T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI

ÖKLİD VE TİMELİKE BİSHOP KÜRESEL EĞRİLER VE KARAKTERİZASYONLARI

Nurten EMER

Danışman

Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

MANİSA–2020

Nurten
EMER

ÖKLİD VE TİMELİKE BİSHOP KÜRESEL EĞRİLER VE KARAKTERİZASYONLARI

2020

TEZ ONAYI

Nurten EMER tarafından hazırlanan **"ÖKLİD VE TİMELİKE BİSHOP KÜRESEL EĞRİLER VE KARAKTERİZASYONLARI"** adlı tez çalışması17/07/2020 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman: **Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT**
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi: **Dr. Öğr. Üyesi Burak ŞAHİNER**
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi: **Dr. Öğr. Üyesi Tuba AĞIRMAN AYDIN**
Bayburt Üniversitesi

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Nurten EMER

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ II
ŞEKİLLER DİZİNİ III
TEŞEKKÜR IV
ÖZET V
ABSTRACT VII
1. GİRİŞ 1
2. 3- BOYUTLU ÖKLİD VE MİNKOWSKİ UZAYLARINDA TEMEL TANIM VE TEOREMLER 3
3. E^3 ÖKLİD UZAYINDA KÜRESEL EĞRİLER 10
3.1. E^3 Öklid Uzayında Küresel Eğrilere Giriş 10
3.2. E^3 Öklid Uzayında Küresel Eğrileri Karakterize Eden Diferansiyel Denklemler ve İntegral Karakterizasyonları 14
3.3. E^3 Öklid Uzayında Küresel Eğriler İçin Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları 17
4. E^3 ÖKLİD UZAYINDA BİSHOP ÇATISINA GÖRE KÜRESEL EĞRİLER İÇİN DİFERANSİYEL DENKLEM KARAKTERİZASYONLARI 22
5. BİSHOP ÇATISINA GÖRE TİMELİKE KÜRESEL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONU 29
6. SONUÇ 344
KAYNAKLAR 355
ÖZGEÇMİŞ 388

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu reel vektör uzayı
E^n	n-boyutlu Öklid uzayı
E^3	3-boyutlu Öklid uzayı
$\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$	3-boyutlu Öklid uzayında Frenet-3 çatısı
κ	3-boyutlu Öklid uzayında eğrilik fonksiyonu
τ	3-boyutlu Öklid uzayında burulma fonksiyonu
k_1, k_2	3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre eğrilik fonksiyonları
$\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$	3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısı
ρ	3-boyutlu Öklid uzayında eğrilik yarıçap fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1.1 Merkezil küre üzerinde yatan $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi ……..11

Şekil 3.1.2 Küre üzerindeki eğrinin Frenet çatısı ……12

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip bana vakit ayıran, çalışmamın her aşamasında bana destek olan ve bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenimim süresince değerli bilgilerini benimle paylaşan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mustafa KAZAZ'a ve manevi desteğini benden esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Ali KONURALP'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Güven, anlayış ve desteğini daima hissettiğim tez yazma sürecinde yanımda olan sevgili eşime, aileme ve tüm sevdiklerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Nurten EMER
Manisa, 2020

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÖKLİD VE TİMELİKE BİSHOP KÜRESEL EĞRİLER VE KARAKTERİZASYONLARI

Nurten EMER

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

Diferansiyel geometrinin üzerinde durduğu en önemli konulardan birisi uzay eğrilerinin incelenmesidir. 3-boyutlu Öklid uzayında eğrileri karakterize etmek için teğet, asli normal ve binormal vektörlerinden oluşan Frenet çatısı kullanılır. Bu çatı uzay eğrileri için çalışılabilecek en iyi ortonormal çatıdır. Ayrıca bir eğrinin eğriliği ve burulması, bu eğrinin uzaydaki yerel davranışı hakkında bilgi verir. Bir eğrinin eğriliği, bu eğrinin teğet doğrudan sapma miktarını gösterir ve burulması da bu eğrinin teğet ve normal vektörlerinin belirlediği oskülatör düzlemden sapma miktarını ölçer. Genel olarak, bir uzay eğrisi, eğrilik ve burulmayı içeren bir diferansiyel denklem ile karakterize edilebilir. Bu nedenle, bir eğrinin geometrik özelliklerinin irdelenebilmesi için en azından üçüncü mertebeye kadar türevlenebilmesi gerekmektedir. Bir eğrinin bazı noktalarda eğriliği sıfırlanabilir, yani ikinci türevi sıfır olabilir. Bu durumda eğrinin daha iyi incelenebilmesi için Frenet çatısına alternatif ve onunla ilişkili olan Bishop çatısı oluşturulabilir. Frenet çatısında bulunan $\vec{T}(s)$ teğet vektörünü değiştirmeden diğer asli normal ve binormal vektörleri belli bir açı ile döndürerek Bishop çatısı veya paralel öteleme çatısı adı verilen başka bir çatı elde edilir. Buna göre Bishop çatısında $\vec{T}(s)$ vektörü aynen kalır ve bu vektöre dik düzlemde bulunan herhangi iki elemanlı $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ bazı seçilir. Bu iki vektörün türevleri sadece $\vec{T}(s)$ vektörüne bağlıdır. Dolayısıyla bir eğrinin Bishop çatısına göre birinci ve ikinci eğriliği ile bu eğrinin eğriliği ve burulması arasında bir ilişki vardır. Son

zamanlarda, Bishop çatısı kullanılarak uzay eğrilerinin birçok farklı karakterizasyonu verilmektedir. Uzay eğrilerinin en önemlilerinden birisi de küre üzerinde yatan, küresel eğrilerdir. Bu çalışmada, Frenet çatısına göre bir küresel eğrinin integral karakterizasyonları incelenmiştir. Özellikle, bir eğrinin küresel eğri olabilmesi için gerek ve yeter şart, Bishop çatısına göre birinci ve ikinci eğrilikler kullanılarak ortaya konulmuştur. Bishop çatısı kullanılarak bir küresel eğriyi karakterize eden üçüncü mertebeden bir diferansiyel denklem elde edilmiştir [29]. Aynı şekilde timelike Bishop çatı kullanılarak bir küresel eğriyi karakterize eden üçüncü mertebeden bir diferansiyel denklem elde edilmiştir [30].

Anahtar Kelimeler: Frenet 3-çatısı, Bishop çatısı, Küresel eğri, Eğrilik, Öklid iç çarpım, Timelike Bishop çatı.

2020, 38 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

EUCLIDEAN AND TIMELIKE BISHOP SPHERICAL CURVES AND THEIR CHARACTERIZATIONS

Nurten EMER

Manisa Celal Bayar University

Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

One of the most important topics of differential geometry is the study of space curves. Frenet frame consisting of tangential, principle normal and binormal vectors is used to characterize curves in 3-dimensional Euclidean space. This is the best orthonormal frame to study space curves. In addition, the curvature and torsion of a curve informs about the local behavior of this curve in space. The curvature of a curve indicates the tangential direct deviation of this curve, the torsion of the defined curve also measures the amount of deviation from the osculating plane determined by the tangent and normal vectors of this curve. In general, a space curve can be characterized by a differential equation including curvature and torsion. Fort this reason, a curve must be able to be differentiated at least up to the third order in order to fully examine it. The curvature of a curve at some points can be vanished which means that the second derivative can be zero. In this case, an alternative to the Frenet frame and associated with it that is called Bishop frame can be created for better examination of the curve. Without changing the $\vec{T}(s)$ tangent vector on the Frenet frame, another original frame called the Bishop frame or parallel translational frame is obtained by rotating the principal normal and binormal vectors at an angle. Accordingly, the vector $\vec{T}(s)$ remains in the Bishop frame, and any two element $\{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s)\}$ present in the plane perpendicular to this vector is selected. The derivatives of these two vectors are linked only to the $\vec{T}(s)$ vector. Therefore, there is a relationship between the first and second curvatures of this curve according to Bishop frame and the curvature and

torsion of this curve. Recently, many different characterizations of space curves are given using the Bishop frame. One of the most important space curves is the spherical curves lying on the sphere. In this study, integral characterizations of a spherical curve according to Frenet frame are investigated. Particularly, necessary and sufficient condition for a curve to be a spherical curve has been demonstrated by using the first and second curvatures according to the Bishop frame. A third-order differential equation is used to characterize a spherical curve using the Bishop frame [29]. Also, a third-order differential equation is used to characterize a spherical curve using timelike Bishop frame [30].

Keywords: Frenet 3-frame, Bishop frame, Spherical curve, Curvature, Euclidean inner product, Timelike Bishop frame.

2020, 38 pages

1. GİRİŞ

Temel diferansiyel geometri kitaplarında (örneğin Struik, 1961) bir eğrinin küresel olma şartı eğrinin eğrilik ve burulmasına bağlı olarak verilmiştir [1]. Wong 1963'teki makalesinde bir eğrinin küresel olması için daha kapsamlı bir formül geliştirmiştir [2]. Daha sonra Breuer ve Gottlieb 3-boyutlu Öklid uzayında küresel eğrileri karakterize eden diferansiyel denklem için bir çözüm vermiş ve eğrinin eğrilik yarıçapının burulma cinsinden karşılığını elde etmiştir [3]. Ardından Wong, Breuer ve Gottlieb in 1971 de küresel eğriler için verdiği karakterizasyonu geliştirerek daha kapsamlı hale getirmiştir [4]. Daha sonra Özdamar ve Hacısalihoğlu 1974 de küresel eğrileri n – boyutlu Öklid uzayına taşıyarak, n-boyutlu Öklid uzayında küresel eğriler için bazı karakterizasyonlar vermişlerdir [5]. Mehlum ve Wimp 3-boyutlu Öklid uzayında küresel eğriler için bir diferansiyel karakterizasyon vermiştir. Buna göre, 3-boyutlu Öklid uzayında küresel eğriler, eğrinin eğrilik ve burulmasına bağlı, 3. mertebeden değişken katsayılı lineer bir diferensiyel denklemle ifade edilebilmektedir [6]. Sezer 1989 da 4-boyutlu Öklid uzayında küresel eğriler için bir diferansiyel ve integral karakterizasyonu vermiştir [7]. Pekmen ve Paşalı 1999'da 3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı asli normali spacelike olan Lorentziyen küresel spacelike eğriler için bazı karakterizasyonlardan bahsetmiş ve birim hızlı asli normali spacelike olan spacelike bir eğrinin küresel olma şartını bulmuştur [8]. Daha sonra Petrovic-Torgasev ve Sucurovic 3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı asli normali timelike veya null olan Lorentziyen küresel spacelike eğriler için karakterizasyon vermiştir [9]. Ardından Petrovic-Torgasev ve Sucurovic 3-boyutlu Minkowski uzayında hiperbolik küre üzerindeki birim hızlı timelike, spacelike ve null eğriler için bazı karakterizasyonlardan bahsetmiştir [10]. Benzer çalışmalar devam etmiş ve Petrovic-Torgasev ve Sucurovic 2001 de 3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı Lorentziyen küresel timelike ve null eğriler için bazı karakterizasyonlar vermiştir [11]. Güner ve Ekmekçi 2012 de Bertrand eğrilerinin küresel eğrilerle olan ilişkisini ortaya koymuştur [12].

E_1^3 uzayındaki çalışmalar pek çok matematikçi tarafından incelenmiştir. [13] üzerinde Ilarslan E_1^3 uzayında helislerin karakterizasyonları üzerine çalışmıştır ve Minkowski 3-uzayında Frenet vektörlerine göre helisleri karakterize eden diferansiyel denklemleri bulmuştur. Bunun öncesinde bir eğrinin genel helis olabilmesi için sabit eğrilik ve sabit burulmaya sahip olması gerektiği bulunmuştur [14]. Buradan,

Kocayiğit Öklid 3-uzayı ve Minkowski 3-uzayında Frenet eğrilerini karakterize eden genel diferansiyel denklemleri elde etmiştir [15].

1975'te Bishop, eğrilerin paralel ötelemesi için alternatif bir çatının yani Bishop çatısının var olduğunu söylemiştir [16]. Bükçü ve Karacan Öklid 3-uzayında Bishop çatısına göre slant helisleri tanımlamışlardır [17]. Üstelik Bükçü ve Karacan Minkowski 3-uzayında Bishop çatısına göre timelike, asli normal vektörü spacelike olan spacelike eğriler ve binormal vektörü spacelike olan spacelike eğriler ile ilgili birçok çalışmada bulunmuşlardır [17].

Ayrıca Chen ve Ishikawa yarı-Öklid uzayında, Δ Laplace operatörü ve H Frenet eğrisinin eğrilik vektör alanını göstermek üzere, $\Delta H = 0$ koşulunu sağlayan eğriler yani, biharmonik eğriler üzerinde çalışmıştır [18]. Bunun ardından Kocayiğit Öklid 3-uzayında ve Minkowski 3-uzayında biharmonik eğriler ve λ sabit olmak üzere $\Delta H = \lambda H$ şartını sağlayan harmonik 1-tipli eğriler üzerinde çalışmıştır [19].

Bu tez çalışmasında Öklid 3-uzayında Bishop çatıya göre ve timelike Bishop çatıya göre küresel eğriler ve bu küresel eğriler ile ilgili karakterizasyonlar incelenmiştir. Yine küresel eğrilerin konum vektörü, bu eğrileri karakterize eden 3. mertebeden diferansiyel denklem karakterizasyonları ve integral karakterizasyonları detaylı bir şekilde incelenmiştir.

