T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TOPOLOJİ BİLİM DALI

DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE ESNEK KÜME YAPISI VE DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE ESNEK SÜREKLİLİK

Sultan İHTİYAR

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Simge ÖZTUNÇ



MANİSA–2017

TEZ ONAYI

Sultan İHTİYAR tarafından hazırlanan **"Dijital Görüntülerde Esnek Küme Yapısı ve Dijital Görüntülerde Esnek Süreklilik"**adlı tez çalışması 21/04/2017 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Yrd. Doç. Dr. Simge ÖZTUNÇ** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Erdal EKİCİ** Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Ali MUTLU** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	.....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Sultan İHTİYAR

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ	III
TEŞEKKÜR	IV
ÖZET	V
ABSTRACT	VI
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1. Dijital Görüntü Kavramı	3
2.2. Esnek Kümeler	9
3. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE ESNEK KÜME YAPISI	12
4. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE ESNEK SÜREKLİLİK	16
5. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE ESNEK HOMEOMORFİZMA	24
6. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE ESNEK HOMOTOPİ	31
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	36
KAYNAKLAR	37
ÖZGEÇMİŞ	39

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	$n-$ boyutlu Euclidean uzay
κ	Dijital görüntülerdeki yakınlık bağıntısı
$[0,m]_{\mathbb{Z}}$	Dijital aralık
$\simeq_{\kappa,\lambda}$	Dijital Görüntülerde $(\kappa,\lambda)-$ homotopi
(F,E)	Esnek Küme
(x_e,E)	Esnek Nokta
$\tilde{\cup}$	Esnek Kümelerde Birleşim
$\tilde{\cap}$	Esnek Kümelerde Kesişim
Φ	Boş Esnek Küme
(X,τ,E)	Esnek Topoloji
$(F,E)_\kappa$	$\kappa-$ yakınlıklı Dijital Esnek Küme

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1. Sırasıyla bir noktanın $2-$, $4-$ ve $8-$ yakınlığı. 1

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın başından itibaren bana desteğini esirgemeyen, lisansüstü eğitimim boyunca bilgi, deneyim ve tecrübesi ile bana yol gösteren, görüş ve önerileriyle önemli katkılar sağlayan, maddi, manevi her yönden yardımlarıyla bana destek olan, insani ve ahlaki değerleri ile örnek edindiğim, kendisini tanımaktan ve öğrencisi olmaktan büyük onur duyduğum ve duymaya devam edeceğim sevgili danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Simge ÖZTUNÇ' a, ayrıca yüksek lisans öğrenimim boyunca ilminden faydalandığım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ali MUTLU' ya, bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan biricik aileme ve sevgili dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sultan İHTİYAR
Manisa, 2017

ÖZET

Yüksek Lisans

Dijital Görüntülerde Esnek Küme Yapısı ve Dijital Görüntülerde Esnek Sürekllik

Sultan İHTİYAR

Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Simge ÖZTUNÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak dijital görüntülerle ve Esnek Küme Teorisi ile ilgili temel kavramlar ve özellikler hatırlatılmıştır.

Bu tezde $\mathbb{Z}^n$ in sonlu bir alt kümesi $\kappa-$ yakınlık bağıntısı ile birlikte bir dijital görüntü olarak göz önüne alınmıştır. Dijital görüntülerde bir parametre kümesi kullanılarak esnek kümenin tanımı verilmiştir. Böylece dijital görüntülerde esnek küme yapısı oluşturulmuştur. Daha sonra bu yapı üzerinde esnek süreklilik ve esnek homeomorfizma tanımlanmıştır ve $2-$ boyutlu dijital görüntülerde $4-$ ve $8-$ yakınlık bağıntıları kullanılarak dijital esnek sürekli fonksiyon örnekleri ve dijital esnek homeomorfizma örnekleri sunulmuştur. Ayrıca dijital esnek sürekli dönüşümlerin önemli özellikleri ispatlanmıştır.

Dijital esnek sürekliliğin tanımlanması ve özelliklerinin ispatlanması, dijital esnek retraksiyonun ve dijital esnek homotopinin tanımlanması için altyapı oluşturmuştur. Böylece $\kappa-$ yakınlıklı dijital görüntüler için dijital esnek retraksiyon (geri çekilim) ve dijital esnek homotopi tanımlandı. Daha sonra $1-$ boyutlu dijital görüntülerde $2-$, $2-$ boyutlu dijital görüntülerde $4-$ ve $8-$ yakınlık bağıntıları kullanılarak dijital görüntülerde esnek retraksiyon ve esnek homotopi örnekleri verilmiştir. Ayrıca dijital görüntülerde esnek retraksiyonun ve esnek homotopinin bazı özellikleri ispatlanmıştır. Son olarak dijital görüntülerde esnek homotop olma bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dijital Görüntü, Dijital Esnek Küme, Dijital Esnek Süreklilik, Dijital Esnek Homotopi.

2017, 39 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

The Structure of Soft Set in Digital Images and Soft Continuity in Digital Images

Sultan İHTİYAR

Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Simge ÖZTUNÇ

In this thesis study, at first some fundamental notions related with Soft Set Theory is mentioned.

In this thesis a finite subset of $\mathbb{Z}^n$ with $\kappa-$adjacency relation is considered a digital image. The definition of soft set is given by using a parameter set in digital images. Then soft contuniuty and soft homeomorphism is defined on this structure and examples of digital soft continuous function and digital soft homeomorphism is presented by using $4-$ adjacency and $8-$ adjacency in $2-$ dimensional digital images. Also properties of digital soft continuous mappings is proved.

Defining the digital soft continuity and proving the properties of digital soft contunuity create infrastructure for defining soft homotopy in digital images. Hence digital soft retraction and digital soft homotopy is defined for $\kappa-$adjacent digital images. Then the examples of soft retraction and soft homotopy in digital images are given by using $2-$ adjacency in $1-$ dimensional digital images and $4-$, $8-$ adjacency in $2-$ dimensional digital images. Also some properties of soft retractions and soft homotopy is proved in digital images. Finally it is shown that 'soft homotopy in digital images' is an equivalence relation.

Keywords: Digital Image, Digital Soft Set, Digital Soft Continuity, Digital Soft Homotopy.

2017, 39 pages

1. GİRİŞ

Dijital görüntüler görsel bilgi iletişimi kurmak için temel araçlardan biri haline gelmiştir. Bir dijital kameradaki resimler, bu çalışmadaki resimler, bir hesap makinesi ekranındaki grafik dijital olarak inşa edilen ya da sunulan örneklerdendir. Dijital görüntü yöntemi oluşturma, depolama, manipülasyon dijital görüntülerin gösterimiyle ilgilidir.

Dijital topoloji kavramından ilk kez 1979 da Azrael Rosenfeld [1] bahsetmiştir. Buna karşılık dijital topolojinin temelleri ve özelikleri [2,3,4,5,6,7,8,9,10,11] de çalışılmıştır..

Esnek kümeler kavramı 1999 da D. Molodtsov [12] tarafından tanımlanmıştır ve esnek küme teorisi bilgisayar bilimlerinde, mühendislikteki modelleme problemlerinde, ekonomide, medikal ve sosyal bilimlerde kullanışlı bir araç haline gelmiştir. Esnek küme teorisinin teorik özellikleri bazı matematikçiler tarafından çalışılmıştır. Maji [13] esnek kümeler üzerinde bazı işlemler tanımlamıştır. Esnek topolojik uzay kavramı Zorlutuna [14] tarafından çalışılmıştır. Ayrıca Zorlutuna ve Çakır [15] esnek dönüşümlerin sürekliliği üzerine çalışmıştırlar. Bununla birlikte esnek küme teorisi ve esnek sürekli fonksiyonlarla ilgili özelliklere [16,17,18,19,20] de yer verilmiştir. Esnek küme teorisinin kategorik özellikleri ise [21] de incelenmiştir.

Ekonomi, mühendislik, çevre bilimi, sosyoloji, tıp bilimi ve diğer birçok alanda araştırmacılar belirsiz veri modelleme karmaşılıklığını ele almaktadırlar. Klasik metodlar her zaman başarlı değildir, çünkü bu alanlarda ortaya çıkan belirsizlikler çeşitli tiplerde olabilir. Olasılık teorisi, bulanık kümeler, yaklaşım kümeleri ve diğer matematiksel teoriler çeşitli yaklaşımlardaki belirsizliği açıklarken Molodtsov'a göre bu teorilerin her birinin kendine özgü zorlukları vardır. Sonuç olarak Molodtsov modellenen bu belirsizlikler için tamamen yeni bir yaklaşım önerdi. Bu anlamda esnek küme teorisi, mevcut yöntemleri etkiliyen zorluklardan bağımsızdır.

