundan,

$k_s^* \circ (f_s^* \circ f_s) = g_s^* \circ (g_s \circ h_s) = (g_s^* \circ g_s) \circ h_s$.

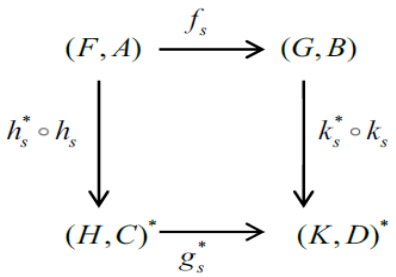
Benzer olarak eğer,



ve



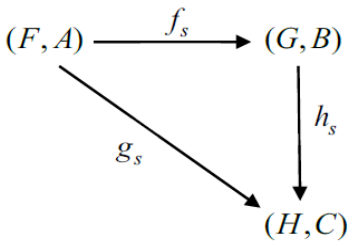
diyagramları değişmeli ise bunların düşey bileşkeleri olan



Şekil 3.3. Morfizmlerin Düşey Bileşkesinin Değişmeli Diyagramı

diyagramı da değişmelidir.

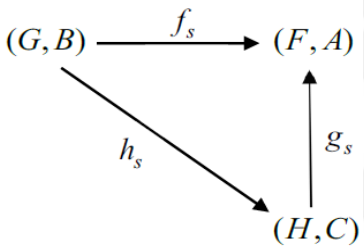
Örnek 3.1.5.(Esnek Comma Kategorisi) (F,A), $SFun$ esnek kategorisinin sabit bir esnek nesnesi olsun. Aşağıdaki gibi $SFun^{\rightarrow}$ esnek kategorisini oluşturabiliriz. Nesneler için $(F,A) \xrightarrow{f_s} (G,B)$ şeklinde $SFun-$morfizmlerini ve morfizmler için $(F,A) \xrightarrow{f_s} (G,B)$'den $(F,A) \xrightarrow{g_s} (H,C)$'ye giden,



Şekil 3.4. $SFun^{\rightarrow}$ **Morfizmlerin Değişmeli Diyagramı**

diyagramı değişmeli olacak şekilde, $SFun$'da h_s morfizmlerini alalım. Benzer şekilde, aşağıdaki gibi bir $^{\rightarrow}SFun$ kategorisi oluşturabiliriz:

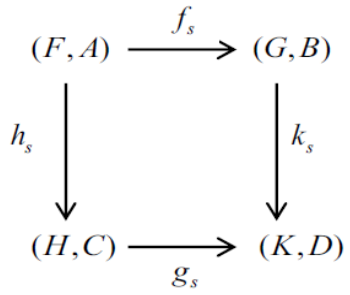
Nesneleri için $(G,B)\xrightarrow{f_S}(F,A)$ şeklindeki $SFun-$morfizmlerini ve morfizmler için $(G,B)\xrightarrow{f_S}(F,A)$'dan $(H,C)\xrightarrow{g_S}(F,A)$'ya giden,



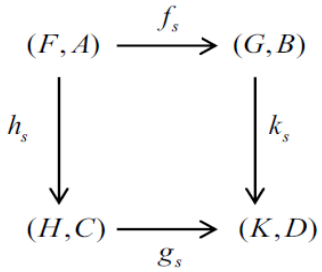
Şekil 3.5. $^{\rightarrow}SFun$ **Morfizmlerin Değişmeli Diyagramı**

diyagramı değişmeli olacak şekilde, $SFun$'da g_s morfizmlerini alalım. Bu kategoriler genellikle (F,A) $SFun-$nesnesi için, birinci (F,A) dan giden, ikinci (F,A) ya giden comma kategorileri olarak adlandırılır.

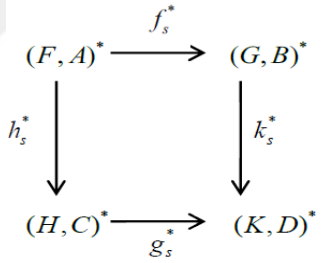
Örnek 3.1.6.(Esnek Arrow (Ok) Kategorisi). $SFun$ kategorisi üzerinde aşağıdaki gibi bir esnek kategori oluşturabiliriz: Nesneleri için $SFun-$morfizmlerini ve $(F,A)\xrightarrow{f_S}(G,B)$'den $(H,C)\xrightarrow{g_S}(K,D)$'ye morfizmler kümesi için,



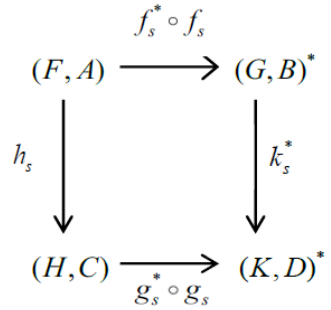
diyagramı değişmeli olacak şekilde $SFun$'da h_s, k_s morfizm çiftlerini alalım. Morfizmlerin bileşkesi aşağıdaki gibi tanımlanır:



ve



Bileşkesinin mevcut olabilmesi için gerek ve yeter şart,



şeklinde verilen bileşkede $(F,A)^* = (G,B)$ ve $(H,C)^* = (K,D)$ olmasıdır.

Sonuç olarak bu kategoriye $SFun$ üzerinde arrow (ok) kategorisi denir.

Tanım 3.1.7. Eğer,

(1) $SFun$'ın her nesnesi bir S esnek kategorinin bir nesnesi;

(2) $SFun$'ın tüm $(F,A),(G,B)$ nesneleri için

$$Mor_{SFun}((F,A),(G,B)) \subseteq Mor_S((F,A),(G,B));$$

(3) $SFun$'da iki morfizmin bileşkesi, S esnek kategorisindeki bileşkeler ile aynı,

(4) $SFun$'ın tüm (F,A) nesneleri için, $1_{(F,A)}$ birim dönüşümü $SFun$'daki gibi S esnek kategorisi ile aynı

ise $SFun$ kategorisine S esnek kategorisinin bir esnek alt kategorisi denir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. *SFUN* KATEGORİSİNİN MORFİZM ÖZELLİKLERİ

Tanım 4.1.1. *SFun* kategorisinde (F, A) ve (G, B) iki *SFun*-nesnesi olsun. *SFun* esnek kategorisinde bir $f_s : (F, A) \to (G, B)$ $SFun-$morfizmi soldan sadeleşebilir ise, bu takdirde f_s morfizmi bir esnek monomorfizm olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.2. $(F, A), (G, B)$ ve (H, C), *SFun* nesneleri olsun. $f_s : (F, A) \to (G, B)$ ve $g_s : (G, B) \to (H, C)$ iki esnek fonksiyon olsun. f_s ve g_s monik ise, bu takdirde $g_s \circ f_s$ moniktir.

İspat: $f_s : (F, A) \to (G, B)$ ve $g_s : (G, B) \to (H, C)$ $SFun-$morfizmleri ise, bu takdirde her $a \in A$ için $f_s(a) = b$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır ve her $b \in B$ için $g_s(b) = c$ olacak şekilde bir $c \in C$ vardır.

f_s esnek fonksiyon olduğundan, her $a \in A$ için $F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a)$ ve g_s esnek fonksiyon olduğundan, her $b \in B$ için $G(b) \subseteq (H \circ g_s)(b)$ elde edilir.

$g_s \circ f_s : (F, A) \to (H, C)$ bileşke dönüşümünün monik olduğunu göstermek için öncelikle,

$$F(a) \subseteq (H \circ g_s \circ f_s)(a)$$

olduğunu ve $g_s \circ f_s$, $SFun-$morfizminin soldan sadeleşebilir olduğunu göstermemiz gerekir.

$$F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a) = G(f_s(a)) = G(b) \qquad (1)$$

$$G(b) \subseteq (H \circ g_s)(b) = H(g_s(b)) = H(c) \qquad (2)$$

(1) ve (2)' den $F(a) \subseteq G(b)$ ve $G(b) \subseteq H(c)$ olduğundan $F(a) \subseteq H(c)$ olup,

$$F(a) \subseteq H(c) = H(g_s(b)) = H(g_s(f_s(a)))$$

$$F(a) \subseteq (H \circ g_s \circ f_s)(a)$$

elde edilir. Şimdi soldan sadeleşebilme özelliğini gösterelim:

Herhangi $h_s, k_s : (K, D) \to (F, A)$ $SFun-$morfizmleri için, $(g_s \circ f_s) \circ h_s = (g_s \circ f_s) \circ k_s$ olsun. Morfizmler birleşmeli olduğundan, $g_s \circ (f_s \circ h_s) = g_s \circ (f_s \circ k_s)$ ve g_s, $SFun-$monomorfizm olduğundan soldan sadeleşebilirdir. Bundan dolayı, $f_s \circ h_s = f_s \circ k_s$ elde edilir. f_s, $SFun-$ monomorfizm olduğundan soldan sadeleşebilir olup, $h_s = k_s$ olduğu elde edilir.

Teorem 4.1.3. $(F, A), (G, B)$ ve (H, C), X üzerinde $SFun$ nesneleri olsun. $f_s : (F, A) \to (G, B)$ ve $g_s : (G, B) \to (H, C)$ iki $SFun-$morfizm olsun. $g_s \circ f_s$ monik ise, bu takdirde f_s moniktir.

İspat: $f_s : (F, A) \to (G, B)$ ve $g_s : (G, B) \to (H, C)$ $SFun-$morfizmleri ise, bu takdirde her $a \in A$ için $f_s(a) = b$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır ve her $b \in B$ için $g_s(b) = c$ olacak şekilde bir $c \in C$ vardır.

f_s, $SFun-$ morfizm olduğundan, her $a \in A$ için $F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a)$ ve g_s , $SFun-$ morfizm olduğundan, her $b \in B$ için $G(b) \subseteq (H \circ g_s)(b)$ dir.