2. 3-BOYUTLU ÖKLİD VE MİNKOWSKİ UZAYLARINDA TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında iki vektör $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ve $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ olmak üzere

$$\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

eşitliğiyle tanımlanan $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $(\vec{a},\vec{b})\to\langle \vec{a},\vec{b}\rangle$ fonksiyonu , $\mathbb{R}^3$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^3$ uzayının Öklid iç çarpımı denir $[20]$.

Tanım 2.1.2. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir vektör $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ olmak üzere

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{\langle \vec{a},\vec{a}\rangle}$$

eşitliğiyle tanımlanan $\vec{a}\to\|\vec{a}\|$ fonksiyonuna, $\mathbb{R}^3$ uzayında norm denir $[20]$.

Tanım 2.1.3. $\mathbb{R}^n$ de bir açık cümle U olmak üzere bir

$$f:U\to\mathbb{R}$$

fonksiyonunun $k-$yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denir $[20]$.

Tanım 2.1.4. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim küre

$$S^2=\left\{\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, a_1^2+a_2^2+a_3^2=1\right\}$$

şeklinde tanımlanır $[21]$.

Tanım 2.1.5. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\vec{\alpha}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\vec{\mathrm{T}}(s)=\vec{\alpha}'(s)$$

eşitliği ile belirli $\vec{T}(s)$ vektörüne, $\vec{\alpha}$ eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir $[20]$.

Tanım 2.1.6. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\vec{\alpha}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\kappa:\mathrm{I}\to\mathbb{R},\quad \kappa(s)=\|\vec{\mathrm{T}}'(s)\|$$

fonksiyonuna, $\vec{\alpha}$ eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ noktasındaki eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\vec{\alpha}(s)$ noktasındaki eğriliği denir $[20]$.

Tanım 2.1.7. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\vec{\alpha}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\vec{\mathrm{N}}(s)=\frac{1}{\kappa(s)}\vec{\mathrm{T}}'(s)$$

eşitliği ile belirli $\vec{N}(s)$ vektörüne, $\vec{\alpha}$ eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ noktasındaki asli normali denir $[20]$.

Tanım 2.1.8. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\vec{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s)$$

eşitliği tanımlı $\vec{B}(s)$ vektörüne, $\vec{\alpha}$ eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ noktasındaki binormali denir $[20]$.

Tanım 2.1.9. $\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)$ vektörlerine $\vec{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir ve

$$\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$$

kümesine, $\vec{\alpha}$ eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir $[20]$.

Tanım 2.1.10. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\vec{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olmak üzere

$$\tau: I \to \mathbb{R}, \quad \tau(s) = -\langle \vec{B}'(s), \vec{N}(s) \rangle$$

fonksiyonuna, $\vec{\alpha}$ eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ noktasındaki burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\vec{\alpha}(s)$ noktasındaki burulması denir $[20]$.

Teorem 2.1.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\vec{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ eğrilik ve burulması sırasıyla κ, τ ise

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

olur. Bu eşitliklere, birim hızlı $\vec{\alpha}$ eğrisi için Frenet formülleri denir $[20]$.

Teorem 2.1.2. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı olmayan $\vec{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B},$ eğrilik ve burulması sırasıyla κ, τ olsun. $\|\alpha'\| = v$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v\kappa & 0 \\ -v\kappa & 0 & v\tau \\ 0 & -v\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

olur. Bu eşitlikler, birim hızlı olmayan $\vec{\alpha}$ eğrisi için Frenet formülleridir $[20]$.

Teorem 2.1.3. $([20])$ $\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B},$ eğrilik ve burulma fonksiyonları κ, τ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\vec{T} = \frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{\alpha}' \wedge \vec{\alpha}''}{\|\vec{\alpha}' \wedge \vec{\alpha}''\|}, \quad \vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T},$$

$$\kappa = \frac{\|\vec{\alpha}' \wedge \vec{\alpha}''\|}{\|\vec{\alpha}'\|^3}, \qquad \tau = \frac{\langle \vec{\alpha}' \wedge \vec{\alpha}'', \vec{\alpha}''' \rangle}{\|\vec{\alpha}' \wedge \vec{\alpha}''\|^2},$$

Tanım 2.1.11. $\vec{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu κ olmak üzere $\frac{1}{\kappa}$ fonksiyonuna, $\vec{\alpha}$ eğrisinin eğrilik yarıçapı fonksiyonu denir ve ρ ile gösterilir $[20]$.

Tanım 2.1.12. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir $[21]$.

Teorem 2.1.4. $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında birim hızlı $\vec{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Bishop vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ ve Bishop eğrilikleri k_1, k_2 ise

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}_1' \\ \vec{N}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

olur. Bu eşitliklere, birim hızlı $\vec{\alpha}$ eğrisi için Bishop formülleri denir $[16]$. Burada

$$\kappa(s) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \theta(s) = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right), \tau(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$$

$$k_1 = \kappa \cos\theta, \quad k_2 = \kappa \sin\theta$$

ve

$$\vec{T} = \vec{T}, \quad \vec{N}_1 = \vec{N}\cos\theta - \vec{B}\sin\theta, \quad \vec{N}_2 = \vec{N}\sin\theta + \vec{B}\cos\theta$$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 2.1.13. $\mathbb{R}^3$ standart reel vektör uzayında, Öklid iç çarpımı yerine $(-,+,+)$ işaretli

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(\vec{a}, \vec{b}) \to \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Lorentziyen iç çarpımı alınırsa $\mathbb{R}^3$ afin uzayına Minkowski 3-uzayı denir ve $\mathbb{R}^3_1$ ile gösterilir $[22]$

Tanım 2.1.14. $\mathbb{R}^3_1$ uzayında

$$\wedge = \left\{ a \in \mathbb{R}^3_1 \middle| \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0, \vec{a} \neq 0 \right\}$$

cümlesine ışık konisi adı verilir $[22]$.

Lorentziyen iç çarpımı pozitif tanımlı olmadığından, bu uzaydaki vektörler üç sınıfa ayrılır. Timelike vektörler ışık konisinin içinde, lightlike (null) vektörler ışık konisinin üzerinde ve spacelike vektörler de ışık konisinin dışında bulunurlar.

Tanım 2.1.15. $\mathbb{R}^3_1$ uzayında herhangi bir vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere;

i) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$ veya $\vec{a} = 0$ ise $\vec{a}$ ya spacelike vektör,

ii) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle < 0$ ise $\vec{a}$ ya timelike vektör,

iii) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ ve $\vec{a} \neq 0$ ise $\vec{a}$ ya lightlike (veya null) vektör denir $[22]$.

Tanım 2.1.16. $\mathbb{R}^3_1$ uzayında diferensiyellenebilir bir $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ eğrisi verilsin.

$\vec{\alpha}'(t)$, $\vec{\alpha}$ nın t deki teğet vektörü olmak üzere $\forall t \in \mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ için

$$\langle \vec{\alpha}'(t), \vec{\alpha}'(t) \rangle < 0$$

ise $\vec{\alpha}$ ya timelike eğri denir $[22]$.

Tanım 2.1.17. $\mathbb{R}^3_1$ uzayında $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ eğrisi verilsin. $\vec{\alpha}(t)$ eğrisinin binormalleri daima timelike kalıyorsa, $\vec{\alpha}(t)$ ye timelike binormalli spacelike eğri denir $[22]$.

Tanım 2.1.18. $\mathbb{R}^3_1$ uzayında $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ eğrisi verilsin. $\vec{\alpha}(t)$ eğrisinin aslinormalleri daima timelike kalıyorsa, $\vec{\alpha}(t)$ ye timelike aslinormalli spacelike eğri denir $[22]$.

Tanım 2.1.19. $\mathbb{R}^3_1$ uzayındaki bir $\vec{a}$ vektörü için $\vec{a}$ nün normu

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{|\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle|}$$

biçiminde tanımlanır. Normu 1 olan vektöre birim vektör adı verilir $[23]$.

Tanım 2.1.20. $\mathbb{R}^3_1$ uzayında iki vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olmak üzere $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin Lorentziyen vektörel çarpımı

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_1 b_3 - a_3 b_1, a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

şeklinde tanımlıdır $[22]$.

Tanım 1.1.21. $\mathbb{R}_1^3$ uzayındaki Lorentziyen ve hiperbolik birim küreler sırasıyla

$$S_1^2 = \left\{ \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}_1^3 \middle| \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1 \right\}$$

ve

$$H_0^2 = \left\{ \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}_1^3 \middle| \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = -1 \right\}$$

biçiminde tanımlanır $[22]$.

Tanım 2.1.22. i) Hiperbolik Açı: $\vec{a}$ ve $\vec{b}$, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında iki future pointing (veya past pointing) timelike vektör olsun. Bu taktirde, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cosh\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta \geq 0$ reel sayısına $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir $[23]$.

ii) Merkez Açı: $\mathbb{R}_1^3$ uzayının bir timelike alt vektör uzayını geren iki spacelike vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. Bu taktirde $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cosh\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta \geq 0$ reel sayısına $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki merkez açı denir $[23]$.

iii) Spacelike Açı: $\mathbb{R}_1^3$ uzayının bir spacelike alt vektör uzayını geren iki spacelike vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. Bu taktirde $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta \geq 0$ reel sayısına $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki spacelike açı denir $[23]$.

iv) Lorentziyen Timelike Açı: $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\vec{a}$ bir spacelike vektör ve $\vec{b}$ bir timelike vektör olsun. Bu taktirde $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sinh\theta$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta \geq 0$ reel sayısına $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açı denir $[23]$.

Teorem 2.1.5. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında birim hızlı $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}_1^3$ timelike eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$, eğrilik ve burulması sırasıyla κ, τ ise

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

olur. Burada $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = -1$, $\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = 1$, $\langle \vec{B}, \vec{B} \rangle = 1$ ve $\langle \vec{T}, \vec{N} \rangle = \langle \vec{T}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{N}, \vec{B} \rangle = 0$ şeklindedir [24].

Teorem 2.1.6. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında birim hızlı $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}_1^3$ spacelike eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$, eğrilik ve burulması sırasıyla κ, τ ise

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

olup, $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = 1$, $\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = \varepsilon$, $\langle \vec{B}, \vec{B} \rangle = -\varepsilon$ ve $\langle \vec{T}, \vec{N} \rangle = \langle \vec{T}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{N}, \vec{B} \rangle = 0$ şeklindedir. Burada ε=1 ise $\vec{\alpha}$ eğrisi timelike binormalli spacelike bir eğri, ε = -1 ise $\vec{\alpha}$ eğrisi timelike aslinormalli spacelike bir eğridir [24].

Teorem 2.1.7. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında birim hızlı olmayan $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}_1^3$ timelike eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$, eğrilik ve burulması sırasıyla κ, τ olsun. $\|\vec{\alpha}'\| = v$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v\kappa & 0 \\ v\kappa & 0 & v\tau \\ 0 & -v\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

olur [25].

Teorem 2.1.8. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında birim hızlı olmayan $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}_1^3$ spacelike eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ eğrilik ve burulması sırasıyla κ, τ ise

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v\kappa & 0 \\ -\varepsilon v\kappa & 0 & v\tau \\ 0 & v\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \qquad (2.7)$$

olur. Burada ε =1 ise $\vec{\alpha}$ eğrisi timelike binormalli spacelike bir eğri, ε = -1 ise $\vec{\alpha}$ eğrisi timelike aslinormalli spacelike bir eğridir [25].

Teorem 2.1.9. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında birim hızlı $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}_1^3$ timelike eğrisinin Bishop vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ ve Bishop eğrilikleri k_1, k_2 ise

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}_1' \\ \vec{N}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

olur. Burada

$$\kappa(s)=\sqrt{k_1^2+k_2^2}\ ,\ \ \theta(s)=\arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right),\ \ \tau(s)=\frac{d\theta(s)}{ds}$$

$$k_1=\kappa\cos\theta\ ,\ \ k_2=\kappa\sin\theta$$

ve

$$\vec{\mathrm{T}}=\vec{\mathrm{T}}\ ,\ \ \vec{\mathrm{N}}_1=\vec{\mathrm{N}}\cos\theta-\vec{\mathrm{B}}\sin\theta\ ,\ \ \vec{\mathrm{N}}_2=\vec{\mathrm{N}}\sin\theta+\vec{\mathrm{B}}\cos\theta$$

eşitlikleri sağlanır $[26]$.