Bu çalışmada esnek küme kavramını ve esnek cebirsel topolojik kavramları dijital görüntülere aktarırken cebirsel topoloji ve topoloji alanlarında literatürde temel kaynaklar olarak kullanılan [22, 23] kaynaklarına başvurduk. Esnek retraksiyonları tanımlarken ve dijital görüntülere aktarırken [24] makalesini dikkate aldık. Bununla birlikte Prof. Dr. Ali Mutlu, Teorik ve Çözümlü Topoloji Ders Notları, 2012 [25] den faydalandık. Diğer taraftan tezin hazırlanma aşamasında Ulusal ve Uluslararası konferanslarda sunulan bildiriler [26, 27] ve [28] makalesi bu tez çalışmasının son halini almasına katkı sağlamıştır.

Bu tezde dijital görüntülerde yeni bir yapı olan esnek küme yapısı tanımlanarak bu yapı üzerinde topolojinin ve cebirsel topolojinin ana materyallerinden biri olan sürekli dönüşüm kavramının dijital görüntülerde yorumlanması amaçlanmaktadır. Ayrıca bu çalışmanın Dijital Topoloji ve Esnek Küme Teorisi alanlarında çalışanlar için faydalı araçları içeren bir kaynak olması hedeflenmektedir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Dijital Görüntü Kavramı

Dijital topoloji ve geometri dijital kümeler olarak adlandırılan dijital düzlemin alt kümelerinin topolojik ve geometrik özellikleri ile ilgilidir. Dijital düzlemde görüntü işlemi siyah-beyaz görüntülerin matematiksel bir modeli olarak alınır. Bu uygulamada genellikle dijital görüntüde siyah noktaların bir S kümesine ve S nin beyaz noktalardan oluşan tümleyenine sahip olunur.

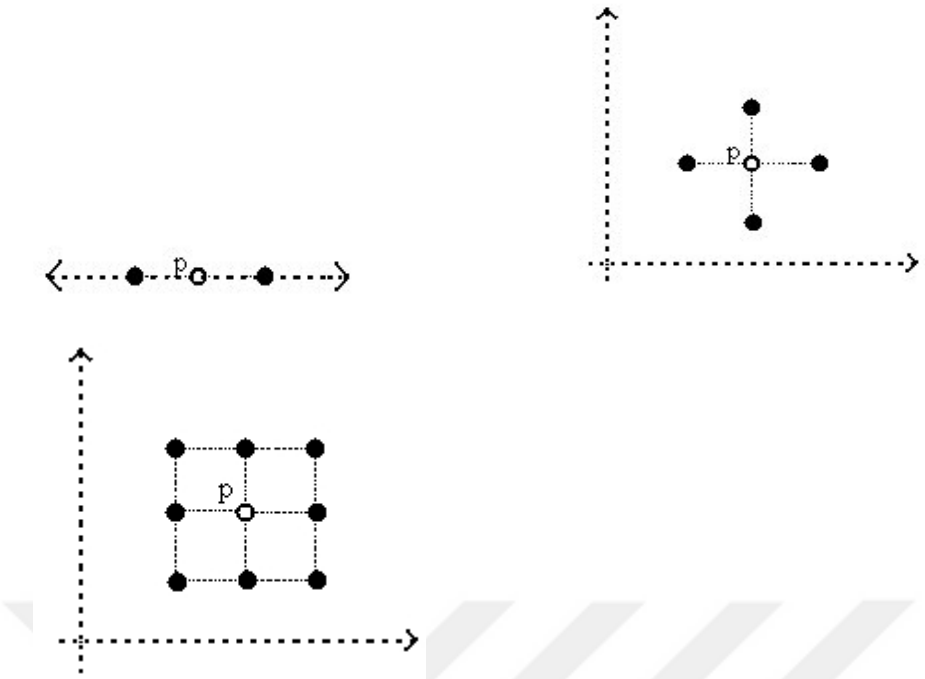
$\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}$ sırasıyla tamsayılar ve reel sayılar kümesi olsun. $\mathbb{Z}^n$, $n-$boyutlu Euclidean uzay $\mathbb{R}^n$ deki lattis noktalarının kümesi olsun. Bir X dijital görüntüsü $\mathbb{Z}^n$ in sonlu bir alt kümesi ve k X in elemanları için yakınlık bağıntısını göstermek üzere (X,k) çiftidir. $k-yakınlık$ bağıntıları $\mathbb{Z}^n$ deki dijital görüntü çalışmalarında kullanılır. $1\le u\le n$ olmak üzere pozitif bir u tamsayısı için $\mathbb{Z}^n$ deki bir dijital görüntünün bir yakınlık bağıntısını şu şekilde tanımlarız:

$\mathbb{Z}^n$ deki farklı iki $p=(p_1,p_2,...,p_n)$ ve $q=(q_1,q_2,...,q_n)$ noktası aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $k(u,n)-yakın$ dır.

- $|p_i-q_i|=1$ olacak şekilde en fazla u tane farklı i indisi vardır; ve
- Tüm j indisleri için $|p_j-q_j|\neq 1$ ise, bu takdirde $p_j=q_j$.

$\mathbb{Z}^n$ üzerindeki bir $k(u,n)-yakınlık$ bağıntısı bir $p\in\mathbb{Z}^n$ noktasına $k(u,n)-yakın$ olan noktaların sayısı ile de gösterilebilir. Üstelik

- $\mathbb{Z}$ in $k(1,1)-yakın$ noktaları $2-yakın$;
- $\mathbb{Z}^2$ nin $k(1,2)-yakın$ noktaları $4-yakın$ ve $k(2,2)-yakın$ noktaları $8-yakın$;
- $\mathbb{Z}^3$ nin $k(1,3)-yakın$ noktaları $6-yakın$, $k(2,3)-yakın$ noktaları $18-yakın$ ve $k(3,3)-yakın$ noktaları $26-yakın$ olarak adlandırılır;
- $\mathbb{Z}^4$ ün $k(1,4)-,k(2,4)-,k(3,4)-,k(4,4)-yakın$ noktaları sırasıyla $8-yakın$, $32-yakın$, $64-yakın$ ve $80-yakın$ olarak adlandırılır. [1,5,4]



Şekil 2.1. Sırasıyla bir noktanın $2-$, $4-$ ve $8-$ yakınlığı.

Tanım 2.1.1. [1, 2] Bir $p \in \mathbb{Z}^n$ noktasının $k-$komşuluğu, $\mathbb{Z}^n$ in p ye $k-yakın$ olan bir noktasıdır.

k nın $\mathbb{Z}^n$ üzerinde bir yakınlık bağıntısı olduğunu kabul edelim. Bir $X \subset \mathbb{Z}^n$ dijital görüntüsü her $\{x, y\} \subset X$, $x \neq y$ nokta çifti için $x = x_0, x_c = y$ ve x_i ve x_{i+1} $k-komşu$, $i \in \{0,1,...,c-1\}$ olacak şekilde bir $\{x_0, x_1, ..., x_c\} \subset X$ alt kümesi var ise $\kappa-bağlantılı$ olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2. [1, 2] X ve Y $X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$, $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ olacak şekilde dijital görüntüler olsun. Bu takdirde $f : X \to Y$ dijital fonksiyonu dijital görüntüler arasında tanımlanmış bir fonksiyondur.

Tanım 2.1.3. [1, 2] X ve Y $X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$ ve $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ olacak şekilde dijital görüntüler olsun. $f : X \to Y$ nin bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. κ_i, $\mathbb{Z}^{n_i}$, $i \in \{0,1\}$ üzerinde tanımlı bir yakınlık bağıntısı olsun. Eğer X in her $\kappa_0-bağlantılı$ alt kümesinin f altındaki görüntüsü $\kappa_1-bağlantılı$ ise f, $(\kappa_0, \kappa_1)-sürekli$ fonksiyon olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.3 ü sağlayan bir fonksiyon dijital sürekli olarak göz önüne alınacaktır. Bu tanımın sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.1.4. [1,2] X ve Y dijital görüntüler olsun. Bu takdirde $f: X \to Y$ fonksiyonu $(\kappa_0, \kappa_1) - sürekli dir$ ancak ve ancak $\kappa_0 - yakınlıklı$ her $x_0, x_1 \in X$ nokta çifti için $f(x_0) = f(x_1)$ veya $f(x_0)$ ve $f(x_1)$ $\kappa_1 - yakın$ dır.

Tanım 2.1.5. [1, 2] $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$ *olsun. Bir dijital aralık* $2 - yakın$ *olarak kabul edilen*

$$[a,b]_{\mathbb{Z}} = \{z \in \mathbb{Z} \mid a \le z \le b\}$$

şeklindeki bir kümedir.