Öncelikle, $g_s \circ f_s : (F, A) \to (H, C)$ dönüşümünün $SFun-$morfizm olduğunu ve daha sonra f_s, $SFun-$morfizminin soldan sadeleşebilir olduğunu göstermemiz gerekir.

$$F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a) = G(f_s(a)) = G(b) \qquad (1)$$

$$G(b) \subseteq (H \circ g_s)(b) = H(g_s(b)) = H(c) \qquad (2)$$

(1) ve (2)' den $F(a) \subseteq G(b)$ ve $G(b) \subseteq H(c)$ olduğundan $F(a) \subseteq H(c)$ olup,

$$F(a) \subseteq H(c) = H(g_s(b)) = H(g_s(f_s(a)))$$

$$F(a) \subseteq (H \circ g_s \circ f_s)(a)$$

elde edilir. Buradan $g_s \circ f_s$ bir $SFun-$morfizmdir.

Şimdi soldan sadeleşebilme özelliğini gösterelim. Herhangi $h_s, k_s : (K, D) \to (F, A)$ $SFun-$ morfizmleri için, $f_s \circ h_s = f_s \circ k_s$ olsun. Buradan, soldan g_s morfizmi ile bileşke aldığımızda,

$$g_s \circ f_s \circ h_s = g_s \circ f_s \circ k_s$$

olup, morfizmler birleşmeli olduğundan

$$(g_s \circ f_s) \circ h_s = (g_s \circ f_s) \circ k_s$$

elde edilir.

$g_s \circ f_s$, $SFun-$ monomorfizm olduğundan soldan sadeleşebilirdir. Bundan dolayı, $h_s = k_s$ elde edilir.

Tanım 4.1.4. $SFun$ bir esnek kategori (F, A) ve (G, B) iki $SFun-$nesnesi olsun. $SFun$ esnek kategorisinde bir $f_s : (F, A) \to (G, B)$ $SFun-$morfizmi sağdan sadeleşebilir ise, bu takdirde f_s esnek epimorfizm olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.5. $(F, A), (G, B)$ ve (H, C), $SFun$ nesneler olsun. $f_s : (F, A) \to (G, B)$ ve $g_s : (G, B) \to (H, C)$ iki esnek fonksiyon olsun. f_s ve g_s epik ise, bu takdirde $g_s \circ f_s$ epiktir.

İspat: $f_s : (F, A) \to (G, B)$ ve $g_s : (G, B) \to (H, C)$ $SFun-$morfizmleri ise, bu takdirde her $a \in A$ için $f_s(a) = b$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır ve her $b \in B$ için $g_s(b) = c$ olacak şekilde bir $c \in C$ vardır.

Aynı zamanda f_s , $SFun-$ morfizm olduğundan, her $a \in A$ için $F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a)$ ve g_s, $SFun-$ morfizm olduğundan, her $b \in B$ için $G(b) \subseteq (H \circ g_s)(b)$.

$g_s \circ f_s : (F, A) \to (H, C)$ bileşke morfizminin epik olduğunu göstermek için öncelikle,

$$F(a) \subseteq (H \circ g_s \circ f_s)(a)$$

olduğunu ve $g_s \circ f_s$, $SFun-$morfizminin sağdan sadeleşebilir olduğunu göstermemiz gerekir.

$$F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a) = G(f_s(a)) = G(b) \qquad (1)$$

$$G(b) \subseteq (H \circ g_s)(b) = H(g_s(b)) = H(c) \qquad (2)$$

(1) ve (2)' den $F(a) \subseteq G(b)$ ve $G(b) \subseteq H(c)$ olduğundan $F(a) \subseteq H(c)$ olup,

$$F(a) \subseteq H(c) = H(g_s(b)) = H(g_s(f_s(a)))$$

$$F(a) \subseteq (H \circ g_s \circ f_s)(a)$$

elde edilir. Şimdi sağdan sadeleşebilme özelliğini gösterelim.

Herhangi iki $h_s, k_s : (K, D) \to (F, A)$ $SFun-$morfizmleri için, $h_s \circ (g_s \circ f_s) = k_s \circ (g_s \circ f_s)$ olsun. Morfizmler birleşmeli olduğundan, $(h_s \circ g_s) \circ f_s = (k_s \circ g_s) \circ f_s$ ve f_s, $SFun-$epimorfizm olduğundan sağdan sadeleşebilirdir. Bundan dolayı, $h_s \circ g_s = k_s \circ g_s$ elde edilir. Benzer şekilde g_s, $SFun-$ epimorfizm olduğundan sağdan sadeleşebilir olup, $h_s = k_s$ elde edilir.

Teorem 4.1.6. $(F, A), (G, B)$ ve (H, C), $SFun$ nesneler olsun. $f_s : (F, A) \to (G, B)$ ve $g_s : (G, B) \to (H, C)$ iki $SFun-$ morfizmi olsun. $g_s \circ f_s$ epik ise g_s epiktir.

İspat: $f_s : (F, A) \to (G, B)$ ve $g_s : (G, B) \to (H, C)$ $SFun-$morfizmleri ise, bu takdirde her $a \in A$ için $f_s(a) = b$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır ve her $b \in B$ için $g_s(b) = c$ olacak şekilde bir $c \in C$ vardır.

Ayrıca f_s , $SFun-$ morfizm olduğundan, her $a \in A$ için $F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a)$ ve g_s , $SFun-$ morfizm olduğundan, her $b \in B$ için $G(b) \subseteq (H \circ g_s)(b)$.

Şimdi $g_s \circ f_s : (F, A) \to (H, C)$ dönüşümünün $SFun-$morfizm olduğunu gösterelim.

$$F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a) = G(f_s(a)) = G(b) \qquad (1)$$

$$G(b) \subseteq (H \circ g_s)(b) = H(g_s(b)) = H(c) \qquad (2)$$

(1) ve (2)' den $F(a) \subseteq G(b)$ ve $G(b) \subseteq H(c)$ olduğundan $F(a) \subseteq H(c)$ olup,

$$F(a) \subseteq H(c) = H(g_s(b)) = H(g_s(f_s(a)))$$

$$F(a) \subseteq (H \circ g_s \circ f_s)(a)$$

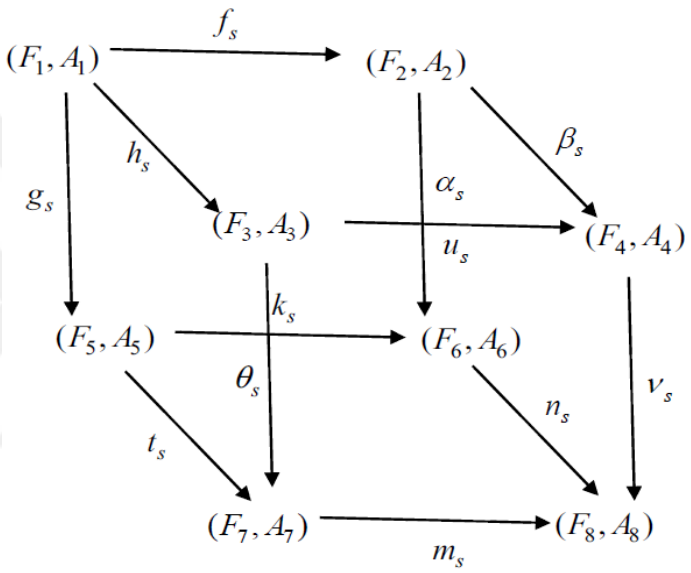
elde edilir. Şimdi sağdan sadeleşebilme özelliğini gösterelim.

Herhangi $h_s, k_s : (K, D) \to (F, A)$ $SFun-$ morfizmleri için, $h_s \circ g_s = k_s \circ g_s$ olsun. Buradan, sağdan f_s ile bileşke aldığımızda

$$h_s \circ g_s \circ f_s = k_s \circ g_s \circ f_s$$

olup, $g_s \circ f_s$ $SFun-$ epimorfizm olduğundan sağdan sadeleşebilirdir. Bundan dolayı, $h_s = k_s$ elde edilir.

Örnek 4.1.7. (F_i, A_i) $(i \in \{1, 2, ..., 8\})$ esnek kümeler olsun. $SFun$ kategorisinde esnek nesneler ve esnek morfizmlerin oluşturduğu aşağıdaki "kübü" göz önüne alalım.



Şekil 4.1. *SFun* **Morfizmlerinin Kübü**

a) Üst yüz hariç tüm yüzlerin değişmeli olduğunu varsayalım. Eğer $(F_4, A_4) \xrightarrow{\nu_s} (F_8, A_8)$ esnek monomorfizm ise, bu takdirde üst yüz de değişmelidir.

b) Alt yüz hariç tüm yüzlerin değişmeli olduğunu varsayalım. Eğer $(F_1, A_1) \xrightarrow{g_s} (F_5, A_5)$ esnek epimorfizm ise, bu taktirde alt yüz de değişmelidir.

İspat:

(a) $u_s \circ h_s = \beta_s \circ f_s$ olduğunu ispatlamak istiyoruz. ν_s esnek morfizmi monik olsun.

$$\begin{aligned} \nu_s \circ u_s \circ h_s &= m_s \circ t_s \circ g_s \\ &= n_s \circ k_s \circ g_s \\ &= n_s \circ \alpha_s \circ f_s \\ &= \nu_s \circ \beta_s \circ f_s \end{aligned}$$

Buradan, ν_s monik olduğundan soldan sadeleşebilirdir ve $u_s \circ h_s = \beta_s \circ f_s$ elde edilir.

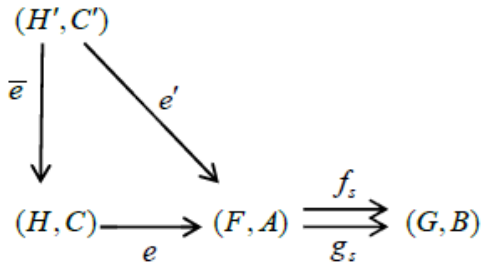
(b) $m_s \circ t_s = n_s \circ k_s$ olduğunu ispatlamamız gerekir. g_s esnek morfizmi epik olsun ve,

$$\begin{aligned} m_s \circ t_s \circ g_s &= \nu_s \circ \beta_s \circ f_s \\ &= \nu_s \circ u_s \circ h_s \\ &= m_s \circ \theta_s \circ h_s \\ &= m_s \circ t_s \circ g_s \\ &= n_s \circ k_s \circ g_s \end{aligned}$$

Buradan, g_s epik olduğundan sağdan sadeleşebilirdir, $m_s \circ t_s = n_s \circ k_s$ olduğu görülür.