Teorem 2.1.10. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında birim hızlı $\vec{\alpha}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}_1^3$ spacelike eğrisinin Bishop vektör alanları $\vec{\mathrm{T}},\vec{\mathrm{N}}_1,\vec{\mathrm{N}}_2$ ve Bishop eğrilikleri k_1,k_2 ise

$$\begin{bmatrix}\vec{\mathrm{T}}'\\ \vec{\mathrm{N}}_1'\\ \vec{\mathrm{N}}_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & k_1 & -k_2\\ \varepsilon k_1 & 0 & 0\\ \varepsilon k_2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\mathrm{T}}\\ \vec{\mathrm{N}}_1\\ \vec{\mathrm{N}}_2\end{bmatrix}\qquad(2.9)$$

olup $\langle\vec{\mathrm{T}},\vec{\mathrm{T}}\rangle=1$, $\langle\vec{\mathrm{N}},\vec{\mathrm{N}}\rangle=-\varepsilon$, $\langle\vec{\mathrm{B}},\vec{\mathrm{B}}\rangle=\varepsilon$. Burada ε=1 ise $\vec{\alpha}$ eğrisi timelike asli normalli spacelike bir eğri, $\varepsilon=-1$ ise $\vec{\alpha}$ eğrisi timelike binormalli spacelike bir eğridir. Ayrıca

$$\kappa(s)=\sqrt{\left|k_1^2-k_2^2\right|}\ ,\ \ \theta(s)=\arctan h\left(\frac{k_2}{k_1}\right),\ \ \tau(s)=\frac{d\theta(s)}{ds}$$

$$k_1=\kappa\cosh\theta\ ,\ \ k_2=\kappa\sinh\theta$$

ve

$$\vec{\mathrm{T}}=\vec{\mathrm{T}}\ ,\ \ \vec{\mathrm{N}}_1=\vec{\mathrm{N}}\cosh\theta-\vec{\mathrm{B}}\sinh\theta\ ,\ \ \vec{\mathrm{N}}_2=-\vec{\mathrm{N}}\sinh\theta+\vec{\mathrm{B}}\cosh\theta$$

eşitlikleri sağlanır $[27,28]$.

3. E^3 ÖKLİD UZAYINDA KÜRESEL EĞRİLER

3.1. E^3 Öklid Uzayında Küresel Eğrilere Giriş

Bu bölümde Öklid 3-uzayında küresel eğri tanımı, Öklid 3-uzayında bir eğrinin küresel olma şartı ve oskülatör küre ile ilgili teoremler verilecektir.

Teorem 3.1.1: Bir $\alpha : I \to E^3$ eğrisi bir $S^2 \subset E^3$ birim küresi üzerinde yatıyorsa bu eğriye bir küresel eğri denir. Bir eğri bir küre üzerinde yatıyorsa bu eğrinin her noktasındaki normal düzlemi kürenin merkezinden geçer $[20,21]$.

Teorem 3.1.2: S_0^2 , O merkezli bir küre ve $M \subset S_0^2$ bir küresel eğri olmak üzere, M eğrisinin bir koordinat komşuluğu (I,α) ve $s \in I$ yay parametresi için;

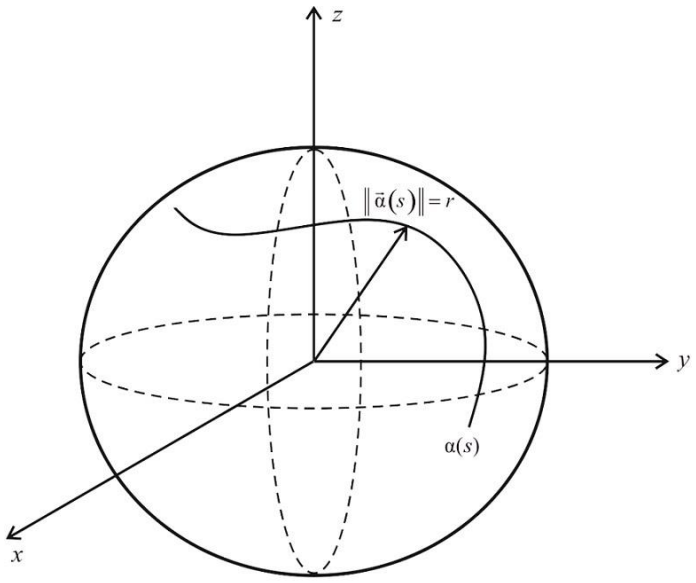
$$\begin{aligned} \langle \alpha(s), \vec{T}(s) \rangle &= -m_1(s) \\ \langle \alpha(s), \vec{N}(s) \rangle &= -m_2(s) \\ \langle \alpha(s), \vec{B}(s) \rangle &= -m_3(s) \end{aligned} \qquad (3.1.1)$$

şeklindedir. Burada $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$, M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısıdır $[21]$.

İspat : $M \subset S_0^2$ küresel eğrisi alalım. M için bir koordinat komşuluğu (I,α) ve $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\forall s \in I$ için $\alpha(s) \in S_0^2$ olur. Bu durumda S_0^2 küresinin yarıçapı r olmak üzere,

$$\begin{aligned} \left\| \overrightarrow{O\alpha}(s) \right\| &= \left\| \vec{\alpha}(s) \right\| = r \\ \sqrt{\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle} &= r \\ \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle &= r^2 \end{aligned} \qquad (3.1.2)$$

şeklinde yazılır.



Şekil 3.1.1. Merkezil küre üzerinde yatan $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi

$(3.1.2)$ eşitliğinin her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa,

$$\langle \vec{\alpha}'(s), \vec{\alpha}(s) \rangle = 0,$$

$$\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \vec{\alpha}(s) \rangle = 0 \qquad (3.1.3)$$

olur. Ayrıca M küresel eğrisi üzerinde bir $\alpha(s)$ noktası alınırsa küresel eğrinin konum vektörü,

$$\overrightarrow{\alpha(s)O} = m_1(s)\vec{\mathrm{T}}(s) + m_2(s)\vec{\mathrm{N}}(s) + m_3(s)\vec{\mathrm{B}}(s),$$

$$-\vec{\alpha}(s) = m_1(s)\vec{\mathrm{T}}(s) + m_2(s)\vec{\mathrm{N}}(s) + m_3(s)\vec{\mathrm{B}}(s),$$

$$\vec{\alpha}(s) = -m_1(s)\vec{\mathrm{T}}(s) - m_2(s)\vec{\mathrm{N}}(s) - m_3(s)\vec{\mathrm{B}}(s), \qquad (3.1.4)$$

şeklindedir. Bu eşitliği herhangi bir A merkezli küre için,

$$\overrightarrow{\alpha(s)A} = m_1(s)\vec{\mathrm{T}}(s) + m_2(s)\vec{\mathrm{N}}(s) + m_3(s)\vec{\mathrm{B}}(s), \qquad (3.1.5)$$

şeklinde yazabiliriz.

$(3.1.4)$ denkleminin her iki tarafına $\vec{\mathrm{T}}(s)$ ile iç çarpım uygulanırsa,

$$\langle \vec{\alpha}(s), \vec{\mathrm{T}}(s) \rangle = -m_1(s)\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \vec{\mathrm{T}}(s) \rangle - m_2(s)\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \vec{\mathrm{N}}(s) \rangle - m_3(s)\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \vec{\mathrm{B}}(s) \rangle,$$

$$\langle \vec{\alpha}(s), \vec{\mathrm{T}}(s) \rangle = -m_1(s), \qquad (3.1.6)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $(3.1.4)$ denkleminin her iki tarafına sırasıyla $\vec{\mathrm{N}}(s)$ ve $\vec{\mathrm{B}}(s)$ vektörleri ile iç çarpım uygulanırsa,

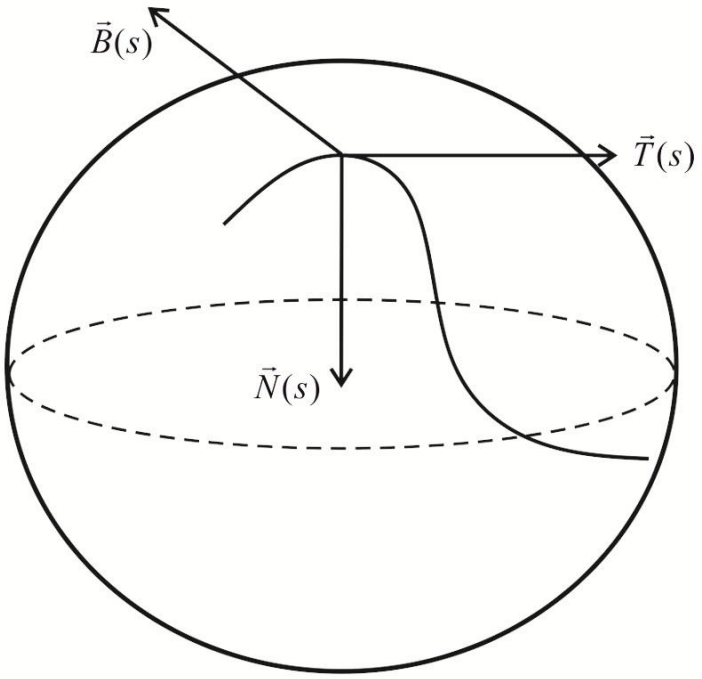
$$\langle \vec{\alpha}(s), \vec{\mathrm{N}}(s) \rangle = -m_1(s)\langle \vec{\mathrm{N}}(s), \vec{\mathrm{T}}(s) \rangle - m_2(s)\langle \vec{\mathrm{N}}(s), \vec{\mathrm{N}}(s) \rangle - m_3(s)\langle \vec{\mathrm{N}}(s), \vec{\mathrm{B}}(s) \rangle$$

$$\langle \vec{\alpha}(s), \vec{\mathrm{N}}(s) \rangle = -m_2(s) \qquad (3.1.7)$$

$$\left\langle \vec{\alpha}(s), \vec{\mathrm{B}}(s) \right\rangle = -m_1(s)\left\langle \vec{\mathrm{B}}(s), \vec{\mathrm{T}}(s) \right\rangle - m_2(s)\left\langle \vec{\mathrm{B}}(s), \vec{\mathrm{N}}(s) \right\rangle - m_3(s)\left\langle \vec{\mathrm{B}}(s), \vec{\mathrm{B}}(s) \right\rangle$$

$$\left\langle \vec{\alpha}(s), \vec{\mathrm{B}}(s) \right\rangle = -m_3(s) \qquad (3.1.8)$$

eşitlikleri bulunup, ispat tamamlanmış olur. ■



Şekil 3.1.2. Küre üzerindeki eğrinin Frenet çatısı

Teorem 3.1.3: O merkezli bir küresel eğrinin konum vektörü,

$$\vec{\alpha}(s) = -\frac{1}{\kappa(s)}\vec{\mathrm{N}}(s) - \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)' \frac{1}{\tau(s)}\vec{\mathrm{B}}(s) \qquad (3.1.9)$$

şeklindedir $[9]$.

İspat: $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}^3$ bir küresel eğri olsun ve $s \in \mathrm{I}$ yay parametresi olsun. Amacımız $(3.1.4)$ denklemindeki $m_1(s), m_2(s), m_3(s)$ değerlerinin eşitliklerini bulmaktır. Daha önce elde ettiğimiz $(3.1.3)$ denklemindeki $\left\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \vec{\alpha}(s) \right\rangle = 0$ ve $(3.1.6)$ denklemindeki $\left\langle \alpha(s), \vec{\mathrm{T}}(s) \right\rangle = -m_1(s)$, eşitliklerinden

$$-m_1 = \left\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \vec{\alpha}(s) \right\rangle = 0, \qquad (3.1.10)$$

elde edilir. $(3.1.3)$ eşitliğinin her iki tarafının s'ye göre türevi alındığında,

$$\left\langle \vec{\mathrm{T}}'(s), \alpha(s) \right\rangle + \left\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \alpha'(s) \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \kappa(s)\vec{\mathrm{N}}(s), \alpha(s) \right\rangle + 1 = 0$$

$$\kappa(s)\left\langle \vec{\mathrm{N}}(s), \alpha(s) \right\rangle = -1$$

$$\left\langle \vec{\mathrm{N}}(s), \alpha(s) \right\rangle = \frac{-1}{\kappa(s)}, \qquad (3.1.11)$$

$$m_2(s) = -\left\langle \alpha(s), \vec{\mathrm{N}}(s) \right\rangle = \frac{1}{\kappa(s)}, \qquad (3.1.12)$$

bulunur. $(3.1.11)$ denkleminin her iki tarafının s'ye göre türevi alınırsa;

$$\left\langle \vec{\mathrm{N}}'(s), \alpha(s) \right\rangle + \left\langle \vec{\mathrm{N}}(s), \alpha'(s) \right\rangle = \left(\frac{-1}{\kappa(s)} \right)'$$

$$\left\langle -\kappa(s)\vec{\mathrm{T}}(s) + \tau(s)\vec{\mathrm{B}}(s), \alpha(s) \right\rangle = \left(\frac{-1}{\kappa(s)} \right)'$$

$$-\kappa(s)\left\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \alpha(s) \right\rangle + \tau(s)\left\langle \vec{\mathrm{B}}(s), \alpha(s) \right\rangle = \left(\frac{-1}{\kappa(s)} \right)'$$

elde edilir. Elde edilen bu denklemde $(3.1.3)$ ve $(3.1.8)$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$m_3(s) = \left(\frac{1}{\kappa(s)} \right)' \frac{1}{\tau(s)}, \qquad (3.1.13)$$

bulunur. Bulunan $m_1(s), m_2(s), m_3(s)$ değerleri $(3.1.4)$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\vec{\alpha}(s) = -\frac{1}{\kappa(s)}\vec{\mathrm{N}}(s) - \left(\frac{1}{\kappa(s)} \right)' \frac{1}{\tau(s)}\vec{\mathrm{B}}(s)$$

denklemi elde edilir, böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.1.4: O merkezli bir küre $S_0^2 \subset \mathrm{E}^3$ olsun. Bir $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}^3$, $\alpha(\mathrm{I}) \subset S_0^2$ küresel eğrisinin her noktasındaki oskülatör küresi S_0^2 dir $[21]$.