Örneğin k bir Y dijital görüntüsü üzerinde bir yakınlık bağıntısı ise, bu takdirde, $f: [a,b]_{\mathbb{Z}} \to Y$, $(2,k) - sürekli$ dir ancak ve ancak her $\{c, c+1\} \subset [a,b]_{\mathbb{Z}}$ için $f(c) = f(c+1)$ veya $f(c)$ ve $f(c+1)$ $k - yakın$ dır. [1,5,4]

Önerme 2.1.6 [2] Dijital sürekli fonksiyonların bileşkesi dijital süreklidir. Yani $X \subseteq I_k, Y \subseteq I_m, Z \subseteq I_p$ dijital görüntülerin alt kümeleri ve $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ dijital sürekli fonksiyonlar olsun. Bu takdirde $g \circ f: X \to Z$ dijital süreklidir.

İspat: $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$ olsun. $\varepsilon \ge 1$ verilmiş olsun. g, $y_0 \in Y$ noktasında dijital sürekli olduğundan $\delta_1 \ge 1$ sayısı vardır öyle ki $y \in Y$ için $d_m(y_0, y) \le \delta_1$, $d_p(g(y_0), g(y)) \le \varepsilon$ dır. f fonksiyonu da $x_0 \in X$ noktasında dijital sürekli olduğundan $\delta_1 \ge 1$ vardır öyle ki $x \in X$ için $d_k(x_0, x) \le \delta$ olduğundan $d_m(y_0, f(x)) \le \delta_1$ dir. Bu takdirde $x \in X$ için $d_k(x_0, x) \le \delta$, $d_p(g(f(x_0)), g(f(x))) \le \varepsilon$ dur. Böylece $g \circ f$ fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında süreklidir. x_0, X 'in keyfi bir noktası olduğundan $g \circ f$ bileşke fonksiyonu dijital süreklidir. ■

Önerme 2.1.7 Dijital sürekli fonksiyonların toplamının dijital sürekli olması gerekmez.

Örnek 2.1.8 $f, g: [0,2]_2 \to [0,4]_2$ olmak üzere iki dijital sürekli fonksiyon olsun.

$$f(x) = 2x$$

$$g(x) = x + 1$$

şeklinde tanımlansın.

Bu takdirde $(f+g)(x) : [0,2]_2 \to [0,4]_2$ olup, $2 \in [0,2]_2$ noktası için

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 4 + 2 = 7 \notin [0,4]_2$$

olduğundan $(f+g)(x)$ fonksiyonu dijital sürekli değildir.

Önerme 2.1.9. [1,2] Dijital görüntülerde birim dönüşüm dijital süreklidir.

İspat: $X \subseteq I_k$ dijital görüntü, $I : X \to X$ birim dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. $\forall \varepsilon \geq 1$ için bir $\delta \geq 1$ sayısı vardır öyle ki $x \in X$ için $d_k(x_0, x) \leq \delta$ olduğunda $d_k(I(x_0), I(x)) \leq \varepsilon$ olup olmadığını inceleyelim:

$$d_k(I(x_0), I(x)) \leq \varepsilon \Leftrightarrow d_k(x_0, x) \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow d_k(x_0, x) \leq \delta \quad (\varepsilon = \delta).$$

Bu durumda $d_k(x_0, x) \leq \delta \Rightarrow d_k(I(x_0), I(x)) \leq \varepsilon$ önermesi doğru olur. I birim dönüşümü keyfi $x_0 \in X$ noktasında sürekli olduğundan I, X 'in tüm noktalarında süreklidir. ■

Tanım 2.1.10 [2] $X, Y \subset \mathbb{Z}^n$ iki dijital görüntü olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonu dijital sürekli, birebir ve örten olsun. Eğer f^{-1} dijital sürekli ise f 'e dijital homeomorfizma denir. X ve Y dijital görüntülerine ise homeomorftur denir.

Tanım 2.1.11 [2] X ve Y dijital görüntüler ve $Y \subseteq X$ olsun. Bu takdirde $\forall y \in Y$ için $r(y) = y$ ise $r : X \to Y$ fonksiyonuna dijital retraksiyon (geriçekilim) denir. Y, X 'in dijital retraktıdır denir.

Teorem 2.1.12 [2] X_0, X 'in dijital retraktı ve $f : X \to Y$ fonksiyonu dijital homeomorfizma olsun. Bu takdirde $f(X_0)$, Y ' nin dijital retraktıdır.

İspat: X_0 , X 'in retraktı olduğundan $\forall x \in X_0$ için $r(x) = x$ olacak şeklinde $r : X \to X_0$ fonksiyonu vardır. Bu takdirde $f \circ r \circ f^{-1} : Y \to f(X_0)$ fonksiyonun dijital retraksiyon olduğunu gösterelim. Dijital sürekli fonksiyonların bileşkesi dijital sürekli olduğundan $r \circ f^{-1} : Y \to X_0$ ve $f : X \to Y$ fonksiyonlarının bileşkesini alırsak $f \circ r \circ f^{-1} : X \to X_0$ elde ederiz. $f : X \to Y$ fonksiyonu dijital homeomorfizma olduğundan $X_0 \subseteq X$ ise $f(X_0) \subseteq f(X) \subseteq Y$ olduğundan $f(X_0) \subseteq Y$ elde edilir. $r_1 = f \circ r \circ f^{-1} : Y \to f(X_0)$ fonksiyonu için

$$f \circ r(f^{-1}(y)) = f(r(f^{-1}(y))) \qquad (r \textit{ retraksiyon olduğundan})$$

$$= f(f^{-1}(y))) \qquad (ff^{-1} \textit{ birim olduğundan})$$

$$= y$$

elde edilir. Sonuç olarak $f(X_0)$, Y 'nin dijital retraktıdır. ■

Tanım 2.1.13 [4] $X \subset \mathbb{Z}^n$ ve $Y \subset \mathbb{Z}^n$ in dijital görüntüler olduğunu kabul edelim. $f, g : X \to Y$, $(\kappa, \lambda) - \textit{sürekli}$ fonksiyonlar olsun. Pozitif bir m tamsayısının ve aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde bir $F : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \to Y$ fonksiyonunun var olduğunu kabul edelim.

i) Tüm $x \in X$ ler için $F(x, 0) = f(x)$ ve $F(x, m) = g(x)$;

ii) Tüm $x \in X$ ler için, tüm $t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$ ler için

$$F_x(t) = F(x, t)$$

ile tanımlı $F_x : [0, m]_{\mathbb{Z}} \to Y$ doğrulan fonksiyonu $(2, \lambda) - \textit{sürekli}$ dir.

iii) Tüm $t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$ ler için

$$F_t(x) = F(x, t), \qquad \forall t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$$

ile tanımlı $F_t : X \to Y$ doğrulan fonksiyonu $(\kappa, \lambda) - \textit{sürekli}$ dir.

Bu takdirde F , f ve g arasında $(\kappa,\lambda)-homotopisi$ olarak adlandırılır ve f ve g nin Y de $(\kappa,\lambda)-homotopik$ olduğu söylenir.

f ve g nin Y de dijital olarak $(\kappa,\lambda)-homotopik$ olduğunu göstermek için

$$f \simeq_{\kappa,\lambda} g$$

gösterimini kullanacağız.

Önerme 2.1.14 [4] Dijital homotopi dijital sürekli fonksiyonlar arasında bir denklik bağıntısıdır.

İspat:

$f: X \to Y$ dijital sürekli bir fonksiyon ve m pozitif tamsayı olsun.

$$F(x,t) = f(x) \quad \forall (x,t) \in X \times [0,m]_{\mathbb{Z}}$$

ile tanımlanan $F: X \times [0,m]_{\mathbb{Z}} \to Y$ fonksiyonu f 'den f 'ye dijital homotopidir. Böylece dijital homotop olma bağıntısı yansımalıdır.

m pozitif tamsayı olmak üzere $F: X \times [0,m]_{\mathbb{Z}} \to Y$ fonksiyonu $f, g: X \to Y$ dijital sürekli fonksiyonlar arasında dijital homotopi olsun. Bu takdirde

$$G(x,t) = F(x, m-t) \quad \forall (x,t) \in X \times [0,m]_{\mathbb{Z}}$$

ile tanımlanan $G: X \times [0,m]_{\mathbb{Z}} \to Y$ fonksiyonu g 'den f 'ye dijital homotopidir. Böylece dijital homotop olma bağıntısı simetriktir.

$F: X \times [0,m_0]_{\mathbb{Z}} \to Y$ fonksiyonu $f, g: X \to Y$ dijital sürekli fonksiyonları arasında bir dijital homotopi ve $G: X \times [0,m_1]_{\mathbb{Z}} \to Y$ fonksiyonu $g, h: X \to Y$ dijital sürekli fonksiyonları arasında bir dijital homotopi olsun. Bu takdirde

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,t), & t \in [0,m_0]_{\mathbb{Z}}; \\ G(x,t-m_0), & t \in [m_0, m_0+m_1]_{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

ile tanımlanan $H: X \times [0, m_0+m_1] \to Y$ fonksiyonu f ve h arasında dijital homotopidir. Böylece homotop olma bağıntısı geçişmelidir.