SFun kategorisinin equalizer'lere sahip olduğu Zhou, Li ve Akram tarafından [10]'da ispatlanmıştır.

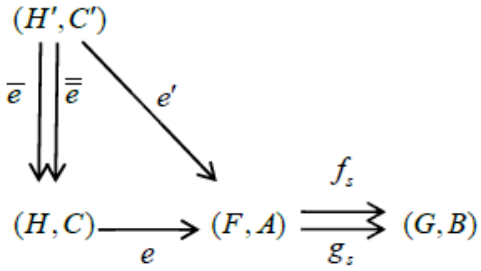
Teorem 4.1.8. *SFun*, equalizerlere sahiptir. [10]



Yukarıda [10]'da ispatlanan teoreme istinaden aşağıdaki özelliği elde ederiz.

Teorem 4.1.9. Herhangi bir esnek kategoride bir morfizm çiftinin equalizeri $((H,C),e)$ ise, bu takdirde $((H,C),e)$ moniktir.

İspat.



$((H,C),e)$ nin f_s ve g_s morfizmlerinin equalizeri olduğunu varsayalım. $\bar{e}$ ve $\bar{\bar{e}}$ yukarıdaki diyagramda gösterildiği gibi iki esnek morfizm olsun. $e':(H',C')\to(F,A)$ bir esnek morfizm olduğundan $H'(c')\subseteq(F\circ e')(c')$, $\bar{e}:(H',C')\to(H,C)$ bir esnek morfizm olduğundan $H'(c')\subseteq(H\circ\bar{e})(c')$ ve $\bar{\bar{e}}:(H',C')\to(H,C)$ bir esnek morfizm olduğundan $H'(c')\subseteq(H\circ\bar{\bar{e}})(c')$. Yukarıdaki diyagramdan,

$$H'(c')\subseteq(F\circ e')(c')=F(e'(c'))=F(e\circ\bar{e})(c')=F(e\circ\bar{\bar{e}})(c').$$

$e\bar{e}=e\bar{\bar{e}}$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $\bar{e}=\bar{\bar{e}}$ olduğunu göstermek istiyoruz. $e'=e\bar{e}=e\bar{\bar{e}}$ alalım. Bu takdirde,

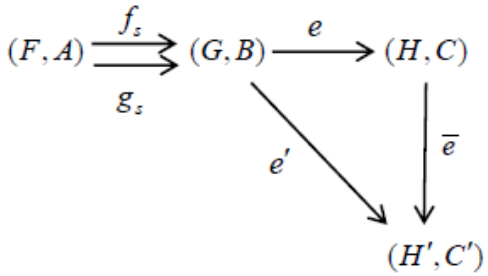
$$f_s e'=f_s e\bar{e}=f_s e\bar{\bar{e}}$$

$$f_s e'=f_s e\bar{e}=g_s e\bar{e}=ge'.$$

Evrensel dönüşüm özelliğini kullanırsak, $eu=e'$ olacak şekilde bir tek $u:(H',C')\to(H,C)$ vardır. Böylece, $e\bar{e}=e'$ ve $e\bar{\bar{e}}=e'$ olmasından, $\bar{e}=u=\bar{\bar{e}}$ elde edilir. $e\bar{e}=e\bar{\bar{e}}$ olması $\bar{e}=\bar{\bar{e}}$ olmasını gerektirdiğinden e soldan sadeleşebilirdir, yani moniktir.

[10]'da elde edilen $SFun$ kategorisi için equalizer kavramının duali olan coequalizer kavramını aşağıdaki teoremle elde ederiz.

Teorem 4.1.10. *SFun*, coequalizerlere sahiptir.



İspat: $C=\{b\in B: f_s(b)=g_s(b)\}$ kümesini tanımlayalım $e:(G,B)\to(H,C)$ dönüşümünü bir gömme dönüşümü olarak ve $G=H\circ e$ olarak alalım. Diyagramdan $e\circ f_s=e\circ g_s$ ve her $b\in B$ için $G(b)=(H\circ e)(b)$. Şu halde, e bir $SFun-$ morfizmdir. Şimdi, $((G,B),e)$ f_s ve g_s morfizmlerinin bir coequalizeri olduğunu gösterelim.

(H,C) bir $SFun-$nesne ve e', $e'\circ f_s=e'\circ g_s$ şartını sağlayan (G,B)'den (H',C') nesnesine bir $SFun-$morfizm olsun. $\bar{e}:(H,C)\to(H',C')$ dönüşümünü $\bar{e}=e'$ olacak şekilde tanımlayalım. Yukarıdaki diyagramdan $e'=\bar{e}\circ e$ elde edilir.

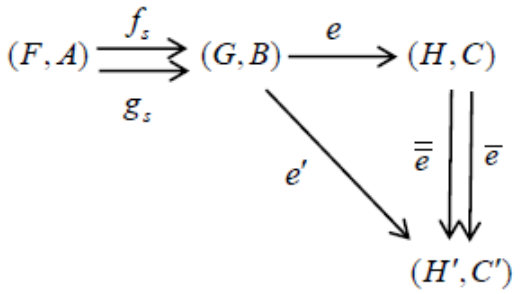
$e'\circ f_s=e'\circ g_s$ olmasından her $a\in A$ için $e'(f_s(a))=e'(g_s(a))$. Böylece $g_s(a)\in B$ olup $\bar{e}=e'$ iyi tanımlıdır. $G=H\circ e$, $\bar{e}=e'$ ve e' bir $SFun-$morfizm olduğundan $b\in B$ olmak üzere,

$$G(b)\subseteq(H\circ e')(b)=(H\circ\bar{e})(b)=H(\bar{e}(e(b)))$$
$$=(H\circ\bar{e})(e(b))=(H\circ e)(b)=G(b).$$

Böylece, $\bar{e}$ bir $SFun-$morfizmdir. Buradan, $e'=\bar{e}\circ e$ ve $\bar{e}$ tek olduğundan, $((G,B),e)$ f_s ve g_s'in bir coequalizerıdır.

Teorem 4.1.11. Herhangi bir esnek kategoride bir morfizm çiftinin coequalizeri $((G,B),e)$ ise, bu takdirde $((G,B),e)$ epiktir.

İspat:



$((G,B),e)$ nin f_s ve g_s morfizmlerinin coequalizeri olduğunu varsayalım. $\bar{e}$ ve $\bar{\bar{e}}$ yukarıdaki diyagramda gösterildiği gibi iki $SFun-$morfizm olsun. $e':(G,B)\to(H',C')$ bir $SFun-$morfizm olduğundan $G(b)\subseteq(H'\circ e')(b)$, $\bar{e}:(H,C)\to(H',C')$ bir $SFun-$morfizm olduğundan $H(c)\subseteq(H'\circ\bar{e})(c)$ ve $\bar{\bar{e}}:(H,C)\to(H',C')$ bir $SFun-$morfizm olduğundan $H(c)\subseteq(H'\circ\bar{\bar{e}})(c)$ dir. Yukarıdaki diyagramdan,

$$G(b)\subseteq(H'\circ e')(b)=H'(e'(b))=H'(e')(b)=H'(\bar{e}\circ e)(b)=H'(\bar{\bar{e}}\circ e)(b).$$

$\bar{e}e=\bar{\bar{e}}e$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $\bar{e}=\bar{\bar{e}}$ olduğunu göstermek istiyoruz. $e'=\bar{e}e=\bar{\bar{e}}e$ alalım. Bu takdirde,

$$e'f_s=\bar{e}ef_s=\bar{\bar{e}}ef_s$$

$$e'f_s=\bar{e}ef_s=\bar{e}eg_s=e'g_s.$$

Evrensel dönüşüm özelliğini kullanırsak, $ue=e'$ olacak şekilde bir tek $u:(H,C)\to(H',C')$ vardır. Böylece, $\bar{e}e=e'$ ve $\bar{\bar{e}}e=e'$ olmasından, $\bar{e}=u=\bar{\bar{e}}$ elde edilir. $\bar{e}e=\bar{\bar{e}}e$ olması $\bar{e}=\bar{\bar{e}}$ olmasını gerektirdiğinden e sağdan sadeleşebilirdir, yani epiktir.

Tanım 4.1.12. *SFun* kategorisinde $f_s:(F,A)\to(G,B)$ morfizmi için $g_s\circ f_s=1_{(F,A)}$ ve her $a\in A$ için

$$F(a)\subseteq(F\circ g_s\circ f_s)(a)$$

olacak şekilde bir $g_s:(G,B)\to(F,A)$ morfizmi varsa, f_s esnek morfizmine bir esnek kesit denir.

Önerme 4.1.13. Her esnek kesit bir esnek monomorfizmdir.

İspat: $f_s:(F,A)\to(G,B)$ bir esnek kesit ise, bu takdirde $g_s\circ f_s=1_{(F,A)}$ ve $\forall a\in A$ için,

$$F(a)\subseteq(F\circ g_s\circ f_s)(a)$$

olacak şekilde bir $g_s:(G,B)\to(F,A)$ esnek morfizmi vardır. *SFun*'da bir (H,C) esnek nesnesi ve $h_s,k_s:(H,C)\to(F,A)$ esnek morfizmi için $f_s\circ h_s=f_s\circ k_s$ olduğunu kabul edelim. g_s ile soldan bileşke alırsak

$$g_s\circ f_s\circ h_s=g_s\circ f_s\circ k_s$$

$$(g_s\circ f_s)\circ h_s=(g_s\circ f_s)\circ k_s \qquad \text{(Morfizmlerin birleşme özelliği)}$$

f_s, esnek kesit olduğundan $g_s\circ f_s=1_{(F,A)}$ olup $h_s=k_s$ elde edilir.