Teorem 3.1.5: $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}^3$ bir eğri olsun. $m_3(s) \neq 0,\ \tau(s) \neq 0$ olmak üzere $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\alpha(s)$ noktasında oskülatör kürelerin yarıçaplarının sabit olması için gerek ve yeter şart oskülatör kürelerin merkezlerinin aynı olmasıdır $[21]$.

Teorem 3.1.6: $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}^3$ bir eğri ve $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\tau(s) \neq 0,\ m_3(s) \neq 0$ olsun. α bir küresel eğridir ancak ve ancak $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör kürenin merkezleri aynıdır $[21]$.

İspat: Eğer α eğrisi bir küresel eğri ise α eğrisinin her $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör küresi α eğrisinin üzerinde bulunduğu küre olacağından ispat tamamlanır.

Tersine, $s \in I$ noktasındaki oskülatör kürelerin merkezleri sabit bir b noktası ise bu takdirde Teorem 3.1.4 gereğince oskülatör kürelerin yarıçapları da aynı bir r sabitine eşittir. Dolayısıyla her $\alpha(s)$ noktası için $\alpha(s)$ noktasının b noktasına olan uzaklığı r dir. Bu ise α eğrisinin bir küresel eğri olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

3.2. E^3 Öklid Uzayında Küresel Eğrileri Karakterize Eden Diferansiyel Denklemler ve İntegral Karakterizasyonları

Bu bölümde, E^3 Öklid uzayında küresel eğrileri karakterize eden diferansiyel denklemler ve integral karakterizasyonları ile ilgili temel teoremler verilmiştir.

Teorem 3.2.1 (Küresel eğrileri karakterize eden teorem): $\alpha : I \to E^3$ bir eğri olsun. Bu durumda, $\forall s \in I$ yay parametresi ve $\tau(s) \neq 0$, $m_3(s) \neq 0$ olmak üzere, α eğrisinin küresel bir eğri olması için gerek ve yeter şart $m_3'(s) + m_2(s)\tau(s) = 0$ olmasıdır $[21]$.

İspat: A merkezli $\alpha : I \to E^3$ küresel eğrisi verilsin. Bu durumda $m_3'(s) + m_2(s)\tau(s) = 0$ olduğunu gösterelim.

$\alpha(I)$, A merkezli bir küresel eğri ise α eğrisinin konum vektörü;

$$\overrightarrow{A(s)\alpha(s)} = \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\vec{N}(s) + \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)'\left(\frac{1}{\tau(s)}\right)\vec{B}(s)$$

şeklindedir ve Teorem 3.1.5 gereğince $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör kürenin merkezleri aynıdır. Ayrıca Teorem 3.1.4'e dayanarak oskülatör kürenin yarıçaplarının sabit olduğunu söyleyebiliriz. Öte yandan,

$$\overrightarrow{\alpha(s)A(s)} = (m_1, m_2, m_3)$$

ve

$$\left\|\overrightarrow{\alpha(s)A(s)}\right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{\alpha(s)A(s)}, \overrightarrow{\alpha(s)A(s)} \right\rangle} = r$$

eşitliklerinden,

$$r^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$

eşitliği elde edilir. $(3.1.10)$ gereğince $m_1 = 0$ olduğunu biliyoruz, elde edilen bu denklemin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa;

$$m_2(s)m_2'(s) + m_3(s)m_3'(s) = 0$$

elde edilir. Burada $m_3(s)=m_2'(s)\left(\frac{1}{\tau(s)}\right)$ eşitliği yerine yazılırsa;

$$m_2(s)m_2'(s)+m_2'(s)\frac{1}{\tau(s)}m_3'(s)=0$$

$$m_2'(s)\left(m_2(s)+\frac{1}{\tau(s)}m_3'(s)\right)=0$$

$$\left(m_2(s)+\frac{1}{\tau(s)}m_3'(s)\right)=0$$

$$\tau(s)m_2(s)+m_3'(s)=0$$

eşitliği bulunur. Şimdi aksine $m_2(s)\tau(s)+m_3'(s)=0$ olsun. Bu durumda Teorem 3.1.5 gereği oskülatör kürenin yarıçapları sabit olduğundan $\forall s\in I$ için $\alpha(s)$ oskülatör kürenin merkezleri aynıdır. Teorem 3.1.6 gereği de α eğrisi küreseldir.■

Teorem 3.2.2: E^3 de yay parametresiyle verilmiş bir eğri $\alpha(s)$ olsun. $\alpha(s)$ küreseldir ancak ve ancak $\kappa>0$ ve

$$f\tau=\left(\frac{1}{\kappa}\right)', \qquad f'+\frac{\tau}{\kappa}=0$$

olacak şekilde bir $f:\alpha\subset E^3\to\mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyon vardır $[2,21]$.

İspat: $\alpha(s)$ küresel eğri olsun. Bu durumda;

$$A(s)=\alpha(s)+\frac{1}{\kappa}\vec{N}+\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{\tau}\vec{B}$$

olur ve bu eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alındığında

$$\vec{T}+\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\vec{N}+\frac{1}{\kappa}\vec{N}'+\left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{\tau}\right]'\vec{B}+\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{\tau}\vec{B}'=0$$

$$\vec{T}+\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\vec{N}+\frac{1}{\kappa}\left(-\kappa\vec{T}+\tau\vec{B}\right)+\left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{\tau}\right]'\vec{B}+\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{\tau}\left(-\tau\vec{N}\right)=0$$

$$\left\{\frac{\tau}{\kappa}+\left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{\tau}\right]'\right\}\vec{B}=0$$

$$\frac{\tau}{\kappa}+\left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{\tau}\right]'=0$$

bulunur. $f=\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{\tau}$ olduğunda

$$\tau f=\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \text{ ve } f'+\frac{\tau}{\kappa}=0$$

elde edilir. Burada $f:\alpha\subset \mathrm{E}^3\to$ diferansiyellenebilir fonksiyondur. ■

Teorem 3.2.3: E^3 deki $\alpha(s)$ eğrisinin küresel olması için gerek ve yeter şart, A ve B sabitler olmak üzere;

$$\kappa\left[A\cos\left(\int_0^s \tau ds\right)+B\sin\left(\int_0^s \tau ds\right)\right]=1$$

eşitliğinin sağlanmasıdır $[2,21]$.

İspat: $\alpha(s)$ küresel eğri olsun ve bu kürenin yarıçapı $r=a$ alalım. Daha önce elde ettiğimiz $m_2^2+m_3^3=r^2$ eşitliğinden,

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{\tau}\right]^2=a^2$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde $y=\frac{1}{\kappa}$, olarak alınırsa

$$(y)^2+(y')^2\left(\frac{1}{\tau}\right)^2=a^2$$

$$(y')^2=\tau^2\left(a^2-y^2\right)$$

$$y'=\pm\tau\sqrt{a^2-y^2}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{dy}{ds}=\tau\sqrt{a^2-y^2},$$

$$\frac{dy}{ds}=-\tau\sqrt{a^2-y^2},$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradaki diferansiyel denklemler sırayla çözüldüğünde

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=\tau ds$$

olur ve ayrıca integral formüllerinden,

$$\int\frac{du}{a^2-u^2}=\arcsin\frac{u}{a}+c,$$

$$\int\frac{du}{a^2-u^2}=-\arccos\frac{u}{a}+c$$

olduğu bilindiği için,

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = \tau ds$$

$$\arcsin\frac{y}{a} = \int_0^s \tau ds$$

ve

$$\frac{y_1}{a} = \sin\left(\int_0^s \tau ds\right)$$

$$y_1 = a\sin\left(\int_0^s \tau ds\right)$$

bulunur. Benzer biçimde

$$\frac{dy_2}{\sqrt{a^2-y^2}} = -\tau ds$$

$$-\arccos\frac{y_2}{a} = -\int_0^s \tau ds$$

$$\frac{y_2}{a} = \cos\left(\int_0^s \tau ds\right)$$

$$y_2 = a\cos\left(\int_0^s \tau ds\right)$$

elde edilir. $y = \frac{1}{\kappa}$ denkleminin çözümü;

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y = c_1 a\sin\left(\int_0^s \tau ds\right) + c_2 a\cos\left(\int_0^s \tau ds\right)$$

$c_1 a = B$, $c_2 a = A$, olarak alındığında

$$y = B\sin\left(\int_0^s \tau ds\right) + A\cos\left(\int_0^s \tau ds\right)$$

$$1 = \kappa\left\{A\cos\left(\int_0^s \tau ds\right) + B\sin\left(\int_0^s \tau ds\right)\right\}$$

elde edilir. ■

3.3. E^3 Öklid Uzayında Küresel Eğriler İçin Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları

Bu bölümde, küresel eğriyi karakterize eden diferansiyel denklem ve küre yarıçapını veren formül ile ilgili teoremler verilmiştir.

Teorem 3.3.1: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^3$ küresel eğriyi karakterize eden diferansiyel denklem,

$$\lambda_1\alpha'''(s)+\lambda_2\alpha''(s)+\lambda_3\alpha'(s)+\lambda_4\alpha(s)=0 \qquad (3.3.1)$$

şeklindedir ve buradaki $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ ve λ_4 değerleri;

$$\lambda_1=\kappa\kappa',$$
$$\lambda_2=-\left(\kappa^2\tau^2+(\kappa')^2\right),$$
$$\lambda_3=\kappa^3\kappa',$$
$$\lambda_4=-\kappa^4\tau^2$$

eşitlikleri ile verilir $[6]$.

İspat: $\alpha(s)$ yay uzunluğu parametreli bir eğri olsun.

$$\langle\alpha(s),\alpha(s)\rangle=\|\alpha(s)\|.\|\alpha(s)\|.\cos 0=r^2$$
$$\langle\alpha,\alpha\rangle=r^2$$

ve burada r kürenin yarıçapıdır. $\alpha(s)$ eğrisinin konum vektörü

$$\vec{\alpha}(s)=c_1\vec{\mathrm{T}}(s)+c_2(s)\vec{\mathrm{N}}(s)+c_3(s)\vec{\mathrm{B}}(s), \qquad (3.3.2)$$

olsun. $\langle\alpha(s),\alpha(s)\rangle=r^2$ eşitliğinin her iki tarafının s'ye göre türevi alındığında

$$\langle\vec{\mathrm{T}}(s),\alpha(s)\rangle=0,$$

$(3.3.3)$

olur. $(3.3.3)$ eşitliğinin iki tarafının s'ye göre türevi alındığında,

$$\langle\vec{\mathrm{T}}'(s),\alpha(s)\rangle+\langle\vec{\mathrm{T}}(s),\alpha'(s)\rangle=0$$
$$\langle\kappa\,\vec{\mathrm{N}}(s),\alpha(s)\rangle+\langle\vec{\mathrm{T}}(s),\vec{\mathrm{T}}(s)\rangle=0$$
$$\kappa\langle\vec{\mathrm{N}}(s),\alpha(s)\rangle+1=0$$
$$\langle\vec{\mathrm{N}}(s),\alpha(s)\rangle=\frac{-1}{\kappa} \qquad (3.3.4)$$

olur. $(3.3.4)$ eşitliğinin iki tarafının s'ye göre tekrar türevi alındığında

$$\langle\vec{\mathrm{N}}'(s),\alpha(s)\rangle+\langle\vec{\mathrm{N}}(s),\alpha'(s)\rangle=-\left(\frac{1}{\kappa}\right)'$$
$$\langle-\kappa\,\vec{\mathrm{T}}(s)+\tau\,\vec{\mathrm{B}}(s),\alpha(s)\rangle+\langle\vec{\mathrm{N}}(s),\vec{\mathrm{T}}(s)\rangle=\frac{\kappa'}{\kappa^2}$$
$$-\kappa\langle\vec{\mathrm{T}}(s),\alpha(s)\rangle+\tau\langle\vec{\mathrm{B}}(s),\alpha(s)\rangle+\langle\vec{\mathrm{N}}(s),\vec{\mathrm{T}}(s)\rangle=\frac{\kappa'}{\kappa^2}$$

bulunur. Bulduğumuz bu denklemde $\langle\vec{\mathrm{T}}(s),\alpha(s)\rangle=0$ ve $\langle\vec{\mathrm{N}}(s),\vec{\mathrm{T}}(s)\rangle=0$ eşitlikleri
yerine yazılırsa

$$\langle\vec{\mathrm{B}}(s),\alpha(s)\rangle=\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} \qquad (3.3.5)$$

elde edilir. Şimdi de $(3.3.2)$ denkleminin her iki tarafının s'ye göre türevi alınarak Frenet türev formülleri uygulanırsa;

$$\alpha'(s)=c_1'\,\vec{\mathrm{T}}(s)+c_1\left(\kappa\,\vec{\mathrm{N}}(s)\right)+c_2'\,\vec{\mathrm{N}}(s)+c_2\left(-\kappa\,\vec{\mathrm{T}}(s)+\tau\,\vec{\mathrm{B}}(s)\right)+c_3'\,\vec{\mathrm{B}}(s)+$$
$$c_3\left(-\tau\,\vec{\mathrm{N}}(s)\right)$$
$$\vec{\mathrm{T}}(s)=\left(c_1'-\kappa c_2\right)\vec{\mathrm{T}}(s)+\left(\kappa c_1+c_2'-\tau c_3\right)\vec{\mathrm{N}}(s)+\left(\tau c_2+c_3'\right)\vec{\mathrm{B}}(s)$$