Sonuç olarak dijital homotopi dijital sürekli fonksiyonlar arasında bir denklik bağıntısıdır. ■

2.2. Esnek Kümeler

Tanım 2.2.1: [12] X evrensel bir küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. F, E'den X'in tüm alt kümelerinin içine bir dönüşüm ise, yani $P(X)$, X'in kuvvet kümesi olmak üzere;

$$F : E \to P(X)$$

ise (F, E) çifti X üzerinde bir esnek küme olarak adlandırılır.

Tanım2.2.2. [13] X üzerinde iki (F, A) ve (G, B) esnek kümesinin kesişimi (H, C) esnek kümedir. $C = A \cap B$ ve $\forall c \in C$ olmak üzere $H(c) = F(c) \cap G(c)$ dir. Bu kesişim $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3. [13] X üzerinde iki (F, A) ve (G, B) esnek kümesinin birleşimi yine bir esnek kümedir. $C = A \cup B$ ve $\forall c \in C$ için,

$$H(\varepsilon) = \begin{cases} F(\varepsilon), & \varepsilon \in A - B \\ G(\varepsilon), & \varepsilon \in B - A \\ F(\varepsilon) \cup G(\varepsilon), & \varepsilon \in A \cap B. \end{cases}$$

Bu bağıntı $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.4. [13] X üzerindeki bir (F, A) esnek kümesi $\forall a \in A$ için $F(a) = \varnothing$ ise bir boş (null) esnek küme olarak adlandırılır ve Φ ile gösterilir.

Tanım 2.2.5 [13] X üzerindeki $\tilde{X}$ esnek kümesi $\forall a \in A$ için $F(a) = X$ olacak şekilde tanımlı bir (F, X) esnek kümesidir.

Tanım 2.2.6. [18] (F, E), X üzerinde bir esnek küme olsun. (F, E) esnek kümesi, $e \in E$ için $F(e) = \{x\}$ ve tüm $e' \in E - \{e\}$ için $F(e') = \varnothing$ ise bir esnek nokta olarak adlandırılır, (x_e, E) ile gösterilir.

Tanım 2.2.7. [20] τ , X üzerinde esnek kümelerin bir koleksiyonu olsun. Bu takdirde τ aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa X üzerinde bir esnek topoloji olarak adlandırılır.

i) $\Phi, \tilde{X} = (F, X) \in \tau$,

ii) τ 'daki herhangi (keyfi) sayıda esnek kümelerin birleşimi τ 'ya aittir.

iii) τ ' daki herhangi iki esnek kümenin kesişimi yine τ 'ya aittir.

(X, τ, E) üçlüsüne X üzerinde bir esnek topolojik uzay denir.

Tanım 2.2.8. [29] (X, τ, E) , X üzerinde esnek topolojik uzay, (F, E) , X üzerinde bir esnek küme olsun. Bu takdirde $x \in (G, E) \subseteq (F, E)$ olacak şekilde (G, E) esnek açık kümesi varsa (F, E) esnek kümesine $x \in X$ noktasının esnek komşuluğu denir.

Tanım 2.2.9. [29] (X, τ, E) , X üzerinde esnek topolojik uzay, (F, E) , X üzerinde bir esnek küme ve $x \in X$ olsun. Bu takdirde $x \in (G, E) \subseteq (F, E)$ olacak şekilde (G, E) esnek açık kümesi varsa $x \in X$ noktasına (F, E) nin esnek iç noktasıdır denir.

Tanım 2.2.10. [16] (X, τ, E) ve (Y, τ', E) iki esnek topolojik uzay olsun. $f : (X, \tau, E) \to (Y, \tau', E)$ bir dönüşüm olsun. $(f(x_e), E)$ ' nin her bir (H, E) esnek komşuluğu için $f((F, E)) \subset (H, E)$ olacak şekilde (x_e, E) 'nin bir (F, E) esnek komşuluğu mevcutsa bu takdirde f 'e (x_e, E) 'de esnek sürekli dönüşüm denir.

Tanım 2.2.11. (X, τ, E) ve (Y, σ, E) iki esnek topolojik uzay (I, ω, E) Euclidean uzay tarafından doğrulan esnek topolojik uzay ve $f, g : (X, \tau, E) \to (Y, \sigma, E)$ esnek sürekli iki dönüşüm olmak üzere

$$H : (X, \tau, E) \times (I, \omega, E) \to (Y, \sigma, E)$$

$$H((x_e, E), (0, E)) = f((x_e, E))$$

$$H((x_e, E), (1, E)) = g((x_e, E))$$

olacak şekilde H esnek sürekli dönüşümüne f ve g arasında esnek homotopi denir ve $f \simeq_s g$ ile gösterilir.

Lemma 2.2.12. [16] (X,τ,E) esnek topolojik uzay olsun. $1_X : X \to X$ birim dönüşümü esnek sürekli değildir.

İspat: $X=\{h_1,h_2,h_3\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve $\tau=\{\phi,\tilde{X},(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E),(F_4,E)\}$ ve

$\tau'=\{\phi,\tilde{X},(G_1,E),(G_2,E),(G_3,E),(G_4,E)\}$, X üzerinde iki esnek topolojik uzay ve

$(F_1,E),(F_2,E),(F_3,E),(F_4,E),(G_1,E),(G_2,E),(G_3,E),(G_4,E),$ X üzerinde esnek açık kümeler olmak üzere

$$F_1(e_1)=\{h_2\},F_1(e_2)=\{h_1\},F_2(e_1)=\{h_2,h_3\},F(e_1)=\{h_1\},F_2(e_2)=\{h_1,h_2\},F_3(e_1)=\{h_3\},$$

$$F_3(e_2)=\{h_1,h_2\},\ F_4(e_1)=\varnothing,\ F_2(e_2)=\{h_1\};$$

ve

$$G_1(e_1)=\{h_2\},\ G_1(e_2)=\{h_1\},\ G_2(e_1)=\{h_2,h_3\},\ G_2(e_2)=\{h_1,h_2\},\ G_3(e_1)=\{h_1,h_2\},$$

$$G_3(e_2)=X,\ G_4(e_1)=\{h_2\},G_4(e\ )=\{h_1,h_2\}$$

olarak tanımlansın. $f^{-1}((G_3,E))=\{(e_1,\{h_1,h_2\}),(e_2,X)\}\notin(X,\tau,E)$ ve

$f^{-1}((G_4,E))=\{(e_1,\{h_2\}),(e_2,\{h_1,h_2\})\}\notin(X,\tau,E)$ dir. Bundan dolayı $f=1_x : X \to X$ dönüşümü esnek sürekli değildir. ■

Sonuç 2.2.13: Esnek uzaylar büzülebilir uzaylar değildir.

İspat: (X,τ,E) esnek uzayındaki $1_x : X \to X$ dönüşümü esnek sürekli olmadığından $c : X \to X$ sabit dönüşümü için 1_x ve c arasında bir esnek homotopi yoktur. Böylece (X,τ,E) uzay büzülebilir değildir. ■

3. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE ESNEK KÜME YAPISI

Tanım 3.1.1. κ, $\mathbb{Z}^n$'de bir yakınlık bağıntısı ve E parametrelerin bir kümesi olsun. F, E'den X'in tüm $\kappa-$yakın alt kümelerinin içine bir dönüşüm ise $X \subset \mathbb{Z}^n$ dijital görüntüsü üzerindeki (F, E) ikilisi $\kappa-$dijital esnek küme olarak adlandırılır. Yani $P(X)$, X'in kuvvet kümesi olmak üzere

$$F : E \to P(X)$$

dir. $\kappa-$yakınlıklı dijital esnek bir küme $(F, E)_\kappa$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.2. $\mathbb{Z}$'de $2-$yakınlık bağıntısını göz önüne alalım. $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesi ve $X = \{0,1,2\} \subset \mathbb{Z}$ $2-$yakınlıklı dijital görüntü olmak üzere X üzerinde $F : E \to P(X)$ dönüşümünü

$$F(e_1) = \{\{0\},\{1\},\{2\}\}$$

$$F(e_2) = \{\{0,1\},\{1,2\}\}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde $(F, E)_2$ $2-$dijital esnek küme

$$(F, E)_2 = \{(e_1, \{\{0\},\{1\},\{2\}\}), (e_2, \{\{0,1\},\{1,2\}\})\}$$

şeklindedir.