Yukarıda görüldüğü gibi esnek kesit bir esnek monomorfizmdir, ancak tersi her zaman doğru değildir.

Önerme 4.1.14. *SFun* kategorisinde f_s ve g_s birer esnek kesit ise, bu takdirde $g_s\circ f_s$ bir esnek kesittir.

İspat: $f_s:(F,A)\to(G,B)$ ve $g_s:(G,B)\to(H,C)$ iki esnek morfizmi birer esnek kesit ise,

$$h_s\circ f_s=1_{(F,A)} \text{ ve } \forall a\in A \text{ için } F(a)\subseteq(F\circ h_s\circ f_s)(a)$$

olacak şekilde bir $h_s:(G,B)\to(F,A)$ esnek morfizmi vardır.

Benzer şekilde,

$$k_s\circ g_s=1_{(G,B)} \text{ ve } \forall b\in B \text{ için } G(b)\subseteq(G\circ k_s\circ g_s)(b)$$

olacak şekilde bir $k_s:(H,C)\to(G,B)$ esnek morfizmi vardır.

f_s ve g_s birer esnek morfizm olduğundan her $a\in A$ için $f_s(a)=b$ olacak şekilde bir $b\in B$ vardır ve $F(a)\subseteq(G\circ f_s)(a)$, ayrıca her $b\in B$ için $g_s(b)=c$ olacak şekilde bir $c\in C$ vardır ve $G(b)\subseteq(H\circ g_s)(b)$ dir.

$$F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a) = G(f_s(a))$$

$$\subseteq G(b) \ \text{... (1)}$$

$$G(b) \subseteq (H \circ g_s)(b) = H(g_s(b))$$

$$\subseteq H(c) \quad \text{...(2)}$$

(1) ve (2)'den $F(a) \subseteq G(b)$ ve $G(b) \subseteq H(c)$ ise, bu takdirde $F(a) \subseteq H(c)$.

$$F(a) \subseteq H(c) = H(g_s(b)) = H(g_s(f_s(a)))$$

$$\subseteq (H \circ (g_s \circ f_s))(a)$$

elde edilir. Böylece $g_s \circ f_s : (F,A) \to (H,C)$ bir esnek morfizmdir. Yukarıda gösterildiği gibi f_s ve g_s birer esnek kesit olduğundan $h_s : (G,B) \to (F,A)$ ve $k_s : (H,C) \to (G,B)$ esnek morfizmlerinin bileşkesinden $h_s \circ k_s : (H,C) \to (F,A)$ esnek morfizmi elde edilir. Buradan, $(h_s \circ k_s) \circ (g_s \circ f_s) : (F,A) \to (F,A)$ olup $(h_s \circ k_s) \circ (g_s \circ f_s) = 1_{(F,A)}$ elde edilir. Yani, $g_s \circ f_s$ esnek morfizmi bir esnek kesittir.

Önerme 4.1.15. *SFun* kategorisinde $g_s \circ f_s$ bir esnek kesit ise, bu takdirde f_s de bir esnek kesittir.

İspat: $g_s \circ f_s : (F,A) \to (H,C)$ bir esnek kesit ise,

$$h_s \circ (g_s \circ f_s) = 1_{(F,A)} \text{ ve } \forall a \in A \text{ için } F(a) \subseteq (F \circ (h_s \circ (g_s \circ f_s)))(a)$$

olacak şekilde bir $h_s : (H,C) \to (F,A)$ esnek morfizmi vardır.

$f_s : (F,A) \to (G,B)$, $g_s : (G,B) \to (H,C)$ ve $h_s : (H,C) \to (F,A)$ birer esnek morfizm ve $g_s \circ f_s$ bir esnek kesit olduğuna göre,

$$h_s \circ (g_s \circ f_s) = 1_{(F,A)}$$

elde edilir. Morfizmlerin bileşkesinin birleşme özelliğinden,

$$h_s \circ (g_s \circ f_s) = (h_s \circ g_s) \circ f_s = 1_{(F,A)}$$

elde edilir. Ayrıca $\forall c \in C$ için $h_s(c) = a$ olacak şekilde bir $a \in A$ mevcut olduğundan,

$$H(c) \subseteq (F \circ h_s)(c).$$

Bununla birlikte, $\forall b \in B$ için $g_s(b) = c$ olacak şekilde bir $c \in C$ vardır ve

$$G(b) \subseteq (H \circ g_s)(b).$$

Buradan,

$$H(c) \subseteq (F \circ h_s)(c) = F(h_s(c)) = F(h_s(g_s(b)))$$
$$H(c) \subseteq (F \circ (h_s \circ g_s))(b)$$

olup $h_s \circ g_s$ bir esnek morfizmdir.

$h_s \circ g_s = k_s$ olarak alırsak, $k_s \circ f_s = 1_{(F,A)}$ olacak şekilde $k_s : (G,B) \to (F,A)$ esnek morfizmi var olduğundan f_s bir esnek kesittir.

Tanım 4.1.16. *SFun* kategorisinde $f_s : (F,A) \to (G,B)$ bir morfizm olmak üzere,

$$f_s \circ g_s = 1_{(G,B)} \text{ ve } \forall b \in B \text{ için } G(b) \subseteq (G \circ (f_s \circ g_s))(b)$$

olacak şekilde bir $g_s : (G,B) \to (F,A)$ esnek morfizmi varsa, bu takdirde f_s esnek morfizmine bir esnek retraksiyon denir.

Önerme 4.1.17. Her esnek retraksiyon bir esnek epimorfizmdir.

İspat: $f_s : (F,A) \to (G,B)$ bir esnek retraksiyon ise,

$$f_s \circ g_s = 1_{(G,B)} \text{ ve } \forall b \in B \text{ için } G(b) \subseteq (G \circ (f_s \circ g_s))(b)$$

olacak şekilde bir $g_s : (G,B) \to (F,A)$ esnek morfizmi vardır.

$$(F,A) \underset{g_S}{\overset{f_S}{\rightleftarrows}} (G,B) \xrightarrow[k_S]{h_S} (H,C)$$

SFun'da bir (H,C) esnek nesnesi ve $h_s, k_s : (G,B) \to (H,C)$ esnek morfizmleri için $h_s \circ f_s = k_s \circ f_s$ olduğunu kabul edelim.

g_s ile bileşke uyguladığımızda,

$$h_s \circ f_s \circ g_s = k_s \circ f_s \circ g_s$$

elde edilir. Bileşke işleminin birleşme özelliğinden,

$$h_s \circ (f_s \circ g_s) = k_s \circ (f_s \circ g_s).$$

Buradan, f_s esnek retraksiyon olduğundan $f_s \circ g_s = 1_{(G,B)}$ olup, $h_s = k_s$ elde edilir. Böylece f_s sağdan sadeleşebilirdir, yani bir esnek epimorfizmdir.

Önerme 4.1.18. *SFun* kategorisinde f_s ve g_s birer esnek retraksiyon ise, bu takdirde $g_s \circ f_s$ bir esnek retraksiyondur.

İspat: $f_s : (F, A) \to (G, B)$ ve $g_s : (G, B) \to (H, C)$ birer esnek retraksiyon ise, bu takdirde

$$f_s \circ h_s = 1_{(G,B)} \text{ ve } \forall b \in B \text{ için } G(b) \subseteq (G \circ (f_s \circ h_s))(b)$$

olacak şekilde bir $h_s : (G, B) \to (F, A)$ esnek morfizmi vardır.

Benzer şekilde,

$$g_s \circ k_s = 1_{(H,C)} \text{ ve } \forall c \in C \text{ için } H(c) \subseteq (H \circ (g_s \circ k_s))(c)$$

olacak şekilde bir $k_s : (H, C) \to (G, B)$ esnek morfizmi vardır.

f_s ve g_s birer esnek morfizm olduğundan her $a \in A$ için $f_s(a) = b$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır ve $F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a)$. Ayrıca, her $b \in B$ için $g_s(b) = c$ olacak şekilde bir $c \in C$ vardır ve $G(b) \subseteq (H \circ g_s)(b)$.

$$F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a) = G(f_s(a))$$

$$\subseteq G(b) \quad \text{... (1)}$$

$$G(b) \subseteq (H \circ g_s)(b) = H(g_s(b))$$

$$\subseteq H(c) \quad \text{...(2)}$$

(1) ve (2)'den $F(a) \subseteq G(b)$ ve $G(b) \subseteq H(c)$ ise, bu takdirde $F(a) \subseteq H(c)$.

$$F(a) \subseteq H(c) = H(g_s(b)) = H(g_s(f_s(a)))$$

$$\subseteq (H \circ (g_s \circ f_s))(a).$$

Böylece $g_s \circ f_s : (F,A) \to (H,C)$ bir $SFun-$morfizmdir. f_s ve g_s birer esnek retraksiyon olduğundan $h_s : (G,B) \to (F,A)$ ve $k_s : (H,C) \to (G,B)$ esnek morfizmlerinin bileşkesinden $h_s \circ k_s : (H,C) \to (F,A)$ esnek morfizmi elde edilir. Buradan, $(g_s \circ f_s) \circ (h_s \circ k_s) : (H,C) \to (H,C)$ olup

$$(g_s \circ f_s) \circ (h_s \circ k_s) = g_s \circ (f_s \circ h_s) \circ k_s$$

$$= g_s \circ 1_{(G,B)} \circ k_s = g_s \circ k_s = 1_{(H,C)}$$

elde edilir. Yani, $g_s \circ f_s$ esnek morfizmi bir esnek retraksiyondur.

Önerme 4.1.19. *SFun* kategorisinde $g_s \circ f_s$ bir esnek retraksiyon ise, bu takdirde g_s de bir esnek retraksiyondur.