ve buradan

$$1=c_1'-\kappa c_2, \qquad 0=\kappa c_1+c_2'-\tau c_3$$

olduğundan

$$0=\tau c_2+c_3', \tag{3.3.6}$$

elde edilir. $(3.3.2)$ ve $(3.3.3)$ eşitliklerinden;

$$\left\langle\vec{\mathrm{T}}(s),\lambda_1(s)\vec{\mathrm{T}}(s)+\lambda_2(s)\vec{\mathrm{N}}(s)+\lambda_3(s)\vec{\mathrm{B}}(s)\right\rangle=0,$$
$$c_1(s)\left\langle\vec{\mathrm{T}}(s),\vec{\mathrm{T}}(s)\right\rangle+c_2(s)\left\langle\vec{\mathrm{T}}(s),\vec{\mathrm{N}}(s)\right\rangle+c_3(s)\left\langle\vec{\mathrm{T}}(s),\vec{\mathrm{B}}(s)\right\rangle=0$$
$$c_1(s)=0$$

bulunur. Elde edilen bu eşitlik $(3.3.6)$ denkleminde kullanılırsa;

$$1=c_1'-\kappa c_2$$
$$1=0-\kappa c_2(s)$$
$$c_2(s)=\frac{-1}{\kappa} \tag{3.3.7}$$
$$0=c_2'(s)-\tau c_3(s)$$
$$c_3(s)=\frac{c_2'(s)}{\tau}=\frac{-1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \tag{3.3.8}$$

ve

$$0=\tau c_2+c_3'$$
$$0=\frac{-\tau}{\kappa}-\left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'$$

olur. Sonuç olarak, bir eğrinin küresel olma şartı;

$$\frac{\tau}{\kappa}+\left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'=0 \tag{3.3.9}$$

veya

$$\frac{\tau}{\kappa}-\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)'=0 \tag{3.3.10}$$

elde edilir. Şimdi $\alpha'(s)=\vec{T}(s)$ eşitliğinin her iki tarafının s'ye göre türevi alınarak Frenet türev formülleri uygulanırsa;

$$\alpha''(s)=\vec{T}'(s)=\kappa\vec{N}(s)$$

$(3.3.11)$

$$\vec{N}(s)=\frac{1}{\kappa}\alpha''(s) \qquad (3.3.12)$$

bulunur. $(3.3.11)$ eşitliğinin her iki tarafının s'ye göre tekrar türevi alınarak Frenet türev formülleri uygulanırsa;

$$\alpha'''(s)=\kappa'\,\vec{N}(s)+\kappa\left(-\kappa\,\vec{T}(s)+\tau\,\vec{B}(s)\right)$$

$$\alpha'''(s)=\kappa'\,\vec{N}(s)-\kappa^2\,\vec{T}(s)+\kappa\tau\,\vec{B}(s)$$

$$\alpha'''(s)=\frac{\kappa'}{\kappa}\alpha''(s)-\kappa^2\alpha'(s)+\kappa\tau\,\vec{B}(s)$$

$$\vec{B}(s)=\frac{1}{\kappa\tau}\alpha'''(s)-\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\alpha''(s)+\frac{\kappa}{\tau}\alpha'(s)$$

olur. $\alpha(s)=c_1(s)\vec{T}(s)+c_2(s)\vec{N}(s)+c_3(s)\vec{B}(s)$ eşitliğinde bulunan tüm değerler yerine yazılırsa;

$$\alpha(s)=\frac{-1}{\kappa}\vec{N}(s)+\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\vec{B}(s)$$

$$\alpha(s)=\frac{-1}{\kappa}\left(\frac{1}{\kappa}\alpha''(s)\right)+\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\left(\frac{1}{\kappa\tau}\alpha'''(s)-\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\alpha''(s)+\frac{\kappa}{\tau}\alpha'(s)\right)$$

$$\alpha(s)=\frac{-1}{\kappa^2}\alpha''(s)+\frac{\kappa'}{\kappa^3\tau^2}\alpha'''(s)-\frac{(\kappa')^2}{\kappa^4\tau^2}\alpha''(s)+\frac{\kappa'\kappa}{\kappa^2\tau^2}\alpha'(s) \qquad (3.3.14)$$

elde edilir ve $(3.3.14)$ eşitliğinin her iki tarafı $\kappa^4\tau^2$ ile çarpıldığında

$$\kappa^4\tau^2\alpha(s)=-\kappa^2\tau^2\alpha''(s)+\kappa\kappa'\alpha'''(s)-(\kappa')^2\alpha''(s)+\kappa^3\kappa'\alpha'(s)$$

$$\kappa\kappa'\alpha'''(s)-\left(\kappa^2\tau^2+(\kappa')^2\right)\alpha''(s)+\kappa^3\kappa'\alpha'(s)-\kappa^4\tau^2\alpha(s)=0$$

$(3.3.15)$

olur ve teorem ispatlanmış olur. ■

Teorem 3.3.2: $\alpha(s):I\subset\mathbb{R}\to E^3$ biçiminde bir küresel eğri olmak üzere kürenin yarıçapı

$$r^2=\frac{1}{\kappa^2}+\frac{(\kappa')^2}{\kappa^4\tau^2} \qquad (3.3.16)$$

şeklindedir $[6]$.

İspat: $\alpha(s):I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ biçiminde bir küresel eğri olsun. O halde

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = r^2 \qquad (3.3.17)$$

eşitliğini yazabiliriz ve $(3.3.17)$ denkleminin her iki tarafının s'ye göre türevi alındığında,

$$\langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle + \langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0$$

olduğundan

$$\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \qquad (3.3.18)$$

olur. Bulunan bu $(3.3.18)$ eşitliğinin s'ye göre türevi alındığında,

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha(s), \alpha''(s) \rangle = 0$$
$$1 + \langle \alpha(s), \alpha''(s) \rangle = 0$$
$$\langle \alpha(s), \alpha''(s) \rangle = -1 \qquad (3.3.19)$$

elde edilir. Son defa bulunan $(3.3.19)$ eşitliğinin s'ye göre türevi alındığında,

$$\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle + \langle \alpha(s), \alpha'''(s) \rangle = 0$$
$$\langle \alpha(s), \alpha'''(s) \rangle = 0$$
$$\langle \vec{T}(s), \vec{T}'(s) \rangle + \langle \alpha(s), \alpha'''(s) \rangle = 0$$
$$\langle \vec{T}(s), \kappa \vec{N}(s) \rangle + \langle \alpha(s), \alpha'''(s) \rangle = 0$$
$$\kappa \langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \rangle + \langle \alpha(s), \alpha'''(s) \rangle = 0$$
$$\langle \alpha(s), \alpha'''(s) \rangle = 0 \qquad (3.3.20)$$

olur. $(3.3.15)$ eşitliğinin her iki tarafına $\alpha(s)$ ile iç çarpım uygulanır ve bulunan $(3.3.17)$, (3.3.18), (3.3.19) ve (3.3.20) eşitlikleri yerine yazılırsa;

$$\kappa\kappa' \langle \alpha(s), \alpha'''(s) \rangle - \left(\kappa^2\tau^2 + (\kappa')^2 \right) \langle \alpha(s), \alpha''(s) \rangle$$
$$+ \kappa^3\kappa' \langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle - \kappa^4\tau^2 \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = 0$$
$$\kappa^4\tau^2 r^2 = \kappa^2\tau^2 + (\kappa')^2$$
$$r^2 = \frac{1}{\kappa^2} + \frac{(\kappa')^2}{\kappa^4\tau^2}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur. ■

4. E^3 ÖKLİD UZAYINDA BİSHOP ÇATISINA GÖRE KÜRESEL EĞRİLER İÇİN DİFERANSİYEL DENKLEM KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre küresel eğriler için diferansiyel denklem karakterizasyonlarını inceleyeceğiz.

Teorem 4.1: $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \to E^3$ yay uzunluğu parametresi s olan bir küresel eğri olsun. Eğer $\alpha = \alpha(s) = c_1\vec{T}(s) + c_2\vec{N}_1(s) + c_3\vec{N}_2(s)$ bir küresel eğri belirtiyorsa Bishop çatısına göre, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere küresel eğrilikleri arasındaki bağıntı

$$c_2k_1 + c_3k_2 = -1$$

şeklindedir $[29]$.

İspat: $\alpha(s)$, E^3 de yay uzunluğu parametresi s olan birim hızlı bir küresel eğri olsun. Bu eğrinin konum vektörü,

$$\alpha(s) = c_1\vec{T}(s) + c_2\vec{N}_1(s) + c_3\vec{N}_2(s) \qquad (4.1)$$

şeklindedir. (4.1) denkleminin her iki tarafını sırasıyla $\vec{T}(s), \vec{N}_1(s)$ ve $\vec{N}_2(s)$ ile iç çarpım uygulandığında

$$\langle \vec{T}(s), \alpha(s) \rangle = c_1 \langle \vec{T}(s), \vec{T}(s) \rangle + c_2 \langle \vec{T}(s), \vec{N}_1(s) \rangle + c_3 \langle \vec{T}(s), \vec{N}_2(s) \rangle,$$

$$c_1 = \langle \vec{T}(s), \alpha(s) \rangle \qquad (4.2)$$

$$\langle \vec{N}_1(s), \alpha(s) \rangle = c_1 \langle \vec{N}_1(s), \vec{T}(s) \rangle + c_2 \langle \vec{N}_1(s), \vec{N}_1(s) \rangle + c_3 \langle \vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s) \rangle$$

$$c_2 = \langle \vec{N}_1(s), \alpha(s) \rangle \qquad (4.3)$$

$$\langle \vec{N}_2(s), \alpha(s) \rangle = c_1 \langle \vec{N}_2(s), \vec{T}(s) \rangle + c_2 \langle \vec{N}_2(s), \vec{N}_1(s) \rangle + c_3 \langle \vec{N}_2(s), \vec{N}_2(s) \rangle,$$

$$c_3 = \langle \vec{N}_2(s), \alpha(s) \rangle \qquad (4.4)$$

bulunur. $(3.3.17)$ ve $(3.3.18)$ eşitliklerinden

$$\langle \vec{T}(s), \alpha(s) \rangle = 0 \qquad (4.5)$$

elde edilir. O halde (4.2) eşitliğinden $c_1 = 0$ bulunur. (4.5) eşitliğinin s parametresine göre türevi alındığında

$$\langle \vec{T}'(s), \alpha(s) \rangle + \langle \vec{T}(s), \alpha'(s) \rangle = 0$$

$$\langle k_1\vec{N}_1(s) + k_2\vec{N}_2(s), \alpha(s) \rangle + \langle \vec{T}(s), \vec{T}(s) \rangle = 0$$

$$\left\langle k_1\vec{\mathrm{N}}_1(s)+k_2\vec{\mathrm{N}}_2(s),\vec{\alpha}(s)\right\rangle=-1 \tag{4.6}$$

$$k_1\left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s),\alpha(s)\right\rangle+k_2\left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s),\alpha(s)\right\rangle=-1$$

$$k_1c_2+k_2c_3=-1 \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.6) eşitliğinin her iki tarafının s'ye göre türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\left\langle k_1'\,\vec{\mathrm{N}}_1(s)+k_1\,\vec{\mathrm{N}}_1'(s)+k_2'\,\vec{\mathrm{N}}_2(s)+k_2\,\vec{\mathrm{N}}_2'(s),\alpha(s)\right\rangle$$
$$+\left\langle k_1\,\vec{\mathrm{N}}_1(s)+k_2\,\vec{\mathrm{N}}_2(s),\alpha'(s)\right\rangle=0$$
$$k_1'\left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s),\alpha(s)\right\rangle+k_2'\left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s),\alpha(s)\right\rangle+k_1\left\langle \vec{\mathrm{N}}_1'(s),\alpha(s)\right\rangle$$
$$+k_2\left\langle \vec{\mathrm{N}}_2'(s),\alpha(s)\right\rangle+k_1\left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s),\alpha'(s)\right\rangle$$
$$+k_2\left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s),\alpha'(s)\right\rangle=0$$
$$k_1'c_2+k_2'c_3+k_1\left\langle -k_1\vec{\mathrm{T}}(s),\alpha(s)\right\rangle+k_2\left\langle -k_2\vec{\mathrm{T}}(s),\alpha(s)\right\rangle$$
$$+k_1\left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s),\vec{\mathrm{T}}(s)\right\rangle+k_2\left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s),\vec{\mathrm{T}}(s)\right\rangle=0$$

$$k_1'c_2+k_2'c_3=0 \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.7) ve (4.8) eşitlikleri ortak çözüm yapılırsa;

$$\left.\begin{aligned}k_2'/k_1c_2+k_2c_3&=-1\\-k_2/k_1'c_2+k_2'c_3&=0\end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned}k_2'k_1c_2+k_2'k_2c_3&=-k_2'\\-k_2k_1'c_2-k_2k_2'c_3&=0\end{aligned}\right\}, \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9) sistemindeki denklemler taraf tarafa toplandığında

$$c_2\left(k_2'k_1-k_2k_1'\right)=-k_2'$$
$$c_2=\frac{-k_2'}{k_2'k_1-k_2k_1'}$$
$$c_2=\left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s),\alpha(s)\right\rangle=\frac{-k_2'}{k_2'k_1-k_2k_1'} \tag{4.10}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.7) ve (4.8) denklemlerinden

$$k_1'k_1c_2+k_1'k_2c_3=-k_1'$$
$$-k_1'k_1c_2-k_1k_2'c_3=0$$
$$c_3\left(k_1'k_2-k_1k_2'\right)=-k_1'$$
$$c_3=\frac{k_1'}{k_2'k_1-k_2k_1'}$$

$$c_3 = \left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s), \alpha(s) \right\rangle = \frac{k_1'}{k_2' k_1 - k_2 k_1'} \qquad (4.11)$$

elde edilir. Bu durumda $\alpha(s)$ küresel eğrisi çatı elemanlarının lineer birleşimi olarak;

$$\alpha(s) = c_1 \vec{\mathrm{T}}(s) + c_2 \vec{\mathrm{N}}_1(s) + c_3 \vec{\mathrm{N}}_2(s)$$