Örnek 3.1.3: $\mathbb{Z}^2$ de $\kappa_1 = 4$ ve $\kappa_2 = 8$ yakınlık bağıntılarını ve $X = \{(0,0),(1,0),(2,0),(0,1),(0,-1),(1,1),(2,1),(2,-1)\} \subset \mathbb{Z}^2$ dijital görüntüsünü göz önüne alalım. $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ parametre kümesi olsun. $F : E \to P(X)$ olmak üzere

$$F_1(e_1)_4 = \{(1,0),(2,0)\},$$
$$F_1(e_2)_4 = \{(0,0),(1,0)\},$$

$$F_1(e_3)_4 = \{(1,0)\};$$

$$F_2(e_1)_8 = \{(1,0),(0,1)\},$$

$$F_2(e_2)_8 = \{(1,0),(2,-1)\},$$

$$F_2(e_3)_8 = \{(1,0),(2,-1)\}$$

olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $(F_1,E)_4$ $4-$dijital esnek kümesi ve $(F_2,E)_8$ $8-$ yakınlıklı dijital esnek kümesi;

$$(F_1,E)_4 = \{(e_1,\{(1,0),(2,0)\}),(e_2,\{(0,0),(1,0)\}),(e_3,\{(1,0)\})\},$$

$$(F_2,E)_8 = \{(e_1,\{(1,0),(0,1)\}),(e_2,\{(1,0),(2,-1)\}),(e_3,\{(1,0),(2,-1)\})\}$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.4. $X \subset \mathbb{Z}^n$ $\kappa-$ yakınlıklı dijital görüntü olsun. $(F,A)_\kappa$, X dijital görüntüsü üzerinde bir dijital esnek küme olmak üzere $\forall a \in A$ için $F(a) = \varnothing$ ise, $(F,A)_\kappa$ nın bir boş dijital esnek küme olduğu söylenir ve Φ_κ ile gösterilir.

Tanım 3.1.5. X üzerinde iki $(F,A)_\kappa$ ve $(G,B)_\kappa$ dijital esnek kümenin kesişimi $C = A \cap B$ ve $\forall c \in C$ için $H(c) = F(c) \cap G(c)$ olmak üzere $(H,C)_\kappa$ dijital esnek kümesidir. Bu kesişim $(F,A)_\kappa \tilde{\cap} (G,B)_\kappa = (H,C)_\kappa$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.6 $X = \{(0,0),(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$ dijital görüntü ve $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ parametre kümesi olmak üzere $(F,A)_\kappa$ ve $(G,B)_\kappa$ dijital esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(F,A)_\kappa = \{(e_1,\{(0,0),(1,0)\}),(e_2,\{(0,-1),(-1,0)\}),(e_4,\{(-1,0),(1,0)\})\},$$

$$(G,B)_\kappa = \{(e_1,\{(1,0),(-1,0)\}),(e_2,\{(0,1),(-1,0)\}),(e_3,\{(0,1),(0,0)\})\}.$$

$C = A \cap B = \{e_1,e_2\}$ olmak üzere $\forall c \in C$ için

$$F(e_1) \cap G(e_1) = H(e_1) = \{(1,0)\}$$

$$F(e_2) \cap G(e_2) = H(e_2) = \{(0,-1)\}$$

dir. Bu takdirde $(H,C)_\kappa = \{(e_1,\{(1,0)\}),(e_2,\{(0,-1)\})\}$ dijital esnek kümesi $(F,A)_\kappa$ ve $(G,B)_\kappa$ dijital esnek kümelerinin kesişimidir.

Tanım 3.1.7. X üzerinde $(F,A)_\kappa$ ve $(G,B)_\kappa$ iki dijital esnek kümenin birleşimi $C=A\cup B$ ve $\forall c\in C$ için

$$H(\varepsilon)=\begin{cases}F(\varepsilon), & \varepsilon\in A-B\\ G(\varepsilon), & \varepsilon\in B-A\\ F(\varepsilon)\cap G(\varepsilon), & \varepsilon\in A\cap B\end{cases}$$

olmak üzere $(H,C)_\kappa$ dijital esnek kümesidir.

İki dijital esnek kümenin birleşimi $(F,A)_\kappa \tilde{\cup} (G,\mathrm{B})_\kappa = (H,C)_\kappa$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.8 $X=\{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0),(1,-1),(1,1),(-1,-1),(-1,1)\}$ dijital görüntüsünü göz önüne alalım. $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ parametre kümesi, $A,B\subset E$ ve $F:A\to P(X),\ G:B\to P(X)$ olmak üzere $(F,A)_\kappa$ ve $(G,B)_\kappa$ dijital esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$(F,A)_\kappa=\{(e_1,\{(0,1),(0,0)\}),(e_2,\{(0,-1),(1,0)\}),(e_3,\{(-1,-1),(1,1)\})\},$$

$$(G,B)_\kappa=\{(e_3,\{(1,1),(0,0)\}),(e_4,\{(-1,1),(-1,0)\}),(e_5,\{(1,0),(-1,-1)\})\}.$$

$C=A\cup B=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ olmak üzere $\forall c\in C$ için

$$H(e_1)=F(e_1)\cup G(e_1);\quad e_1\in A-B;$$

$$H(e_1)=\{(0,1),(0,0)\},$$

$$H(e_2)=F(e_2)\cup G(e_2);\quad e_2\in A-B$$

$$H(e_2)=\{(0,-1),(1,0)\},$$

$$H(e_3)=F(e_3)\cup G(e_3);\quad e_3\in A\cap B$$

$$H(e_3)=\{(1,1)\}$$

$$H(e_4)=F(e_4)\cup G(e_4);\quad e_4\in B-A$$

$$H(e_4)=\{(-1,1),(-1,0)\},$$

$$H(e_5) = F(e_5) \cup G(e_5); \quad e_5 \in B - A$$

$$H(e_5) = \{(1,0),(-1,-1)\}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

$$(H,C)_\kappa = \{(e_1,\{(0,1),(0,0)\},(e_2,\{(0,-1),(1,0)\}),(e_3,\{(1,1)\}),$$
$$(e_4,\{(-1,1),(-1,0)\}),(e_5,\{(1,0),(-1,-1)\})\}$$

dijital esnek kümesi $(F,A)_\kappa$ ve $(G,B)_\kappa$ dijital esnek kümelerinin birleşimidir.

Tanım 3.1.9. κ nın $\mathbb{Z}^n$ üzerinde bir yakınlık bağıntısı olduğunu kabul edelim. $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ dijital kümesi üzerinde $(F,E)_\kappa$ dijital esnek bir küme olsun. Bu takdirde $\{x_e, y_e\} \subseteq (F,E)_\kappa$, $x_e \neq y_e$ nokta çifti için $x(e) = x_0(e)$, $x_c(e) = y(e)$ ve $x_i(e)$ ve $x_{i+1}(e)$ $\kappa-$ komşu, $i \in \{0,1,...,c-1\}$ olacak şekilde bir $\{x_0(e), x_1(e),..., x_c(e)\} \subseteq (F,E)_\kappa$ alt kümesi varsa $(F,E)_\kappa$ dijital esnek kümesine dijital esnek bağlantılıdır denir.

Tanım 3.1.10. $(F,E)_\kappa$, X üzerinde dijital esnek küme olsun. $(F,E)_\kappa$ dijital esnek kümesi $e \in E$ için $F(e)_\kappa = \{x\}$ ve tüm $e' \in E - \{e\}$ için $F(e')_\kappa = \varnothing$ ise bir dijital esnek nokta olarak adlandırılır ve $(x_e,E)_\kappa$ ile gösterilir.

4. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE ESNEK SÜREKLİLİK

Tanım 4.1.1. κ_1 ve κ_2 $\mathbb{Z}^n$'de birer yakınlık bağıntısı, E parametrelerin kümesi olsun. $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ dijital görüntüsü üzerindeki esnek kümeler $(F_i, E)_{\kappa_1}$, $(i = 1, 2, ..., n)$ ve $Y \subseteq \mathbb{Z}^n$ üzerindeki dijital esnek kümeler $(G_j, E)_{\kappa_2}$, $(j = 1, 2, ..., n)$ olsun. X üzerinde tanımlı her bir dijital esnek bağlantılı kümenin f altındaki görüntüsü Y üzerinde tanımlı dijital esnek bağlantılı küme ise, bu takdirde $f : X \to Y$ fonksiyonu dijital esnek sürekli olarak adlandırılır.