İspat: $f_s : (F,A) \to (G,B)$ ve $g_s : (G,B) \to (H,C)$ iki esnek morfizm, $g_s \circ f_s : (F,A) \to (H,C)$ bir esnek retraksiyon olduğuna göre,

$$(g_s \circ f_s) \circ h_s = 1_{(H,C)} \text{ ve } \forall c \in C \text{ için } H(c) \subseteq (H \circ ((g_s \circ f_s) \circ h_s))(c)$$

olacak şekilde bir $h_s : (H,C) \to (F,A)$ esnek morfizmi vardır.

Bileşke işleminin birleşme özelliğinden,

$$(g_s \circ f_s) \circ h_s = g_s \circ (f_s \circ h_s) = 1_{(H,C)}$$

olduğundan ve $\forall c \in C$ için $h_s(c) = a$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır ve,

$$H(c) \subseteq (F \circ h_s)(c).$$

Ayrıca, $\forall a \in A$ için $f_s(a) = b$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır ve,

$$F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a).$$

Buradan,

$$F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a) = G(f_s(a)) = G(f_s(h_s(c)))$$
$$F(a) \subseteq (G \circ (f_s \circ h_s))(c)$$

olup $f_s \circ h_s$ bir esnek morfizmdir.

$f_s \circ h_s = k_s : (H,C) \to (G,B)$ olarak kabul edildiğinde, $g_s \circ k_s = 1_{(H,C)}$ olacak şekilde $k_s : (H,C) \to (G,B)$ esnek morfizmi vardır, yani g_s bir esnek retraksiyondur.

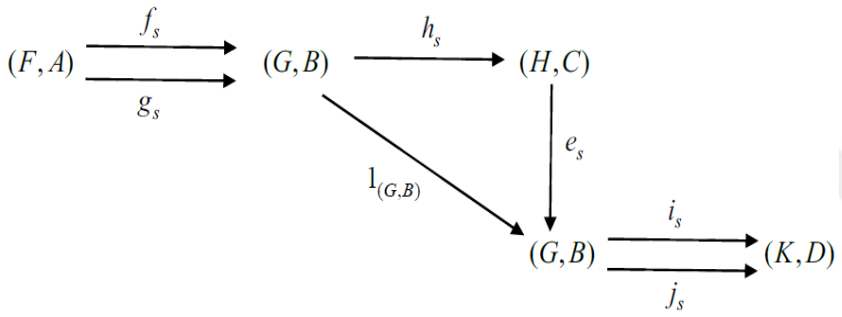
Tanım 4.1.20. *SFun* kategorisinde, $\forall a \in A$ için $F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a)$ olacak şekilde bir $f_s : (F,A) \to (G,B)$ esnek morfizmi için,

$$g_s \circ f_s = 1_{(F,A)} \text{ ve } f_s \circ g_s = 1_{(G,B)}$$

olacak şekilde bir $g_s : (G,B) \to (F,A)$ esnek morfizmi varsa, bu takdirde f_s esnek morfizmine bir esnek izomorfizma denir.

Önerme 4.1.21. Her esnek izomorfizm, monik ve epiktir.

İspat: Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım.



$h_s : (G,B) \to (H,C)$ bir esnek morfizm olduğundan, her $b \in B$ için $h_s(b) = c$ olacak şekilde bir $c \in C$ vardır ve,

$$G(b) \subseteq (H \circ h_s)(b).$$

$h_s : (G,B) \to (H,C)$ bir esnek izomorfizm olsun. $h_s \circ f_s = h_s \circ g_s$ olması $e_s \circ h_s \circ f_s = e_s \circ h_s \circ g_s$ olmasını gerektirir. $e_s \circ h_s = 1_{(G,B)}$ olduğundan $f_s = g_s$ elde edilir. Bu ise h_s'in soldan sadeleşebilir, yani monik olduğunu gösterir. Benzer şekilde $e_s : (H,C) \to (G,B)$ bir esnek morfizm olduğundan, her $c \in C$ için $e_s(c) = b$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır ve

$$H(c) \subseteq (G \circ e_s)(c).$$

$e_s : (H,C) \to (G,B)$ bir esnek izomorfizm olsun. Buradan,

$$i_s \circ e_s = j_s \circ e_s$$

$$i_s \circ e_s \circ h_s = j_s \circ e_s \circ h_s$$

$$i_s \circ 1_{(G,B)} = j_s \circ 1_{(G,B)}$$

$$i_s = j_s \ .$$

Böylece e_s sağdan sadeleşebilir, yani epiktir.

Önerme 4.1.22. *SFun* kategorisinde bir f_s esnek morfizmi bir esnek izomorfizmdir ancak ve ancak f_s esnek monik ve esnek retraksiyondur.

İspat: *SFun* kategorisinde bir $f_s : (F, A) \to (G, B)$ esnek morfizmi bir esnek izomorfizm olsun. Bu takdirde, $\forall a \in A$ için $F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a)$ ve

$$g_s \circ f_s = 1_{(F,A)} \text{ ve } f_s \circ g_s = 1_{(G,B)}$$

olacak şekilde bir $g_s : (G, B) \to (F, A)$ esnek morfizmi vardır.

$$(H, C) \xrightarrow[k_s]{h_s} (F, A) \underset{g_s}{\overset{f_s}{\rightleftarrows}} (G, B)$$

f_s esnek morfizmi için, $\forall a \in A$ için $f_s(a) = b$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır ve $F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a)$.

g_s esnek morfizmi için, $\forall b \in B$ için $g_s(b) = a$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır ve $G(b) \subseteq (F \circ g_s)(b)$.

$$F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a) = G(f_s(a))$$

$$\subseteq G(b) \qquad (1)$$

ve

$$G(b) \subseteq (F \circ g_s)(b) = F(g_s(b))$$

$$\subseteq F(a) \qquad (2)$$

(1) ve (2)'den $F(a) \subseteq F(a)$ ise,

$$F(a) \subseteq F(a) = F(g_s(b)) = F(g_s(f_s(a)))$$

$$\subseteq (F \circ g_s \circ f_s)(a)$$

elde edilir. Yani, $g_s \circ f_s : (F,A) \to (F,A)$ bir esnek morfizmdir.

Benzer şekilde, (1) ve (2)'den $G(b) \subseteq G(b)$ olduğundan,

$$G(b) \subseteq G(b) = G(f_s(a)) = G(f_s(g_s(b)))$$

$$\subseteq (G \circ f_s \circ g_s)(b).$$

Buradan, $f_s \circ g_s : (G,B) \to (G,B)$ bir esnek morfizmdir.

f_s'in esnek monik olması için soldan sadeleşebilir olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için $h_s, k_s : (H,C) \to (F,A)$ esnek morfizmlerini alalım ve $f_s \circ h_s = f_s \circ k_s$ olduğunu kabul edelim. g_s esnek morfizmi ile soldan bileşke alırsak

$$g_s \circ f_s \circ h_s = g_s \circ f_s \circ k_s .$$

Bileşke işleminin birleşme özelliğinden,

$$(g_s \circ f_s) \circ h_s = (g_s \circ f_s) \circ k_s .$$

$g_s \circ f_s = 1_{(F,A)}$ olduğundan, $h_s = k_s$ elde edilir.

Şimdi, f_s'in esnek retraksiyon olabilmesi için, $f_s \circ g_s = 1_{(G,B)}$ olacak şekilde bir $g_s : (G,B) \to (F,A)$ esnek morfizminin var olmasıdır. Bu da f_s'in esnek izomorfizm olmasından açıktır.

Tersine olarak, $SFun$ kategorisinde bir $f_s : (F,A) \to (G,B)$ esnek morfizmi bir esnek monik ve bir esnek retraksiyon olsun. Bu takdirde, f_s soldan sadeleşebilirdir ve

$$f_s \circ g_s = 1_{(G,B)}$$

olacak şekilde bir $g_s : (G,B) \to (F,A)$ esnek morfizmi vardır.

f_s'in bir esnek izomorfizm olduğunu göstermek için, $g_s \circ f_s = 1_{(F,A)}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$f_s : (F, A) \to (G, B)$ esnek morfizmi için $\forall a \in A$ için $f_s(a) = b$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır ve $F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a)$; $g_s : (G, B) \to (F, A)$ esnek morfizmi için $\forall b \in B$ için $g_s(b) = a$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır ve $G(b) \subseteq (F \circ g_s)(b)$.

$F(a) \subseteq F(a)$ olduğu açıktır. Buradan,

$$F(a) \subseteq F(a) = F(g_s(b)) = F(g_s(f_s(a)))$$

$$\subseteq (F \circ g_s \circ f_s)(a).$$

Böylece, $g_s \circ f_s : (F, A) \to (F, A)$ bir $SFun-$morfizmdir ve $g_s \circ f_s = 1_{(F,A)}$ elde edilir. Böylece f_s bir esnek izomorfizmdir.

Önerme 4.1.23. *SFun* kategorisinde bir f_s esnek morfizmi bir esnek izomorfizmdir ancak ve ancak f_s esnek epik ve esnek kesittir.

İspat: *SFun* kategorisinde bir $f_s : (F, A) \to (G, B)$ esnek morfizmi bir esnek izomorfizm olsun. Bu takdirde, $\forall a \in A$ için $F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a)$ ve

$$g_s \circ f_s = 1_{(F,A)} \text{ ve } f_s \circ g_s = 1_{(G,B)}$$

olacak şekilde bir $g_s : (G, B) \to (F, A)$ esnek morfizmi vardır.

$$(F, A) \underset{g_s}{\overset{f_s}{\rightleftarrows}} (G, B) \xrightarrow[k_s]{h_s} (H, C)$$

f_s esnek morfizmi için $\forall a \in A$ için $f_s(a) = b$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır ve $F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a)$.

g_s esnek morfizmi için $\forall b \in B$ için $g_s(b) = a$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır ve $G(b) \subseteq (F \circ g_s)(b)$.