şeklinde yazılabilir. (4.1) denkleminin her iki tarafının s parametresine göre türevi alındığında

$$\alpha'(s) = \vec{\mathrm{T}}(s) = c_1' \vec{\mathrm{T}}(s) + c_1 \vec{\mathrm{T}}'(s) + c_2' \vec{\mathrm{N}}_1(s) + c_2 \vec{\mathrm{N}}_1'(s)$$
$$+ c_3' \vec{\mathrm{N}}_2(s) + c_3 \vec{\mathrm{N}}_2'(s)$$
$$\alpha'(s) = \vec{\mathrm{T}}(s) = c_1' \vec{\mathrm{T}}(s) + c_1 \left(k_1 \vec{\mathrm{N}}_1(s) + k_2 \vec{\mathrm{N}}_2(s) \right) + c_2' \vec{\mathrm{N}}_1(s)$$
$$+ c_2 \left(-k_1 \vec{\mathrm{T}}(s) \right) + c_3' \vec{\mathrm{N}}_2(s) + c_3 \left(-k_2 \vec{\mathrm{T}}(s) \right)$$
$$\alpha'(s) = \vec{\mathrm{T}}(s) = \vec{\mathrm{T}}(s)\left(c_1' - c_2 k_1 - c_3 k_2 \right) + \vec{\mathrm{N}}_1(s)\left(c_1 k_1 + c_2' \right)$$
$$+ \vec{\mathrm{N}}_2(s)\left(c_1 k_2 + c_3' \right) \qquad (4.12)$$

elde edilir. Burada (4.12) eşitliğinin iki tarafını $\vec{\mathrm{T}}(s)$ ile iç çarpım uygulandığında;

$$\left(c_1' - c_2 k_1 - c_3 k_2 \right) = 1$$

eşitliği elde edilir. Burada $c_1 = 0$ olduğundan

$$c_2 k_1 + c_3 k_2 = -1$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

Teorem 4.2: E^3 de merkezi M ve yarıçapı r olan bir küre yüzeyi üzerindeki bir $X = X(s)$ eğrisini karakterize eden diferansiyel denklem

$$\left(k_2' k_2 + k_1' k_1 \right) X''' - \left(k_2'^2 + k_1'^2 \right) X'' + \left(k_1^2 + k_2^2 \right)\left(k_2' k_2 + k_1' k_1 \right) X' - \left(k_1' k_2 - k_2' k_1 \right)^2 X = 0$$

ile verilir. Burada k_1, k_2 Bishop çatısına göre eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleridir $[29]$.

İspat: Kürenin merkezi M olmak üzere, küre üzerindeki birim hızlı bir eğrinin bir $X = X(s)$ noktasını alalım. O halde

$$\left\| \overrightarrow{MX}(s) \right\| = r$$
$$\left\langle \vec{X} - \vec{M}, \vec{X} - \vec{M} \right\rangle = r^2 \qquad (4.12)$$

olur. Şimdi;

$$g(s) = \left\langle \vec{X} - \vec{M}, \vec{X} - \vec{M} \right\rangle - r^2 = 0 \qquad (4.13)$$

fonksiyonu tanımlayalım. (4.13) ün iki tarafının s parametresine göre türevi alındığında;

$$\frac{dg(s)}{ds}=\left\langle \frac{d\vec{X}}{ds},\vec{X}-\vec{M}\right\rangle+\left\langle \vec{X}-\vec{M},\frac{d\vec{X}}{ds}\right\rangle-0=0$$

$$2\left\langle \frac{d\vec{X}}{ds},\vec{X}-\vec{M}\right\rangle=0$$

$$\left\langle \frac{d\vec{X}}{ds},\vec{X}-\vec{M}\right\rangle=0$$

$$\frac{dg(s)}{ds}=\left\langle \vec{T}(s),\vec{X}-\vec{M}\right\rangle=0 \qquad (4.14)$$

bulunur. (4.14) eşitliğinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d^2g}{ds^2}=\left\langle \vec{\mathrm{T}}'(s),\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{M}}\right\rangle+\left\langle \vec{\mathrm{T}}(s),\frac{d\vec{\mathrm{X}}}{ds}\right\rangle=0$$

$$\left\langle k_1\vec{\mathrm{N}}_1(s)+k_2\vec{\mathrm{N}}_2(s),\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{M}}\right\rangle+\left\langle \vec{\mathrm{T}}(s),\vec{\mathrm{T}}(s)\right\rangle=0$$

$$\left\langle k_1\vec{\mathrm{N}}_1(s)+k_2\vec{\mathrm{N}}_2(s),\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{M}}\right\rangle+1=0,$$

$$k_1\left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s),\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{M}}\right\rangle+k_2\left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s),\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{M}}\right\rangle=-1 \qquad (4.15)$$

(4.15) eşitliğinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$k_1'\left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s),\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{M}}\right\rangle+k_1\left\langle \vec{\mathrm{N}}_1'(s),\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{M}}\right\rangle+k_1\left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s),\frac{d\vec{\mathrm{X}}}{ds}\right\rangle$$

$$+k_2'\left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s),\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{M}}\right\rangle+k_2\left\langle \vec{\mathrm{N}}_2'(s),\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{M}}\right\rangle+k_2\left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s),\frac{d\vec{\mathrm{X}}}{ds}\right\rangle=0$$

$$k_1'\left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s),\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{M}}\right\rangle+k_1\left\langle -k_1\vec{\mathrm{T}}(s),\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{M}}\right\rangle+k_1\left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s),\vec{\mathrm{T}}(s)\right\rangle$$

$$+k_2'\left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s),\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{M}}\right\rangle+k_2\left\langle -k_2\vec{\mathrm{T}}(s),\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{M}}\right\rangle+k_2\left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s),\vec{\mathrm{T}}(s)\right\rangle=0$$

$$k_1'\left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s),\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{M}}\right\rangle+k_2'\left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s),\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{M}}\right\rangle=0 \qquad (4.16)$$

olur. (4.15) ve (4.16) eşitliklerinde

$$\left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s),\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{M}}\right\rangle=a \quad \text{ve} \quad \left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s),\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{M}}\right\rangle=b$$

olarak alınırsa

$$k_1a+k_2b=-1$$

$$k_1'a+k_2'b=0 \qquad (4.17)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminde ortak çözüm yapıldığında

$$-k_2' \;/\; k_1a+k_2b=-1 \Rightarrow -k_2'k_1a-k_2'k_2b=k_2'$$

$$k_2 \;/\; k_1'a+k_2'b=0 \Rightarrow k_2k_1'a+k_2k_2'b=0$$

$$\Rightarrow a\left(k_2k_1'-k_2'k_1\right)=k_2'$$

$$\Rightarrow a=\frac{k_2'}{k_2k_1'-k_2'k_1}$$

$$\left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s), \vec{\mathrm{X}} - \vec{\mathrm{M}} \right\rangle = \frac{\frac{dk_2}{ds}}{\frac{dk_1}{ds} k_2 - \frac{dk_2}{ds} k_1} \tag{4.18}$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$\begin{aligned} -k_1' \;/\; & k_1 a + k_2 b = -1 \;\Rightarrow\; -k_1' k_1 a - k_1' k_2 b = k_1' \\ k_1 \;/\; & k_1' a + k_2' b = 0 \;\Rightarrow\; k_1' k_1 a + k_2' k_1 b = 0 \\ & \Rightarrow\; b\left(k_2' k_1 - k_2 k_1'\right) = k_1' \\ & \Rightarrow\; b = \frac{-k_1'}{k_2 k_1' - k_2' k_1} \end{aligned}$$

$$\left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s), \vec{\mathrm{X}} - \vec{\mathrm{M}} \right\rangle = \frac{-\frac{dk_1}{ds}}{\frac{dk_1}{ds} k_2 - \frac{dk_2}{ds} k_1} \tag{4.19}$$

elde edilir. O halde $\overrightarrow{\mathrm{MX}} = \vec{\mathrm{X}} - \vec{\mathrm{M}}$ vektörünü Bishop çatısının lineer birleşimi olarak,

$$\vec{\mathrm{X}} - \vec{\mathrm{M}} = \alpha \vec{\mathrm{T}}(s) + \beta\, \vec{\mathrm{N}}_1(s) + \gamma\, \vec{\mathrm{N}}_2(s) \tag{4.20}$$

şeklinde yazılabilir. (4.20) denklemindeki α, β ve γ değerlerini bulalım. (4.20) eşitliğinin her iki tarafına $\vec{\mathrm{T}}(s)$ ile iç çarpım uygulanırsa;

$$\left\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \vec{\mathrm{X}} - \vec{\mathrm{M}} \right\rangle = \alpha \left\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \vec{\mathrm{T}}(s) \right\rangle + \beta \left\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \vec{\mathrm{N}}_1(s) \right\rangle + \gamma \left\langle \vec{\mathrm{T}}(s), \vec{\mathrm{N}}_2(s) \right\rangle$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha = 0 \tag{4.21}$$

bulunur. (4.20) eşitliğinin her iki tarafına $\vec{\mathrm{N}}_1(s)$ ve $\vec{\mathrm{N}}_2(s)$ ile iç çarpım uygulanırsa;

$$\left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s), \vec{\mathrm{X}} - \vec{\mathrm{M}} \right\rangle = \alpha \left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s), \vec{\mathrm{T}}(s) \right\rangle + \beta \left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s), \vec{\mathrm{N}}_1(s) \right\rangle + \gamma \left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s), \vec{\mathrm{N}}_2(s) \right\rangle$$

$$\left\langle \vec{\mathrm{N}}_1(s), \vec{\mathrm{X}} - \vec{\mathrm{M}} \right\rangle = \beta$$

$$\beta = \frac{\frac{dk_2}{ds}}{\frac{dk_1}{ds} k_2 - \frac{dk_2}{ds} k_1} \tag{4.22}$$

$$\left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s), \vec{\mathrm{X}} - \vec{\mathrm{M}} \right\rangle = \alpha \left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s), \vec{\mathrm{T}}(s) \right\rangle + \beta \left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s), \vec{\mathrm{N}}_1(s) \right\rangle + \gamma \left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s), \vec{\mathrm{N}}_2(s) \right\rangle$$

$$\left\langle \vec{\mathrm{N}}_2(s), \vec{\mathrm{X}} - \vec{\mathrm{M}} \right\rangle = \gamma$$

$$\gamma = \frac{-\frac{dk_1}{ds}}{\frac{dk_1}{ds} k_2 - \frac{dk_2}{ds} k_1} \tag{4.23}$$

elde edilir. Kürenin merkez denklemi (4.21), (4.22) ve (4.23) eşitlikleri (4.20) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\vec{M}=\vec{X}-\left[\frac{\frac{dk_2}{ds}}{\frac{dk_1}{ds}k_2-\frac{dk_2}{ds}k_1}\right]\vec{N}_1(s)+\left[\frac{\frac{dk_1}{ds}}{\frac{dk_1}{ds}k_2-\frac{dk_2}{ds}k_1}\right]\vec{N}_2(s), \qquad (4.24)$$

biçiminde elde edilir. Kürenin yarıçapı

$$r=\sqrt{\langle \vec{X}-\vec{M},\vec{X}-\vec{M}\rangle}$$

$$r=\sqrt{\left(\frac{\frac{dk_2}{ds}}{\frac{dk_1}{ds}k_2-\frac{dk_2}{ds}k_1}\right)^2+\left(\frac{\frac{dk_1}{ds}}{\frac{dk_1}{ds}k_2-\frac{dk_2}{ds}k_1}\right)^2}$$

$$r^2=\left(\frac{\frac{dk_2}{ds}}{\frac{dk_1}{ds}k_2-\frac{dk_2}{ds}k_1}\right)^2+\left(\frac{\frac{dk_1}{ds}}{\frac{dk_1}{ds}k_2-\frac{dk_2}{ds}k_1}\right)^2 \qquad (4.25)$$

elde edilir. Eğer kürenin merkezi orijin $(M=0)$ ise küre yüzeyindeki eğrinin konum vektörü

$$\vec{X}=\left(0,\frac{\frac{dk_2}{ds}}{\frac{dk_1}{ds}k_2-\frac{dk_2}{ds}k_1},\frac{-\frac{dk_1}{ds}}{\frac{dk_1}{ds}k_2-\frac{dk_2}{ds}k_1}\right) \qquad (4.26)$$