Örnek 4.1.2. $\mathbb{Z}^2$ de $4-$ yakınlık bağıntısını göz önüne alalım. $X = \{(0,1), (0,0), (0,-1), (-1,0), (1,0)\}$, $Y = \{(2,1), (3,0), (2,-1), (2,0), (1,0)\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. $(F_1, E)_4, (F_2, E)_4$, X üzerinde ve $(G_1, E)_4, (G_2, E)_4$, Y dijital görüntüsü üzerinde tanımlı esnek kümeler olsun. $F_i : E \to P(X)$, $i = 1, 2$ dönüşümlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$F_1(e_1)_4 = \{(1,0), (0,0)\}$,

$F_1(e_2)_4 = \{(0,0), (0,-1), (-1,0)\}$;

$F_2(e_1)_4 = \{(0,0), (0,-1), (0,1)\}$,

$F_2(e_2)_4 = \{(-1,0), (0,0), (1,0)\}$.

$$(F_1, E)_4 = \{(e_1, \{(1,0), (0,0)\}), (e_2, \{(0,0), (0,-1), (-1,0)\})\}$$

$$(F_2, E)_4 = \{(e_1, \{(0,0), (0,-1), (0,1)\}), (e_2, \{(0,0), (1,0), (-1,0)\})\}$$

olarak alalım. $G_i : E \to P(Y)$, $i = 1, 2$ dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$G_1(e_1)_4 = \{(2,0)\}$,

$G_1(e_2)_4 = \{(2,0), (2,-1), (3,0)\}$;

$G_2(e_1)_4 = \{(2,1), (2,-1), (2,0)\}$,

$G_2(e_2)_4 = \{(2,0), (3,0)\}$.

$$(G_1,E)_4=\{(e_1,\{(2,0)\}),(e_2,\{(2,0),(2,-1),(3,0)\})\}$$

$$(G_2,E)_4=\{(e_1,\{(2,1),(2,-1),(2,1)\}),(e_2,\{(2,0),(3,0)\})\}$$

olarak alınsın. $f:X\to Y$ fonksiyonu ise aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$f((0,0))=f((1,0))=(2,0),\quad f((0,-1))=(2,-1),\quad f((-1,0))=(3,0),\quad f((0,1))=(2,1).$$

$$f((F_1,E)_4)=(G_1,E)_4,$$

$$f((F_2,E)_4)=(G_2,E)_4$$

olduğundan f fonksiyonu dijital esnek süreklidir.

Örnek 4.1.3. $X=\{(1,0),(0,1),(1,1),(-1,1),(-1,0),(-1,-1),(0,-1),(1,-1)\}\subseteq\mathbb{Z}^2$

ve

$$Y=\{(-1,0),(0,0),(0,1),(0,-1),(-1,-1),(-1,1),(-2,0),(-2,-1),(-2,1)\}\subseteq\mathbb{Z}^2$$

dijital görüntüleri üzerinde $8-$ yakınlık bağıntısını göz önüne alalım. $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ parametrelerin kümesi ve $(F_1,E)_8,(F_2,E)_8,(F_3,E)_8,(F_4,E)_8$ kümeleri X üzerinde dijital esnek kümeler; $(G_1,E)_8,(G_2,E)_8,(G_3,E)_8,(G_4,E)_8$ kümeleri Y üzerinde dijital esnek kümeler olsun. $F_i:E\to P(X),\ i=1,2,3,4$ olmak üzere

$$(F_1,E)_8=\{(e_1,\{(1,0),(1,1),(1,-1)\}),(e_2,\varnothing),(e_3,\varnothing),(e_4,\varnothing)\},$$

$$(F_2,E)_8=\{(e_1,\varnothing),(e_2,\{(0,1),(0,0),(0,-1)\}),(e_3,\varnothing),(e_4,\varnothing)\},$$

$$(F_3,E)_8=\{(e_1,\varnothing),(e_2,\varnothing),(e_3,\{(-1,0),(-1,-1),(-1,1)\}),(e_4,\varnothing)\},$$

$$(F_4,E)_8=\{(e_1,\varnothing),(e_2,\varnothing),(e_3,\varnothing),(e_4,\{(0,0),(-1,0),(-1,-1)\})\}$$

dijital esnek kümelerini ve $G_i:E\to P(X),\ i=1,2,3,4$ olmak üzere

$$(G_1,E)_8=\{(e_1,\{(-2,1),(-2,0),(-2,-1)\}),(e_2,\varnothing),(e_3,\varnothing),(e_4,\varnothing)\},$$

$$(G_2,E)_8=\{(e_1,\varnothing),(e_2,\{(-1,1),(-1,0),(-1,-1)\}),(e_3,\varnothing),(e_4,\varnothing)\},$$

$(G_3, E)_8 = \{(e_1, \varnothing), (e_2, \varnothing), (e_3, \{(0,1), (0,0), (0,-1)\}), (e_4, \varnothing)\}$,

$(G_4, E)_8 = \{(e_1, \varnothing), (e_2, \varnothing), (e_3, \varnothing), (e_4, \{(0,-1), (0,0)(-1,0)\})\}$,

dijital esnek kümelerini tanımlayalım.

$$f : X \to Y$$

dönüşümünü

$$f((1,0)) = (-2,-0),$$

$$f((0,1)) = (-1,1),$$

$$f((1,1)) = (-2,1),$$

$$f((-1,1)) = (0,1),$$

$$f((-1,0)) = (0,0),$$

$$f((-1,-1)) = (0,-1),$$

$$f((0,-1)) = (-1,-1),$$

$$f((1,-1)) = (-2,-1)$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde f fonksiyonu $8-$ dijital esnek süreklidir. Gerçekten de X üzerinde tanımlanan dijital esnek kümelerin f altındaki görüntüsünü aldığımızda

$f(F_1)(e_1) = \{(-2,1), (-2,0), (-2,-1)\}$, $f(F_1)(e_2) = \varnothing$, $f(F_1)(e_3) = \varnothing$, $f(F_1)(e_4) = \varnothing$,

$f(F_2)(e_1) = \varnothing$, $f(F_2)(e_2) = \{(-1,1), (-1,0), (-1,-1)\}$, $f(F_2)(e_3) = \varnothing$, $f(F_2)(e_4) = \varnothing$,

$f(F_3)(e_1) = \varnothing$, $f(F_3)(e_2) = \varnothing$, $f(F_3)(e_3) = \{(0,1), (0,0), (0,-1)\}$, $f(F_3)(e_4) = \varnothing$,

$f(F_4)(e_1) = \varnothing$, $f(F_4)(e_2) = \varnothing$, $f(F_4)(e_3) = \varnothing$, $f(F_4)(e_4) = \{(0,-1), (0,0), (-1,0)\}$.

$f((F_1, E)_8) = \{(e_1, \{(-2,1), (-2,0), (-2,-1)\}), (e_2, \varnothing), (e_3, \varnothing), (e_4, \varnothing)\} = (G_1, E)_8$,

$f((F_2, E)_8) = \{(e_1, \varnothing), (e_2, \{(-1,1), (-1,0), (-1,-1)\}), (e_3, \varnothing), (e_4, \varnothing)\} = (G_2, E)_8$,

$f((F_3,E)_8)=\{(e_1,\varnothing),(e_2,\varnothing),(e_3,\{(0,1),(0,0),(0,-1)\}),(e_4,\varnothing)\}=(G_3,E)_8$,

$f((F_4,E)_8)=\{(e_1,\varnothing),(e_2,\varnothing),(e_3,\varnothing),(e_4,\{(0,-1),(0,0)(-1,0)\})\}=(G_4,E)_8$

olarak elde ederiz.

$8-$ bağlantılı dijital esnek kümelerin f altındaki görüntüsünü aldığımızda Y nin $8-$ bağlantılı dijital esnek kümelerini elde ettik. Bundan dolayı f fonksiyonu $8-$ yakınlık bağıntısına göre dijital esnek süreklidir.

Diğer taraftan f fonksiyonu $4-$ dijital esnek sürekli değildir. X 'in $(F_2,E)_8$ alt kümesini göz önüne alalım. Bu esnek küme $4-$ dijital esnek bağlantılıdır ancak f altında görüntüsünü aldığımızda Y nin $(G_2,E)_8$ alt kümesi $4-$ dijital esnek bağlantılı değildir.

Teorem 4.1.4. Dijital esnek sürekli fonksiyonların toplamının dijital esnek sürekli olması gerekmez.