$F(a) \subseteq F(a)$ olmasından,

$$F(a) \subseteq F(a) = F(g_s(b)) = F(g_s(f_s(a)))$$
$$\subseteq (F \circ g_s \circ f_s)(a)$$

elde edilir. Yani, $g_s \circ f_s : (F, A) \to (F, A)$ bir esnek morfizmdir.

Benzer şekilde, $G(b) \subseteq G(b)$ olduğundan,

$$G(b) \subseteq G(b) = G(f_s(a)) = G(f_s(g_s(b)))$$
$$\subseteq (G \circ f_s \circ g_s)(b).$$

Buradan, $f_s \circ g_s : (G, B) \to (G, B)$ bir esnek morfizmdir.

f_s'in esnek epik olması için sağdan sadeleşebilir olması gerekir. Bunun için $h_s, k_s : (G, B) \to (H, C)$ esnek morfizmlerini alalım ve $h_s \circ f_s = k_s \circ f_s$ olduğunu kabul edelim. g_s esnek morfizmi ile sağdan bileşke alırsak,

$$h_s \circ f_s \circ g_s = k_s \circ f_s \circ g_s.$$

Bileşke işleminin birleşme özelliğinden,

$$h_s \circ (f_s \circ g_s) = k_s \circ (f_s \circ g_s).$$

$f_s \circ g_s = 1_{(G,B)}$ olduğundan, $h_s = k_s$ elde edilir.

f_s'in esnek kesit olabilmesi için, $g_s \circ f_s = 1_{(F,A)}$ olacak şekilde bir $g_s : (G, B) \to (F, A)$ esnek morfizminin var olduğu f_s'in esnek izomorfizm olmasından elde edilir.

Şimdi, $SFun$ kategorisinde bir $f_s : (F, A) \to (G, B)$ esnek morfizmi bir esnek epik ve bir esnek kesit olsun. Bu takdirde, f_s sağdan sadeleşebilir ve

$$g_s \circ f_s = 1_{(F,A)}$$

olacak şekilde bir $g_s : (G, B) \to (F, A)$ esnek morfizmi vardır.

f_s'in bir esnek izomorfizm olduğunu göstermek için , $f_s \circ g_s = 1_{(G,B)}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$f_s:(F,A)\to(G,B)$ esnek morfizmi için $\forall a\in A$ için $f_s(a)=b$ olacak şekilde bir $b\in B$ vardır ve $F(a)\subseteq(G\circ f_s)(a)$; $g_s:(G,B)\to(F,A)$ esnek morfizmi için $\forall b\in B$ için $g_s(b)=a$ olacak şekilde bir $a\in A$ vardır ve $G(b)\subseteq(F\circ g_s)(b)$.

$G(b)\subseteq G(b)$ olduğundan,

$$G(b)\subseteq G(b)=G(f_s(a))=G(f_s(g_s(b)))$$

$$\subseteq(G\circ f_s\circ g_s)(b).$$

Buradan, $f_s\circ g_s:(G,B)\to(G,B)$ bir $SFun-$morfizmdir ve $f_s\circ g_s=1_{(G,B)}$ elde edilir. Böylece f_s bir esnek izomorfizmdir.

Sonuç 4.1.24. $SFun$ kategorisinde bir esnek morfizm hem esnek kesit hem de esnek retraksiyon ise, bu takdirde esnek izomorfizmdir.

Tanım 4.1.25. Bir esnek kategoride her esnek bimorfizm bir esnek izomorfizm ise, bu kategoriye esnek dengeli kategori denir.

Önerme 4.1.26. $SFun$ kategorisinde her esnek monomorfizm bir esnek kesit ise, bu taktirde $SFun$ esnek dengelidir.

İspat: $SFun$ kategorisinde $f_s:(F,A)\to(G,B)$ bir esnek monomorfizm ise soldan sadeleşebilirdir ve bir esnek kesit ise, $g_s\circ f_s=1_{(F,A)}$ ve $\forall a\in A$ için $F(a)\subseteq(F\circ g_s\circ f_s)(a)$ olacak şekilde bir $g_s:(G,B)\to(F,A)$ esnek morfizmi vardır.

$SFun$ kategorisinin esnek dengeli olabilmesi için f_s esnek morfizminin bir esnek bimorfizm olması ve bunun için de f_s'in esnek monik ve esnek epik olması gerekir. f_s'in esnek monik olduğu açık olup, esnek epik olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bunun için sağdan sadeleşebilir olduğunu göstermeliyiz.

$h_s,k_s:(G,B)\to(H,C)$ esnek morfizmleri için $h_s\circ f_s=k_s\circ f_s$ olduğunu kabul edelim. f_s esnek kesit olduğundan bir $g_s:(G,B)\to(F,A)$ esnek morfizmi vardır.

$h_s\circ f_s\circ g_s=k_s\circ f_s\circ g_s$ (g_s ile sağdan bileşke işlemi)

$h_s \circ (f_s \circ g_s) = k_s \circ (f_s \circ g_s)$ (bileşke işleminin birleşme özelliği)

Burada, $f_s : (F, A) \to (G, B)$ esnek morfizmi için $\forall a \in A$ için $f_s(a) = b$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır ve $F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a)$; $g_s : (G, B) \to (F, A)$ esnek morfizmi için $\forall b \in B$ için $g_s(b) = a$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır ve $G(b) \subseteq (F \circ g_s)(b)$.

$G(b) \subseteq G(b)$ olduğundan,

$$G(b) \subseteq G(b) = G(f_s(a)) = G(f_s(g_s(b)))$$

$$\subseteq (G \circ f_s \circ g_s)(b).$$

Buradan, $f_s \circ g_s : (G, B) \to (G, B)$ bir esnek morfizmdir ve $f_s \circ g_s = 1_{(G,B)}$'dir. Böylece $h_s = k_s$ elde edilir, yani f_s sağdan sadeleşebilir olup bir esnek epimorfizmdir.

Şimdi, esnek izomorfizm olduğunu gösterelim. f_s'in esnek izomorfizm olabilmesi için esnek kesit olduğu kabulümüzden açıktır. Esnek retraksiyon olması için,

$$f_s \circ g_s = 1_{(G,B)}$$

olacak şekilde bir $g_s : (G, B) \to (F, A)$ esnek morfizminin var olduğu yukarıdaki açıklamalarımızdan elde edilir.

Sonuç olarak $SFun$ kategorisi esnek dengelidir.

Önerme 4.1.27. $SFun$ kategorisinde her esnek epimorfizm bir esnek retraksiyon ise, bu taktirde $SFun$ esnek dengelidir.

İspat: $SFun$ kategorisinde $f_s : (F, A) \to (G, B)$ bir esnek epimorfizm ise sağdan sadeleşebilirdir. Aynı zamanda bir esnek retraksiyon ise, $f_s \circ g_s = 1_{(G,B)}$ ve $\forall b \in B$ için $G(b) \subseteq (G \circ f_s \circ g_s)(b)$ olacak şekilde bir $g_s : (G, B) \to (F, A)$ esnek morfizmi vardır.

$SFun$ kategorisinin esnek dengeli olduğunu göstermek için f_s esnek morfizminin bir esnek bimorfizm ve esnek izomorfizm olduğunu göstermeliyiz.

Esnek bimorfizm olması için f_s'in hem esnek monik hem de esnek epik olması gerekir. Hipotezden esnek epik olduğu açıktır. Esnek monik olması için soldan sadeleşebilir olup olmadığını kontrol etmeliyiz.

$$(H,C) \underset{k_s}{\overset{h_s}{\longrightarrow}} (F,A) \underset{g_s}{\overset{f_s}{\rightleftarrows}} (G,B)$$

$h_s, k_s : (H,C) \to (F,A)$ esnek morfizmleri için $f_s \circ h_s = f_s \circ k_s$ olduğunu kabul edelim. f_s esnek retraksiyon olduğundan bir $g_s : (G,B) \to (F,A)$ esnek morfizmi vardır. g_s esnek morfizmi ile soldan bileşke işlemi uygularsak,

$$g_s \circ f_s \circ h_s = g_s \circ f_s \circ k_s .$$

Bileşke işleminin birleşme özelliğinden,

$$(g_s \circ f_s) \circ h_s = (g_s \circ f_s) \circ k_s \ .$$

Burada, $f_s : (F,A) \to (G,B)$ esnek morfizmi için $\forall a \in A$ için $f_s(a) = b$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır ve $F(a) \subseteq (G \circ f_s)(a)$; $g_s : (G,B) \to (F,A)$ esnek morfizmi için $\forall b \in B$ için $g_s(b) = a$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır ve $G(b) \subseteq (F \circ g_s)(b)$.

$F(a) \subseteq F(a)$ olmasından,

$$\begin{aligned} F(a) &\subseteq F(a) \\ &\subseteq F(g_s(b)) = F(g_s(f_s(a))) \\ &\subseteq (F \circ g_s \circ f_s)(a) \end{aligned}$$

olup $g_s \circ f_s : (F,A) \to (F,A)$ bir esnek morfizmdir ve $g_s \circ f_s = 1_{(F,A)}$'dır. Böylece $h_s = k_s$ elde edilir, yani f_s soldan sadeleşebilir olup bir esnek monomorfizmdir. Bu taktirde f_s'in esnek bimorfizm olduğu görülür.

Şimdi, f_s'in esnek izomorfizm olabilmesi için esnek retraksiyon olduğu açıktır. Esnek kesit olması için,

$$g_s \circ f_s = 1_{(F,A)}$$

olacak şekilde bir $g_s : (G,B) \to (F,A)$ esnek morfizminin var olması gerekir. Böyle bir morfizmin var olduğu ise yukarıdan elde edilir.

Böylece, $SFun$ kategorisi esnek dengelidir.

Tanım 4.1.28. $SFun$ kategorisinde herhangi bir (H,C) nesnesi için bir tek $(F^*,0) \to (H,C)$ esnek morfizmi var ise, bu takdirde $(F^*,0)$ esnek nesnesine bir başlangıç nesnesi denir.