şeklindedir. (4.24) eşitliğinden

$$\vec{X}=\frac{k_2'}{k_1'k_2-k_2'k_1}\vec{N}_1(s)-\frac{k_1'}{k_1'k_2-k_2'k_1}\vec{N}_2(s) \qquad (4.27)$$

yazılabilir. $X=X(s)$ birim hızlı eğri olduğundan

$$\vec{X}'=\vec{T}(s) \qquad (4.28)$$

eşitliği vardır. (4.28) eşitliğinin s parametresine göre türevi alındığında

$$\vec{X}''=\vec{T}(s)=k_1\vec{N}_1(s)+k_2\vec{N}_2(s) \qquad (4.29)$$

olur. (4.29) eşitliğinin s parametresine göre türevi alındığında

$$\vec{X}'''=k_1'\vec{N}_1(s)+k_1\vec{N}_1'(s)+k_2'\vec{N}_2(s)+k_2\vec{N}_2'(s)$$
$$\vec{X}'''=k_1'\vec{N}_1(s)-k_1^2\vec{T}(s)+k_2'\vec{N}_2(s)-k_2^2\vec{T}(s)$$
$$\vec{X}'''=-\left(k_1^2+k_2^2\right)\vec{T}(s)+k_1'\vec{N}_1(s)+k_2'\vec{N}_2(s)$$

(4.30)

elde edilir. (4.29) ve (4.30) eşitliklerinden

$$-k_2' \;/\; \vec{X}'' = k_1\vec{N}_1(s) + k_2\vec{N}_2(s)$$
$$k_2 \;/\; \vec{X}''' = -\left(k_1^2 + k_2^2\right)\vec{X}' + k_1'\vec{N}_1(s) + k_2'\vec{N}_2(s)$$
$$\vec{N}_1(s) = \frac{k_2\vec{X}''' - k_2\vec{X}'' + k_2\left(k_1^2 + k_2^2\right)\vec{X}'}{k_1'k_2 - k_2'k_1} \qquad (4.31)$$

ve benzer şekilde

$$-k_1' \;/\; \vec{X}'' = k_1\vec{N}_1(s) + k_2\vec{N}_2(s)$$
$$k_1 \;/\; \vec{X}''' = -\left(k_1^2 + k_2^2\right)\vec{X}' + k_1'\vec{N}_1(s) + k_2'\vec{N}_2(s)$$

$$\vec{N}_2(s) = \frac{k_1\vec{X}''' - k_1'\vec{X}'' + k_1\left(k_1^2 + k_2^2\right)\vec{X}'}{k_1k_2' - k_1'k_2} \qquad (4.32)$$

bulunur. (4.27) denkleminde (4.31) ve (4.32) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\vec{X} = \frac{k_2'}{k_1'k_2 - k_2'k_1}\left[\frac{k_2\vec{X}''' - k_2'\vec{X}'' + k_2\left(k_1^2 + k_2^2\right)\vec{X}'}{k_1'k_2 - k_2'k_1}\right] - \frac{k_1'}{k_1'k_2 - k_2'k_1}\left[\frac{k_1\vec{X}''' - k_1'\vec{X}'' + k_1\left(k_1^2 + k_2^2\right)\vec{X}'}{k_1k_2' - k_1'k_2}\right]$$

$$\vec{X} = \frac{k_2'}{k_1'k_2 - k_2'k_1}\left[\frac{k_2\vec{X}''' - k_2'\vec{X}'' + k_2\left(k_1^2 + k_2^2\right)\vec{X}'}{k_1'k_2 - k_2'k_1}\right] + \frac{k_1'}{k_1'k_2 - k_2'k_1}\left[\frac{k_1\vec{X}''' - k_1'\vec{X}'' + k_1\left(k_1^2 + k_2^2\right)\vec{X}'}{k_1'k_2 - k_2'k_1}\right]$$

$$\vec{X} = \frac{k_2'k_2 + k_1'k_1}{\left(k_1'k_2 - k_2'k_1\right)^2}\vec{X}''' - \frac{k_2'^2 + k_1'^2}{\left(k_1'k_2 - k_2'k_1\right)^2}\vec{X}'' + \frac{\left(k_1^2 + k_2^2\right)\left(k_2'k_2 + k_1'k_1\right)}{\left(k_1'k_2 - k_2'k_1\right)^2}\vec{X}' \qquad (4.33)$$

$$\left(k_2'k_2 + k_1'k_1\right)\vec{X}''' - \left(k_2'^2 + k_1'^2\right)\vec{X}'' + \left(k_1^2 + k_2^2\right)\left(k_2'k_2 + k_1'k_1\right)\vec{X}' - \left(k_1'k_2 - k_2'k_1\right)^2\vec{X} = 0$$

şeklinde küre yüzeyindeki bir eğrinin konum vektörünün 3.dereceden bir diferansiyel denklemi elde edilir. ■

5. BİSHOP ÇATISINA GÖRE TİMELİKE KÜRESEL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONU

Teorem 5.1.1: $\vec{x}(s)$, her $s \in \mathrm{I} \subset \square$ için ilk Bishop eğriliği $k_1(s) \neq 0$ ve ikinci Bishop eğriliği $k_2(s) \neq 0$ olan birim hızlı timelike eğrisi olsun. O zaman $\vec{x}(s)$, merkezi m ve yarıçapı $r \in \square^+$ olan Lorentziyen kürenin üzerinde bulunur ancak ve ancak

$$\left(\frac{-k_2'}{k_1'k_2 - k_1k_2'}\right)^2 + \left(\frac{k_1'}{k_1'k_2 - k_1k_2'}\right)^2 = r^2 \quad ,$$

[30].

İspat: İlk olarak $\vec{x}$ in merkezi m ve yarıçapı r olan Lorentz küresi üzerinde olduğunu varsayalım.

$$\langle \vec{x} - \vec{m}, \vec{x} - \vec{m} \rangle = r^2 \qquad (5.1)$$

(5.1) denkleminin s ye göre türevini alıp, Frenet formüllerini kullanırsak:

$$\vec{x} - \vec{m} = \frac{-k_2'}{k_1'k_2 - k_1k_2'}\vec{\mathrm{N}}_1 + \frac{k_1'}{k_1'k_2 - k_1k_2'}\vec{\mathrm{N}}_2$$

Daha sonra, $\vec{x} - \vec{m}$ Bishop çatısının elemanlarının lineer denklemi olarak yazılışı:

$$\vec{x} - \vec{m} = c_1\vec{\mathrm{T}} + c_2\vec{\mathrm{N}}_1 + c_3\vec{\mathrm{N}}_2 \qquad (5.2)$$

Burada $c_1 = c_1(s)$, $c_2 = c_2(s)$ ve $c_3 = c_3(s)$ isteğe bağlı fonksiyonlardır. Sonra:

$$\langle \mathrm{T}, x - m \rangle = -c_1 = 0, \ \langle \mathrm{N}_1, x - m \rangle = c_2 = \frac{-k_2'}{k_1'k_2 - k_1k_2'}, \ \langle \mathrm{N}_2, x - m \rangle = c_3 = \frac{k_1'}{k_1'k_2 - k_1k_2'}$$

elde edilir. Bu nedenle (5.2) denklemindeki c_1, c_2 ve c_3 katsayılarını yerine yazarsak:

$$\vec{x} - \vec{m} = \frac{-k_2'}{k_1'k_2 - k_1k_2'}\vec{\mathrm{N}}_1 + \frac{k_1'}{k_1'k_2 - k_1k_2'}\vec{\mathrm{N}}_2 \qquad (5.3)$$

Böylece (5.1) ve (5.3) denklemlerinden:

$$\left(\frac{-k_2'}{k_1'k_2 - k_1k_2'}\right)^2 + \left(\frac{k_1'}{k_1'k_2 - k_1k_2'}\right)^2 = r^2 \qquad (5.4)$$

Burada $r \in \square^+$ ve $m \in E_1^3$ vektörünü dikkate alabiliriz.

$$\vec{m} = \vec{x} + \frac{k_2'}{k_1'k_2 - k_1k_2'}\vec{\mathrm{N}}_1 - \frac{k_1'}{k_1'k_2 - k_1k_2'}\vec{\mathrm{N}}_2 \qquad (5.5)$$

m nin sabit olduğunu kanıtlayabiliriz. (5.5) denkleminin s ye göre diferansiyeli alınırsa:

$$\vec{m}' = \frac{k_2(k_1'k_2'' - k_1''k_2')}{(k_1'k_2 - k_1k_2')^2}\vec{\mathrm{N}}_1 - \frac{k_1(k_1'k_2'' - k_1''k_2')}{(k_1'k_2 - k_1k_2')^2}\vec{\mathrm{N}}_2 \qquad (5.6)$$

(5.4) denkleminin diferansiyelinden:

$$\frac{2\left(k_1''k_2'-k_2''k_1'\right)\left(k_1k_1'+k_2k_2'\right)}{-\left(k_1'k_2-k_1k_2'\right)^3}=0,\quad \left(k_1''k_2'-k_2''k_1'\right)\left(k_1k_1'+k_2k_2'\right)=0$$

$$\left(\frac{k_1}{k_2'}\right)'\left(k_2'\right)^2\left[\left(\frac{1}{k_1}\right)'\left(-k_1\right)^3+\left(\frac{1}{k_2}\right)'\left(-k_2\right)^3\right]=0\ ,\quad \left(\frac{k_1}{k_2'}\right)'\left(k_2'\right)^2=0 \qquad (5.7)$$

(5.7) denkleminde; (5.6) denkleminin, her $s\in \mathrm{I}\subset\square$ için $m'=0$ ve dolayısıyla $m=sabit$ olduğunu görüyoruz. Denklem (5.6):

$$\left\langle \vec{x}-\vec{m},\vec{x}-\vec{m}\right\rangle=\left(\frac{-k_2'}{k_1'k_2-k_1k_2'}\right)^2+\left(\frac{k_1'}{k_1'k_2-k_1k_2'}\right)^2=r^2$$

Bu nedenle $\vec{x}(s)$ Lorentziyen küresi üzerinde bulunuyor.

Teorem 5.1.2: E_1^3 de, $\vec{x}(s):\mathrm{I}\to E_1^3$ yay uzunluğu parametresi s olan bir eğri olsun. $\vec{x}=\vec{x}(s)$ timelike küresel eğri ise, Bishop eğrilikleri arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı vardır ve c=sabit ise,

$$\frac{k_1'-k_2'}{k_1'k_2-k_1k_2'}=c,\qquad c=c_1+c_2\ ,$$

$[30]$.

İspat: $\vec{x}$, E_1^3 de yay uzunluğu parametresi s olan timelike küresel eğri olsun. Eğer (5.3) denkleminin s ye göre türevini alırsak:

$$\vec{\mathrm{T}}=\left(\frac{-k_2'}{k_1'k_2-k_1k_2'}\right)'\vec{\mathrm{N}}_1+\left(\frac{-k_2'}{k_1'k_2-k_1k_2'}\right)\left(k_1\vec{\mathrm{T}}\right)+\left(\frac{k_1'}{k_1'k_2-k_1k_2'}\right)\vec{\mathrm{N}}_2+\left(\frac{k_1'}{k_1'k_2-k_1k_2'}\right)\left(k_2\vec{\mathrm{T}}\right)$$

(5.8)

Önceki denklemden:

$$\left(\frac{-k_2'}{k_1'k_2-k_1k_2'}\right)'=0,\quad \left(\frac{k_1'}{k_1'k_2-k_1k_2'}\right)'=0$$

$$\left(\frac{-k_2'}{k_1'k_2-k_1k_2'}\right)'=c_1,\qquad \left(\frac{k_1'}{k_1'k_2-k_1k_2'}\right)'=c_2,\qquad c_1,c_2=sabit$$

$$\frac{k_1'-k_2'}{k_1'k_2-k_1k_2'}=c,\qquad c=c_1+c_2$$

Teorem 5.1.3: Timelike bir Lorentziyen küresel eğrinin konum vektörü, üçüncü dereceden bir lineer diferansiyel denklemi sağlar $[30]$.