İspat: $\mathbb{Z}^2$ de $4-$ yakınlık bağıntısını göz önüne alalım. $X=\{(0,0),(1,0),(2,0),(1,1),(1,-1)\}$, $Y=\{(0,0),(1,0),(2,0)\}$, $\mathbb{Z}^2$ de dijital görüntüler ve $E=\{e_1,e_2\}$ parametrelerin kümesi olsun. $F_i:E\to P(X),\ G_i:E\to P(Y),\ i=1,2,3,4$ olmak üzere $(F_1,E)_4,(F_2,E)_4,(F_3,E)_4$, X üzerinde dijital esnek kümeler ve $(G_1,E)_4,(G_2,E)_4,(G_3,E)_4,(G_4,E)_4,(G_5,E)_4,(G_6,E)_4$, Y üzerinde dijital esnek kümeler olmak üzere;

$$(F_1,E)_4=\{(e_1,\{(1,0),(1,-1)\}),(e_2,\{(0,0),(1,0)\})\},$$

$$(F_2,E)_4=\{(e_1,\{(2,0)\}),(e_2,\{(1,0),(2,0)\})\},$$

$$(F_3,E)_4=\{(e_1,\{(1,1)\}),(e_2,\{(1,1),(0,1)\})\},$$

$$(G_1,E)_4=\{(e_1,\{(-1,0),(-2,0)\}),(e_2,\{(0,0),(-1,0)\})\},$$

$$(G_2,E)_4=\{(e_1,\{(-1,1)\}),(e_2,\{(-1,0),(-1,1)\})\},$$

$$(G_3, E)_4 = \{(e_1, \{(-1,-1)\}), (e_2, \{(-1,-1), (-1,0)\})\},$$

$$(G_4, E)_4 = \{(e_1, \{(-1,0), (-1,-1)\}), (e_2, \{(-1,1), (-1,0)\})\},$$

$$(G_5, E)_4 = \{(e_1, \{(0,0)\}), (e_2, \{(-1,0), (0,0)\})\},$$

$$(G_6, E)_4 = \{(e_1, \{(-2,0)\}), (e_2, \{(-2,0), (-1,0)\})\},$$

olarak alalım.

$$f : X \to Y$$

dönüşümünü

$$f((0,0)) = (0,0),$$

$$f((1,0)) = (-1,0),$$

$$f((2,0)) = (-1,1),$$

$$f((1,1)) = (-1,-1),$$

$$f((1,-1)) = (-2,0)$$

olarak tanımlayalım.

$$f((F_1, E)_4) = (G_1, E)_4,$$

$$f((F_2, E)_4) = (G_2, E)_4,$$

$$f((F_3, E)_4) = (G_3, E)_4,$$

olduğundan f dönüşümü dijital esnek süreklidir.

Diğer taraftan $g : X \to Y$ dönüşümü nü

$$g((0,0)) = (-1,1),$$

$$g((1,0)) = (-1,0),$$

$$g((2,0)) = (0,0),$$

$g((1,1)) = (-2,0)$,

$g((1,-1)) = (-1,-1)$,

olarak tanımlayalım. Bu taktirde g fonksiyonu

$$g((F_1,E)_4) = (G_4,E)_4,$$

$$g((F_2,E)_4) = (G_5,E)_4,$$

$$g((F_3,E)_4) = (G_6,E)_4,$$

olduğundan dijital esnek süreklidir.

$$(f+g)(1,1) = (-1,-1)+(-2,0) = (-3,1) \notin Y$$

olup, iki dijital esnek sürekli fonksiyonun toplamının dijital esnek sürekli olması gerekmez. ■

Teorem 4.1.5. Dijital esnek sürekli fonksiyonların bileşkesi dijital esnek süreklidir. Yani $X,Y,Z \subseteq \mathbb{Z}^n$ olmak üzere $\kappa_0,\kappa_1,\kappa_2$ sırasıyla X,Y,Z dijital görüntüleri üzerinde yakınlık bağıntısı olsun. $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ dijital esnek sürekli fonksiyonlar ise, bu takdirde $g \circ f: X \to Z$ dijital esnek süreklidir.

İspat: $(F,E)_{\kappa_0}$, X üzerinde tanımlı κ_0-bağlantılı herhangi bir dijital esnek küme olsun. f dijital esnek sürekli olduğundan $f((F,E)_{\kappa_0})$, Y üzerinde tanımlı κ_1- bağlantılı dijital esnek kümedir.

$$g \circ f((F,E)_{\kappa_0}) = g(f((F,E)_{\kappa_0}))$$

olup, g fonksiyonu dijital esnek sürekli olduğundan Y üzerinde tanımlı κ_1- bağlantılı $f((F,E)_{\kappa_0})$ dijital esnek kümesi için $g(f((F,E)_{\kappa_0}))$, Z üzerinde tanımlı κ_2- bağlantılı dijital esnek kümedir. Böylece $g \circ f$ dijital esnek süreklidir. ■

Teorem 4.1.6. Dijital görüntülerde birim dönüşüm dijital esnek süreklidir.

İspat: κ, $\mathbb{Z}^n$'de bir yakınlık bağıntısı olsun. X üzerinde tanımlı $\kappa-$ bağlantılı herhangi bir $(F,E)_\kappa$ dijital esnek kümesini alalım. Birim dönüşüm altında

görüntüsünü aldığımızda $I((F,E)_\kappa)=(F,E)_\kappa$ olup $(F,E)_\kappa$ dijital esnek bağlantılı olduğundan $I((F,E)_\kappa)=(F,E)_\kappa$ dijital esnek bağlantılıdır. Şu halde $I:X\to X$ birim dönüşümü dijital esnek süreklidir. ■

Örnek 4.1.7. $\mathbb{Z}^2$ de $4-$ yakınlık bağıntısını göz önüne alalım. $X=\{(0,1),(0,0),(-1,0),(0,-1),(1,0)\}\subseteq\mathbb{Z}^2$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve $(F_1,E)_4,(F_2,E)_4$ X dijital görüntüsü üzerinde dijital esnek kümeler olsun. $F_i:E\to P(X),\ i=1,2$ olmak üzere

$$(F_1,E)_4=\{(e_1,\{(0,0),(1,0),(0,1)\}),(e_2,\{(0,0),(1,0),(-1,0)\})\},$$

$$(F_2,E)_4=\{(e_1,\{(0,1),(0,-1),(0,0)\}),(e_2,\{(-1,0),(0,0),(1,0)\})\}$$

dijital esnek bağlantılı kümelerini tanımlayalım.

$$I((F_1,E)_4)=(F_1,E)_4\ ,$$

$$I((F_2,E)_4)=(F_2,E)_4$$

olduğundan $I:X\to X$ birim dönüşümü dijital esnek süreklidir.

Örnek 4.1.8. $\mathbb{Z}^2$ nin, $8-$ yakınlıklı $X=\{(0,0),(1,0),(0,1),(0,-1),(-1,0),(-1,1),(1,1),(1,-1),(-1,-1)\}$ dijital görüntüsünü göz önüne alalım. $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ parametrelerin kümesi ve X üzerinde $F_i:E\to P(X),\ i=1,2,3,4$ olmak üzere $(F_1,E)_8,(F_2,E)_8,(F_3,E)_8,(F_4,E)_8$ dijital esnek kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.
$(F_1,E)_8=\{(e_1,\{(1,0),(1,1)\}),(e_2,\{(1,0)\}),(e_3,\varnothing),(e_4,\{(-1,0)\})\},$

$(F_2,E)_8=\{(e_1,\{(0,-1),(1,-1),(-1,-1)\}),(e_2,\{(0,1),(-1,1)\}),$
$(e_3,\{(0,1),(0,0)\}),(e_4,\{(1,-1),(1,0)\})\},$

$(F_3,E)_8=\{(e_1,\varnothing),(e_2,\{(0,1)\}),(e_3,\{(-1,0),(-1,-1)\}),(e_4,\{(1,1),(0,1)\})\},$

$(F_4,E)_8=\{(e_1,\{(0,-1)\}),(e_2,\{(0,1)\}),(e_3,\{(-1,1)\}),(e_4,\{(0,1)\})\}$

$I : X \to X$ birim dönüşüm olmak üzere;

$I((F_1, E)_8) = (F_1, E)_8$, $I((F_2, E)_8) = (F_2, E)_8$, $I((F_4, E)_8) = (F_4, E)_8$.

olduğundan $I : X \to X$ birim dönüşümü dijital esnek süreklidir.

5. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE ESNEK HOMEOMORFİZMA

Tanım 5.1.1. κ yakınlık bağıntısı ile birlikte $X, Y \subseteq \mathbb{Z}^n$ dijital görüntülerini göz önüne alalım. $F_i : E \to P(X),\ G_i : E \to P(Y),\ i = 1,2,...,n$ olmak üzere $(F_i, E)_\kappa,\ i = 1,2,...,n,$ X üzerinde tanımlı dijital esnek kümeler, $(G_i, E)_\kappa,\ i = 1,2,...,n,$ Y üzerinde tanımlı dijital esnek kümeler olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonunun dijital esnek sürekli, birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer f^{-1} dijital esnek sürekli ise f 'e dijital esnek homeomorfizma denir. X ve Y ye de dijital esnek homeomorfik kümeler denir.