Önerme 4.1.29. Başlangıç nesneleri izomorfizmaya bağlı olarak tektir.

İspat: (F,U_1) ve (G,U_2)'nin ikisinin de başlangıç nesnesi olduğunu kabul edelim. $Mor((F,U_1),(G,U_2))$ bir esnek izomorfizm içerdiğini göstermek istiyoruz. (F,U_1) başlangıç nesnesi ise herhangi bir (G,U_2) esnek nesnesi için $Mor((F,U_1),(G,U_2)) = \{\alpha_s\}$. Benzer şekilde (G,U_2) başlangıç nesnesi olduğundan $Mor((G,U_2),(F,U_1)) = \{\beta_s\}$.

$\forall x \in U_1$ için $\alpha_s(x) = y$ olacak şekilde bir $y \in U_2$ vardır ve α_s esnek morfizm olduğundan,

$$F(x) \subseteq (G \circ \alpha_s)(x). \qquad (1)$$

$\forall y \in U_2$ için $\beta_s(y) = x$ olacak şekilde bir $x \in U_1$ vardır ve β_s esnek morfizm olduğundan,

$$G(y) \subseteq (F \circ \beta_s)(y). \qquad (2)$$

(1)'den

$$F(x) \subseteq (G \circ \alpha_s)(x) = G(\alpha_s(x)) = G(\alpha_s(\beta_s(y))) \subseteq (G \circ (\alpha_s \circ \beta_s))(y).$$

Bu ise $\alpha_s \circ \beta_s$'in esnek morfizm olduğunu gösterir.

(2)'den

$$G(y) \subseteq (F \circ \beta_s)(y) = F(\beta_s(y)) = F(\beta_s(\alpha_s(x))) \subseteq (F \circ (\beta_s \circ \alpha_s))(x).$$

Böylece $\beta_s \circ \alpha_s$'in esnek morfizm olduğu görülür.

Ayrıca, $\alpha_s : (F,U_1) \to (G,U_2)$ ve $\beta_s : (G,U_2) \to (F,U_1)$ olduğundan $\alpha_s \circ \beta_s : (G,U_2) \to (G,U_2)$ olup, $\alpha_s \circ \beta_s = 1_{(G,U_2)}$ ve benzer şekilde $\beta_s \circ \alpha_s : (F,U_1) \to (F,U_1)$, $\beta_s \circ \alpha_s = 1_{(F,U_1)}$ elde edilir.

Sonuç olarak (F,U_1) ve (G,U_2) başlangıç nesneleri izomorfiktir. Yani $SFun$ kategorisi için başlangıç nesnesi izomorfizmaya bağlı olarak tektir.

Tanım 4.1.30. $SFun$ kategorisinde herhangi bir (H,C) nesnesi için bir tek $(H,C) \to (F^*,1)$ esnek morfizmi var ise, bu takdirde $(F^*,1)$ esnek nesnesine bir bitiş nesnesi denir.

Önerme 4.1.31. Bitiş nesneleri izomorfizmaya bağlı olarak tektir.

İspat: $SFun$'da (F_1,A) ve (F_2,B)'nin iki bitiş nesnesi olduğunu kabul edelim. $Mor((F_1,A),(F_2,B))$ bir esnek izomorfizm içerdiğini göstermek istiyoruz.

(F_1,A) bitiş nesnesi ise herhangi bir (F_2,B) esnek nesnesi için $Mor((F_2,B),(F_1,A)) = \{f_s\}$. Benzer şekilde (F_2,B) bitiş nesnesi olduğundan $Mor((F_1,A),(F_2,B)) = \{g_s\}$.

$\forall b \in B$ için $f_s(b) = a$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır ve f_s esnek morfizm olduğundan,

$$F_2(b) \subseteq (F_1 \circ f_s)(b). \qquad (1)$$

$\forall a \in A$ için $g_s(a) = b$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır ve g_s esnek morfizm olduğundan,

$$F_1(a) \subseteq (F_2 \circ g_s)(a). \qquad (2)$$

(1)'den

$$F_2(b) \subseteq (F_1 \circ f_s)(b) = F_1(f_s(b)) = F_1(f_s(g_s(a))) \subseteq (F_1 \circ (f_s \circ g_s))(a).$$

Buradan, $f_s \circ g_s$'in esnek morfizm olduğu görülür.

(2)'den

$$F_1(a) \subseteq (F_2 \circ g_s)(a) = F_2(g_s(a)) = F_2(g_s(f_s(b))) \subseteq (F_2 \circ (g_s \circ f_s))(b).$$

Böylece $g_s \circ f_s$ esnek morfizmdir.

$f_s : (F_2, B) \to (F_1, A)$ ve $g_s : (F_1, A) \to (F_2, B)$ olduğundan $f_s \circ g_s : (F_1, A) \to (F_1, A)$ olup $f_s \circ g_s = 1_{(F_1, A)}$ ve aynı şekilde $g_s \circ f_s : (F_2, B) \to (F_2, B)$, $g_s \circ f_s = 1_{(F_2, B)}$ elde edilir.

Böylece $SFun$ kategorisinde (F_1, A) ve (F_2, B) bitiş nesneleri izomorfiktir. Yani $SFun$'da bitiş nesneleri izomorfizmaya bağlı olarak tektir.

Tanım 4.1.32. $SFun$ kategorisinde bir (F^*, Z) nesnesi hem başlangıç hem de bitiş nesnesi ise, bu takdirde (F^*, Z) esnek nesnesi bir sıfır nesnesi olarak adlandırılır.

$SFun$ kategorisinin bir (F^*, Z) nesnesine sahip olduğunu varsayalım. $SFun$'ın (F, A) ve (G, B) esnek nesneleri verilsin. Evrensellikten, $0_{AZ} : (F, A) \to (F^*, Z)$ ve $0_{ZB} : (F^*, Z) \to (G, B)$ olmak üzere bir tek 0_{AZ} ve 0_{ZB} esnek morfizmleri vardır. $0_{ZB} \circ 0_{AZ} : (F, A) \to (G, B)$ bileşke esnek morfizmasını göz önüne alalım. Bileşke morfizminin (F, A) ve (G, B) $SFun-$nesnelerine bağlı olduğunu ve (F^*, Z)'ye bağlı olmadığını görmek istiyoruz.

Bunu görmek için, $(F^*, Z)'$ esnek nesnesi de $SFun$'ın bir sıfır nesnesi olsun. Bu takdirde bir tek $\eta_s : (F^*, Z) \to (F^*, Z)'$ ve $\eta'_s : (F^*, Z)' \to (F^*, Z)$ morfizmleri vardır. $\eta'_s \circ \eta_s : (F^*, Z) \to (F^*, Z)$ olduğundan,

$$\eta'_s \circ \eta_s = 1_{(F^*, Z)}$$

elde ederiz. Şimdi evrensellikten,

$$(F,A)\xrightarrow{0_{AZ}}(F^*,Z)\xrightarrow{\eta}(F^*,Z)'=(F,A)\xrightarrow{0_{AZ'}}(F^*,Z)'$$

ve benzer şekilde

$$(F^*,Z)'\xrightarrow{\eta'}(F^*,Z)\xrightarrow{0_{ZB}}(G,B)=(F^*,Z)'\xrightarrow{0_{Z'B}}(G,B).$$

Sonuç olarak

$$0_{Z'B}\circ 0_{AZ'}=0_{ZB}\circ\eta'\circ\eta\circ 0_{AZ}=0_{ZB}\circ 0_{AZ}$$

elde ederiz.

Buradan, $0_{ZB}\circ 0_{AZ}$ morfizmini 0_{AB} olarak yazacağız. 0_{AB}, (F,A)'dan (G,B)'ye esnek sıfır morfizm olarak adlandırılır ve böyle bir karışıklık olmadığında 0_s şeklinde gösteririz.

Önerme 4.1.33. $SFun$ kategorisi sıfır nesnesine sahip ise, bu takdirde $SFun$'ın her α_s esnek morfizmi için,

$$0_s\circ\alpha_s=0_s \text{ ve } \alpha_s\circ 0_s=0_s$$

dir.

İspat: $\alpha_s:(H,X)\to(F,A)$ bir $SFun-$morfizm ve (F^*,Z) sıfır nesnesi $SFun$ kategorisinin bir nesnesi olmak üzere $0_s:(F,A)\to(G,B)$ olsun.

$\forall x\in X$ için $\alpha_s(x)=a$ olacak şekilde bir $a\in A$ vardır ve $H(x)\subseteq(F\circ\alpha_s)(x)$, $\forall a\in A$ için $0_s(a)=b$ olacak şekilde bir $b\in G$ vardır ve $F(a)\subseteq(G\circ 0_s)(a)$.

$$\begin{aligned}H(x)\subseteq(F\circ\alpha_s)(x)&=F(\alpha_s(x))\\&\subseteq F(a)\end{aligned}\qquad(1)$$

$$\begin{aligned}F(a)\subseteq(G\circ 0_s)(a)&=G(0_s(a))\\&\subseteq G(b)\end{aligned}\qquad(2)$$

(1) ve (2)'den, $H(x)\subseteq F(a)$ ve $F(a)\subseteq G(b)$ ise, $H(x)\subseteq G(b)$.

$$\begin{aligned}H(x)\subseteq G(b)=G(0_s(a))&=G(0_s(\alpha_s(x)))\\&\subseteq(G\circ(0_s\circ\alpha_s))(x)\end{aligned}$$

Buradan, $0_s \circ \alpha_s : (H,X) \to (G,B)$ bir $SFun-$morfizmdir.