İspat: Konum vektörünün türevini sırasıyla üç kez alırsak:

$$\vec{x}' = \vec{\mathrm{T}} \tag{5.9}$$

$$\vec{x}'' = \vec{\mathrm{T}}' = k_1\vec{\mathrm{N}}_1 + k_2\vec{\mathrm{N}}_2 \tag{5.10}$$

$$\vec{x}''' = \left(k_1^2 + k_2^2\right)\vec{\mathrm{T}} + k_1'\vec{\mathrm{N}}_1 + k_2'\vec{\mathrm{N}}_2 \tag{5.11}$$

$(5.9)-(5.11)$ denklemlerinden:

$$\vec{\mathrm{N}}_1 = \frac{k_2\vec{x}''' - k_2'\vec{x}'' - k_2\left(k_1^2 + k_2^2\right)\vec{x}'}{k_1'k_2 - k_1k_2'} \tag{5.12}$$

ve

$$\vec{\mathrm{N}}_2 = \frac{k_1\vec{x}''' - k_1'\vec{x}'' - k_1\left(k_1^2 + k_2^2\right)\vec{x}'}{k_1'k_2 - k_1k_2'} \tag{5.13}$$

(5.12) ve (5.13) denklemlerini (5.3) denkleminde yerine yazarsak:

$$\vec{x} - \vec{m} = \frac{k_1k_1' + k_2k_2'}{\left(k_1'k_2 - k_1k_2'\right)^2}\vec{x}''' - \frac{k_1'^2 + k_2'^2}{\left(k_1'k_2 - k_1k_2'\right)^2}\vec{x}'' + \frac{\left(k_1^2 + k_2^2\right)\left(k_1k_1' + k_2k_2'\right)}{\left(k_1'k_2 - k_1k_2'\right)^2}\vec{x}' \tag{5.14}$$

(5.14) denklemi yeniden düzenlenirse:

$$\left(k_1k_1' - k_2k_2'\right)\vec{x}''' + \left(-k_1'^2 + k_2'^2\right)\vec{x}'' + \left(k_1^2 + k_2^2\right)\left(-k_1k_1' + k_2k_2'\right)\vec{x}' - \left(k_1'k_2 - k_1k_2'\right)^2\vec{x} = m \tag{5.15}$$

Denklem (5.15) bir Lorentziyen küresel timelike eğrinin konum vektörünün üçüncü dereceden lineer bir diferansiyel denklemi sağladığını gösterir.

Sonuç 5.1.1: $\vec{x}(s)$, E_1^3 de yay uzunluğu parametresi s olan timelike bir küresel eğridir. $\vec{x}(s)$ noktasındaki timelike kürenin merkezi

$$\vec{m} = \vec{x} + \left(\frac{k_2'}{k_1'k_2 - k_1k_2'}\right)\vec{\mathrm{N}}_1 - \left(\frac{k_1'}{k_1'k_2 - k_1k_2'}\right)\vec{\mathrm{N}}_2 ,$$

şeklindedir $[30]$.

Sonuç 5.1.2: E_1^3 de, $\vec{x}(s): \mathrm{I} \to E_1^3$ yay uzunluğu parametresi s olan timelike bir küresel eğrinin yarıçapı

$$r = \sqrt{\left(\frac{k_2'}{k_1'k_2 - k_1k_2'}\right)^2 + \left(\frac{k_1'}{k_1'k_2 - k_1k_2'}\right)^2} ,$$

şeklindedir $[30]$.

Teorem 5.1.4: $\vec{x}(s)$, ilk Bishop eğriliği $k_1 = k_1(s)$ olan birim hızlı bir eğri olsun. E_1^3 de , $\vec{x}(s)$ merkezi m ve yarıçapı $r \in \mathbb{R}^+$ olan Lorentziyen küre üzerinde bulunur. Eğer $k_1 = sabit$ ise

$$\vec{x}-\vec{m}=\frac{1}{k_1}\vec{\mathrm{N}}_1\pm\sqrt{r^2-\frac{1}{k_1^2}}\vec{\mathrm{N}}_2,$$

[30].

İspat: Her $s\in \mathrm{I}\subset\square$ için $\vec{x}$, merkezi m ve yarıçapı $r\in\square^+$ olan $\langle\vec{x}-\vec{m},\vec{x}-\vec{m}\rangle$ deki Lorentziyen küresi üzerinde olduğunu kabul edelim. Önceki denklemde s ye göre iki kere türev alındığında,

$$k_1\langle\vec{\mathrm{N}}_1,\vec{x}-\vec{m}\rangle+k_2\langle\vec{\mathrm{N}}_2,\vec{x}-\vec{m}\rangle=1. \qquad (5.16)$$

Varsayımla $\vec{x}$ bir düzlemsel eğridir. Dolayısıyla $\tau=0$ ve $\theta=\int\tau ds$, $\tan\theta=k_2/k_1$ kullanarak $k_2=0$ ve $k_1=\kappa$ elde ederiz. Önceki denklemleri kullanarak, denklem (5.16) dan aşağıdakileri çıkarırız,

$$k_1\langle\vec{\mathrm{N}}_1,\vec{x}-\vec{m}\rangle=1,$$

$$\langle\vec{\mathrm{N}}_1,\vec{x}-\vec{m}\rangle=\frac{1}{k_1}\ . \qquad (5.17)$$

Denklem (5.17) nin s ye göre türevini alınırsa,

$$\langle\vec{\mathrm{N}}_1',\vec{x}-\vec{m}\rangle+\langle\vec{\mathrm{N}}_1,\vec{\mathrm{T}}\rangle=\left(\frac{1}{k_1}\right)',$$

$$k_1\langle\vec{\mathrm{T}},\vec{x}-\vec{m}\rangle=\left(\frac{1}{k_1}\right)',\ 0=\left(\frac{1}{k_1}\right),\ \frac{1}{k_1}=sabit,\ k_1=sabit$$

elde edilir. Burada

$$\vec{x}-\vec{m}=a\mathrm{T}+b\mathrm{N}_1+c\mathrm{N}_2 \qquad (5.18)$$

İfadesi yerine yazılırsa, $a=a(s),b=b(s),c=c(s)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$\vec{x}-\vec{m}=\frac{1}{k_1}\vec{\mathrm{N}}_1+c\vec{\mathrm{N}}_2,$$

şeklindedir. Buradan ,

$$\langle\vec{x}-\vec{m},\vec{x}-\vec{m}\rangle=\left(\frac{1}{k_1}\right)^2+c^2=r^2,$$

$$c=\pm\sqrt{r^2-\left(\frac{1}{k_1}\right)^2}\ ,$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\vec{x}-\vec{m}=\frac{1}{k_1}\vec{\mathrm{N}}_1\pm\sqrt{r^2-\left(\frac{1}{k_1}\right)^2}\vec{\mathrm{N}}_2,$$

bulunur.

Tersine $k_1=sabit\neq 0$ olsun.

$$\vec{x}-\vec{m}=\frac{1}{k_1}\vec{\mathrm{N}}_1\pm\sqrt{r^2-\left(\frac{1}{k_1}\right)^2}\,\vec{\mathrm{N}}_2,$$

$\vec{m}\in E_1^3$ keyfi bir vektördür ve $r\in\mathbb{R}^+$. $\vec{m}$ nin sabit olduğunu kanıtlayacağız. Yukarıdaki denklemden,

$$\vec{m}=\vec{x}-\frac{1}{k_1}\vec{\mathrm{N}}_1\pm\sqrt{r^2-\left(\frac{1}{k_1}\right)^2}\,\vec{\mathrm{N}}_2,$$

olup s ye göre türevinin alınması ve karşılık gelen türev formülleri kullanılarak $\vec{m}'=0$ elde edilir. Bu yüzden $\vec{m}=sabit$ ve $\langle\vec{x}-\vec{m},\vec{x}-\vec{m}\rangle=r^2$ dir. Bu nedenle $\vec{x}$, merkezi $\vec{m}$ ve yarıçapı r olan Lorentz küresi üzerinde bulunur.

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında E^3 Öklid 3-uzayında Frenet çatısına göre küresel eğriler detaylı bir şekilde incelenip, bu eğrilerle ilgili temel teoremler ispatlarıyla beraber verilmiştir. Daha sonra diferansiyel denklem ve integral karakterizasyonları incelenmiştir. Özellikle Öklid 3-uzayında Bishop çatısına göre küresel eğriler incelenerek, bir küresel eğriyi karakterize eden 3.mertebeden bir diferansiyel denklem elde edilmiştir. Son bölümde Bishop çatısına göre timelike küresel eğrilerin konum vektörü, yarıçapı ve bu eğrileri karakterize eden 3.mertebeden diferansiyel denklem elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Struik, .D.J., Lectures on Classical Differential Geometry, Dover Publications, Inc., New York, 1961.

[2] Wong, Y.C., A Global Formulation of the Condition for a Curve to Lie in a Sphere, Monatsh Math, 67, 363-365, 1963.

[3] Breuer, S. and Gottlieb, D., Explicit Characterization of Spherical Curves, Proceedings of the American Mathematical Society, 27(1) : 126-127, 1971.

[4] Wong, Y.C., On an Explicit Characterizations of Spherical Curves, Proceedings of the American Mathematical Society, 34(1) : 239-242, 1972.

[5] Özdamar, E. and Hacısalihoğlu, H.H., Characterizations of Spherical Curves in Euclidean n-Space, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Tebliğler Dergisi, 23: 109-125, 1974.

[6] Mehlum, E. and Wimp, J., Spherical Curves and Quadratic Relationships for Special Functions, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 27, 111-124, 1985.

[7] Sezer, M., Differential Equations and İntegral Characterizations for E^4 Spherical Curves, Turkish J. of Math, 13(3): 125-131, 1989.

[8] Pekmen, Ü. and Paşali S., Some Characterizations of Lorentzian Spherical Spacelike Curves, Mathematica Moravica, 3: 33-37, 1999.

[9] Petrovic-Torgasev, M. and Sucurovic, E., Some Characterizations of Lorentzian Spherical Spacelike Curves with the Timelike and the Null Principal Normal, Mathematica Moravica, 4: 83-92, 2000.

[10] Petrovic-Torgasev, M. and Sucurovic, E., Some Characterizations of the Spacelike, the Timelike and the Null Curves on the Pseudohyperbolic Space H_0^2 in E_1^3, Kragujevac J. Math., 22: 71-82, 2000.

[11] Petrovic-Torgasev, M. and Sucurovic, E., Some Characterizations of the Lorentzian Spherical Timelike and Null Curves, Mathematica Moravica, 53: 21-27, 2001.

[12] Güner, G. and Ekmekçi, N., On the Spherical Curves and Bertrand Curves in Minkowski 3-Space, J. Math. Comput. Sci., 2(4): 898-906, 2012.

[13] İlarslan, K., Some Special Curves on Non-Euclidean Manifolds, Ph. D. Thesis, Ankara University, (2002)

[14] Uğurlu, H. H., Çalışkan, A., Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi, Celal Bayar Üniversitesi Yayını No:06, Manisa, ISBN: 978-975-8628-24-7.

[15] Kocayiğit, H., Lorentz Manifoldlarında Biharmonik Eğriler ve Kontak Geometri, Ph. D. Thesis, Ankara University, (2004).

[16] Bishop, L. R., There is More Than One Way to Frame a Curve, Amer. Math. Monthly, 82 (1975), 246-251.

[17] Bükçü, B., Karacan., M.K., On the Slant Helices according to Bishop Frame of the Timelike Curve in Lorentzian Space, Tamkang Journal of Math., 39 (3), (2008), 255-262.

[18] Chen, B., Y., and Ishikawa, S., Biharmonic Surface in Pseudo-Euclidean Spaces, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., A 45 (1991), 323-347.

[19] Kocayiğit, H., Hacısalihoğlu, H.H., 1-Type and Biharmonic Frenet Curves in Lorentzian 3-Space, Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, Vol. 33, No. A2 (2009), 159-168.

[20] Sabuncuoğlu, A., Diferansiyel Geometri, Nobel Yayıncılık Ankara, 2006.

[21] Hacısalihoğlu, H.H., Diferansiyel Geometri I. Cilt, Ankara Yayınları, 2000.

[22] Uğurlu, H.H. and Çalışkan, A., Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi, Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, Yayın No: 0006, 2012.

[23] O'Neill, B., Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, New York, 1983.

[24] Walrave, J., Curves and Surfaces in Minkowski Space, K.U. Leuven, Faculty of Sciences, Ph. D. Thesis, 1995.

[25] Ünlütürk, Y. and Savcı, Ü. Z., On Non-unit Speed Curves in Minkowski 3-space Scientia Megna, 8(4): 66-74, 2012.

[26] Karacan, M.K. and Bükcü, B., Bishop Frame of the Timelike Curve in Minkowski 3-Space, SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi, Fen Dergisi (E-Dergi), 3(1): 80-90, 2008.

[27] Bükcü, B. and Karacan, M.K., Bishop Frame of the Spacelike Curve with a Spacelike Principal Normal in Minkowski 3-Space, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 57(1): 13-22, 2008.

[28] Bükcü, B. and Karacan, M.K., Bishop Frame of the Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space, Selçuk J. Appl. Math., 11(1): 15-25,2010.

[29] Okullu, B.P., Kocayiğit, H., Aydın, A.T. An Explicit Characterization of Spherical Curves According to Bishop Frame and an Approximately Solution, Thermal Science, 23(1), pp. 361-370, 2019

[30] Okullu, B.P., Kocayiğit, H. Differential Representation of the Lorentzian Spherical Timelike Curves by Using Bishop Frame , Thermal Science, 23(6), pp.2037-2043, 2019.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Nurten EMER
Doğum Yeri ve Yılı	: İzmir, 1994
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: nurtenemer1994@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Vali Nevzat Ayaz Anadolu Lisesi, 2012
Lisans	: Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2016
Yüksek Lisans	: Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2020

Mesleki Deneyim

İzmir / Konak Delta Matematik Dershanesi	2015-2016
İzmir / İyiburnaz Ortaokulu	2016-2017
İzmir / Tire Oluşum Koleji	2017-2018
İzmir / Bayındır Çırpı Mustafa Adanır Ortaokulu	2018-2020