Şimdi, $0_s \circ \alpha_s = 0_s$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$$(H,X) \xrightarrow{\alpha_s} (F,A) \xrightarrow{0_s} (G,B) = (H,X) \xrightarrow{\alpha_s} (F,A) \xrightarrow{0_{AZ}} (F^*,Z) \xrightarrow{0_{ZB}} (G,B)$$
$$= (H,X) \xrightarrow{0_{XZ}} (F^*,Z) \xrightarrow{0_{ZB}} (G,B)$$
$$= (H,X) \xrightarrow{0_{XB}} (G,B)$$

Benzer şekilde, $\alpha_s : (G,B) \to (H,X)$ bir $SFun-$morfizm ve (F^*,Z) $SFun$'ın bir sıfır nesnesi olmak üzere $0_s : (F,A) \to (G,B)$ olsun.

$\forall a \in A$ için $0_s(a) = b$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır ve $F(a) \subseteq (G \circ 0_s)(a)$, $\forall b \in B$ için $\alpha_s(b) = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır ve $G(b) \subseteq (H \circ \alpha_s)(b)$.

$$F(a) \subseteq (G \circ 0_s)(a) = G(0_s(a))$$
$$\subseteq G(b) \qquad (1)$$
$$G(b) \subseteq (H \circ \alpha_s)(b) = H(\alpha_s(b))$$
$$\subseteq H(x) \qquad (2)$$

(1) ve (2)'den, $F(a) \subseteq G(b)$ ve $G(b) \subseteq H(x)$ ise, $F(a) \subseteq H(x)$.

$$F(a) \subseteq H(x) = H(\alpha_s(b)) = H(\alpha_s(0_s(a)))$$
$$\subseteq (H \circ (\alpha_s \circ 0_s))(a)$$

Buradan, $\alpha_s \circ 0_s : (F,A) \to (H,X)$ bir $SFun-$morfizmdir.

Şimdi, $\alpha_s \circ 0_s = 0_s$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$$(F,A) \xrightarrow{0_s} (G,B) \xrightarrow{\alpha_S} (H,X) = (F,A) \xrightarrow{0_{AZ}} (F^*,Z) \xrightarrow{0_{ZB}} (G,B) \xrightarrow{\alpha_s} (H,X)$$
$$= (F,A) \xrightarrow{0_{AZ}} (F^*,Z) \xrightarrow{0_{ZX}} (H,X)$$
$$= (F,A) \xrightarrow{0_{AX}} (H,X).$$

Tanım 4.1.34. $SFun$ kategorisinin tüm $(F,A),(G,B)$ esnek nesneleri için $Mor_{SFun}((F,A),(G,B)) \neq \varnothing$ ise, $SFun$ kategorisi esnek bağlantılı olarak adlandırılır.

Önerme 4.1.35. $SFun$ kategorisinin bir başlangıç ve bir bitiş nesnesine sahip olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, $SFun$'ın bir sıfır nesnesine sahip olması için gerek ve yeter koşul $SFun$'ın esnek bağlantılı olmasıdır.

İspat: $SFun$'ın bir sıfır nesnesine sahip ise, bu takdirde esnek bağlantılı olduğu Önerme 4.1.33'den açıktır.

Tersine olarak, $SFun$'ın esnek bağlantılı olduğunu varsayalım. $(F^*,0)$ başlangıç nesnesi ve $(F^*,1)$ bitiş nesnesi olsun. $Mor_{SFun}((F^*,0),(F^*,1)) = \{\alpha_s\}$ ise, bu takdirde α_s'in esnek monik olduğunu görürüz. $SFun$ esnek bağlantılı olduğundan, $\beta_s : (F^*,1) \to (F^*,0)$ vardır ve $(F^*,0)$ başlangıç nesnesi olduğundan $\beta_s \circ \alpha_s = 1_{(F^*,0)}$. Böylece α_s bir esnek kesit ve buradan bir esnek moniktir.

Şimdi, $f_s, g_s \in Mor_{SFun}((F,A),(F^*,0))$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde, $\alpha_s \circ f_s, \alpha_s \circ g_s \in Mor_{SFun}((F,A),(F^*,1))$ ve bundan dolayı, $(F^*,1)$ bitiş nesnesi olduğundan $\alpha_s \circ f_s = \alpha_s \circ g_s$. Şimdi α_s esnek monik olduğundan soldan sadeleşebilirdir, buradan $f_s = g_s$ elde edilir. Sonuç olarak $(F^*,0)$'ın ayrıca bitiş nesnesine de sahip olduğunu ve böylece bir sıfır nesnesine sahip olduğunu görürüz.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışması sonucunda tanımlanan *SFun* kategorisinin morfizmleri ile ilgili özellikleri elde edilmiştir. Esnek monomorfizm, esnek epimorfizm, esnek kesit, esnek retraksiyon tanımlanarak esnek kesit ve esnek monomorfizm arasındaki ilişki ile esnek retraksiyon ve esnek epimorfizm arasındaki ilişki ispatlanmıştır.

SFun Kategorisi için esnek izomorfizm tanımlanmıştır. Esnek izomorfizmin esnek monomorfizm, esnek epimorfizm, esnek retraksiyon, esnek kesit ile ilgili ilişkileri içeren sonuçlar elde edilmiştir.

Son olarak *SFun* kategorisi için başlangıç, bitiş ve sıfır nesneleri tanımlanmış, başlangıç ve bitiş nesnelerinin esnek izomorfizmaya bağlı olarak tek olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca sıfır nesnesinin bazı özellikleri *SFun* kategorisi için sunulmuştur.

İlerleyen zamanlarda bu çalışmada oluşturulan *SFun* kategorik yapısının farklı özellikleri incelenebilir. Esnek gruplar ve esnek gruplar kategorisinden yararlanarak cebirsel özellikleri içeren yeni kategorik yapılar oluşturulabilir. Oluşturulan farklı kategoriler arasında funktor denilen dönüşüm yardımıyla yeni özellikler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Molodtsov D. Soft set theory-first result. Computers & Mathematics with Applications. 1999, 37, 19-31.

[2] Maji, P. K., Biswas R.,Roy A. R. Soft set theory. Computers & Mathematics with Applications. 2003, 45, 555-562.

[3] Shabir M., Naz M. On soft topological spaces. Computers & Mathematics with Applications. 2011, 61(7), 1786-1799.

[4] Zorlutuna İ. , Akdağ M., Min W. K., Atmaca S. Remarks on soft topological spaces. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics. 2012, 3(2), 171-185.

[5] Zorlutuna İ., Çakır H. On continuity of soft mappings. Applied Mathematics and Information Science. 2015, 9(1), 403-409.

[6] Aras Ç.G., Sönmez A. Çakallı H. On soft mappings. ArXiv, Computers & Mathematics with Applications. 2013, 1-12.

[7] Aras Ç.G., Poşul H. On some new operations in probabilistic soft set theory. European Journal of Pure and Applied Mathematics. 2016, 9(3), 333-339.

[8] Ali M. I., Shabir M., Naz M. Algebraic structures of soft sets associated with new operations. Computers & Mathematics with Applications. 2011,61(9), 3458–3463.

[9] Sardar S. K.,Gupta S. Soft category theory-an ıntroduction. Journal of Hyperstructures. 2013, 2(2) , 118-135.

[10] Zhou M., Li S. Akram M. Categorical properties of soft set. The Scientific World Journal. 2014, Article ID: 783056, 1-10.

[11] Zahiri O. Category of soft sets. Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series. 2013, 40(2),154–166.

[12] Varol B. P, Shosttak A. and Aygün H. Categories related to topology viewed as soft sets. EUSFLAT-LFA, 2011, 883-890.

[13] Öztunç S. Some properties of soft categories. International Journal of Modeling and Optimization. 2016, 6(2), 91-95.

[14] Öztunç S. On Products in the Soft Categories, International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM 2017), Prague/Czech Republic, 22-25 July 2017, (Abstract Book 28).

[15] Öztunç S. Mutlu A., Erdoğan Sert A. Monomorphism and epimorphism properties of soft categories, European Journal of Pure and Applied Mathematics. 2017, 10 (4), 850-857.

[16] Awoday S. Category Theory, Oxford Science Publication, 2010, 311s.

[17] Blyth, T.S. Categories. Longman, Londan and New York, 1986, 152s.

[18] Mac Lane S. Categories for Working Mathematicians, Springer-Verlag, 1997, 314s.

[19] Herrlich H., Strecker G.E. Category Theory, Allyn and Bacon Inc, Boston 1979, 400s.

[20] Mucuk, O. Topoloji ve Kategori. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, Türkiye, 2009, 462s.

[21] Eilenberg S. and Mac Lane S. General theory of naturel equivalences. Transactions of American Mathematical Society. 1945, (58), 231-94.

[22] Öztunç S., Erdoğan Sert A. Monomorphism and Epimorphism Properties of Soft Categories. International Conference on Mathematics and Mathematics Education, Fırat University, Elazığ/TURKEY, 12-14 May 2016, (Abstract Book 655).

[23] Öztunç S. Some Properties of Soft Categories, International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM), Rome, Italy, 16-17 July 2015, (Abstract Book 31).

[24] Öztunç S., Mutlu A., Aslan S., Categorical Structures of Soft Groups, International Students Sience Conference, İzmir/Turkey, 5-6 May 2017, (Abstract Book 69).

[25] Bayramov S, Aras Ç.G. Soft locally compact and soft paracompact spaces. Journal of Mathematics and System Science. 2013, 3, 122-130.

[26] Hussein S., Ahmad B. Some properties of soft topological spaces. Computers & Mathematics with Applications. 211, 62(11), 4058-4067.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Aysun ERDOĞAN SERT

Doğum Yeri ve Yılı : Kula, 1988

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : aysn_erdogn@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Adnan Menderes Yabancı Dil Ağırlıklı Lise, 2006

Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2010

Yayınları

[1] Öztunç S., Erdoğan Sert A. Monomorphism and Epimorphism Properties of Soft Categories. International Conference on Mathematics and Mathematics Education, Fırat University, Elazığ/TURKEY, 12-14 May 2016, (Abstract Book 655).

[2] Öztunç S. Mutlu A., Erdoğan Sert A. Monomorphism and epimorphism properties of soft categories, European Journal of Pure and Applied Mathematics. 2017, 10 (4), 850-857.