Örnek 5.1.2. $X = [-1,1]$, $Y = [0,2]$ $\mathbb{Z}$ de $2-$ yakınlıklı dijital görüntüler olsun. Parametre kümesini $E = \{e_1, e_2\}$ olarak alalım. X dijital görüntüsü üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan $(F_1, E)_2, (F_2, E)_2$ dijital esnek kümelerini ve Y dijital görüntüsü üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan $(G_1, E)_2$, $(G_2, E)_2$ dijital esnek kümelerini göz önüne alalım.

$$F_1(e_1) = \{0\},\ F_1(e_2) = \{-1, 0, 1\},$$

$$F_2(e_1) = \{1\},\ F_2(e_2) = \{0\}$$

ve

$$G_1(e_1) = \{1\},\ G_1(e_2) = \{0, 1, 2\},$$

$$G_2(e_1) = \{2\},\ G_2(e_2) = \{1\}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde $f(x) = x + 1$ fonksiyonu X kümesinden Y kümesine dijital esnek homeomorfizmadır. Gerçekten de X dijital görüntüsü üzerinde tanımlı $2-$dijital esnek bağlantılı tüm kümelerin f altındaki görüntüleri de $2-$dijital esnek bağlantılıdır:

$$f(F_1)(e_1) = \{1\},$$

$$f(F_1)(e_2) = \{0, 1, 2\},$$

$f(F_2)(e_1)=\{2\}$,

$f(F_2)(e_2)=\{1\}$;

$f((F_1,E)_2)=\{(e_1,\{1\}),(e_2,\{0,1,2\})\}=(G_1,E)_2$,

$f((F_2,E)_2)=\{(e_1,\{2\}),(e_2,\{1\})\}=(G_2,E)_2$.

Bundan dolayı f dijital esnek süreklidir.

Diğer taraftan f birebir ve örtendir. $f^{-1}(x)=x-1$ fonksiyonu

$f^{-1}(G_1)(e_1)=\{0\}$,

$f^{-1}(G_1)(e_2)=\{-1,0,1\}$,

$f^{-1}(G_2)(e_1)=\{1\}$,

$f^{-1}(G_2)(e_2)=\{0\}$;

$f^{-1}((G_1,E)_2)=\{(e_1,\{0\}),(e_2,\{-1,0,1\})\}=(F_1,E)_2$,

$f^{-1}((G_2,E)_2)=\{(e_1,\{1\}),(e_2,\{0\})\}=(F_2,E)_2$

olduğundan f^{-1} fonksiyonu dijital esnek süreklidir. Dolayısıyla f fonksiyonu dijital esnek homeomorfizmadır. X ve Y dijital esnek kümeleri dijital esnek homeomorftur.

Teorem 5.1.3. Dijital esnek homeomorf olma bir denklik bağıntısıdır.

İspat: $X,Y,Z\subseteq\mathbb{Z}^n$ üzerinde sırasıyla tanımlı, $\kappa-$ yakınlıklı $(F_i,E)_\kappa$, $(G_i,E)_\kappa$ ve $(H_i,E)_\kappa$ $i=1,2,...,n$ dijital esnek kümelerini gözönüne alalım.

- $I:X\to X$ birim dönüşümü dijital esnek homeomorfizmadır. Bu yüzden dijital esnek homeomorfizma yansımalıdır.
- $f:X\to Y$ fonksiyonu dijital esnek homeomorfizma olsun. f dijital esnek homeomorfizm olduğundan dijital esnek sürekli, birebir ve örten bir fonksiyondur. Ayrıca f^{-1} dönüşümü de dijital esnek süreklidir. Buradan

kolayca görülebilir ki $f^{-1}: Y \to X$ fonksiyonu da dijital esnek homeomorfizma olup, simetri özelliği sağlanır.

- $f: X \to Y$ ve $g: Y \to Z$ dijital esnek homeomorfizma olsun. f ve g dijital esnek homeomorfizm olduğundan f ve g dijital esnek sürekli, birebir ve örtendir. Ayrıca f^{-1} ve g^{-1} dijital esnek süreklidir. f ve g dijital esnek sürekli olduğundan $g \circ f$ bileşkesi de dijital esnek süreklidir. Diğer taraftan f^{-1} ve g^{-1} dijital esnek sürekli olduğundan $f^{-1} \circ g^{-1}$ bileşkesi de dijital esnek süreklidir. $g \circ f$ dijital esnek sürekli ve $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$ dijital esnek sürekli olduğundan $g \circ f: X \to Z$ dijital esnek homeomorfizmadır. Böylece geçişme özelliği sağlanır. ■

Tanım 5.1.4 $X_0 \subseteq X$ olmak üzere X_0, X $\mathbb{Z}^n$ de $\kappa-$ yakınlıklı dijital görüntüler ve E parametre kümesi olsun. $F_i: E \to P(X), G_i: E \to P(X_0),\ i = 1,2,...,n$ olmak üzere $(F_i, E)_\kappa$, $i = 1,2,...,n$ nin X üzerinde ve $(G_i, E)_\kappa$, $i = 1,2,...,n$ nin X_0 üzerinde $(G_i, E)_\kappa \subseteq (F_i, E)_\kappa$ olacak şekilde dijital esnek kümeler olduğunu kabul edelim. $r: X \to X_0$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için $r(x) = x$ olacak tanımlı $r: X \to X_0$ fonksiyonuna dijital esnek retraksiyon, X_0 kümesine de X in dijital esnek retraktıdır denir.

Örnek 5.1.5 $\mathbb{Z}^2$ de $8-$ yakınlık bağıntısını göz önüne alalım. $X_0 = \{(0,0),(1,0),(2,0),(1,1),(1,-1)\}$ ve $X = \{(0,0),(0,1),(1,0),(-1,0),(1,-1),(1,1),(2,0),(2,1),(2,-1)\}$ dijital esnek görüntüler, $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesi ve $F_i: E \to P(X), G_i: E \to P(X_0),\ i = 1,2$ olsun. X üzerinde

$$(F_1, E)_8 = \{(e_1, \{(0,0),(1,1),(1,0)\}), (e_2, \{(1,0),(0,1),(1,1)\})\},$$

$$(F_2, E)_8 = \{(e_1, \{(1,0),(2,0),(2,1)\}), (e_2, \{(1,0),(1,-1),(2,-1)\})\},$$

dijital esnek kümelerini ve X_0 dijital görüntüsü üzerinde

$$(G_1, E)_8 = \{(e_1, \{(0,0),(1,0)\}), (e_2, \{(1,0),(1,1)\})\},$$

$$(G_2, E)_8 = \{(e_1, \{(2,0),(1,0)\}), (e_2, \{(1,0),(1,-1)\})\},$$

dijital esnek kümelerini göz önüne alalım. $r : X \to X_0$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$r((0,0)) = r(-1,0) = (0,0),$$

$$r((1,0)) = (1,0),$$

$$r((2,0)) = r(2,1) = (2,0),$$

$$r((1,1)) = r((0,1)) = (1,1),$$

$$r((1,-1)) = r((2,-1)) = (1,-1)$$

r fonksiyonu $\forall x \in X_0$ için $r(x) = x$ olduğundan r dijital esnek retraksiyondur. X_0 da X in dijital esnek retraktıdır.

Teorem 5.1.6. Dijital esnek retraksiyon dönüşümü dijital esnek süreklidir.

İspat: $X_0 \subset X$ olacak şekilde $\mathbb{Z}^n$ de $\kappa-$ yakınlıklı X_0 ve X dijital görüntülerini göz önüne alalım. $F_i : E \to P(X), G_i : E \to P(X_0),\ i = 1,2,...,n$ olmak üzere $(G_i, E)_\kappa \subset (F_i, E)_\kappa$ $(i = 1,2,...,n)$ olacak şekilde $(G_i, E)_\kappa$ esnek kümeleri X_0 üzerinde, $(F_i, E)_\kappa$ esnek kümeleri X üzerinde dijital esnek kümeler olsun. $r : X \to X_0$ dönüşümünün bir dijital esnek retraksiyon olduğunu kabul edelim. r dijital esnek retraksiyon olduğundan $\forall x \in X_0$ için $r(x) = x$ olmak üzere, X üzerinde $\kappa-$ bağlantılı herhangi bir $(F_i, E)_\kappa$ esnek kümesini alalım. $r((F_i, E)_\kappa) = (G_i, E)_\kappa$ olup, $r((F_i, E)_\kappa)$, X_0 ın üzerinde $\kappa-$ bağlantılı alt kümesi olarak elde edilir. Böylece $\kappa-$ bağlantılı her dijital esnek kümenin r retraksiyonu altındaki görüntüsü $\kappa-$ bağlantılı olduğundan r dijital esnek süreklidir. ■

.

Teorem 5.1.7 $X_0 \subset X$ olmak üzere X_0, X, Y , $\mathbb{Z}^n$ de $\kappa-$ yakınlıklı dijital görüntüler ve E parametre kümesi olsun. X_0, X in dijital esnek retraksiyonu ve $f: X \to Y$ dijital esnek homeomorfizma olsun. Bu takdirde $f(X_0)$, Y 'nın dijital esnek retraktıdır.

İspat: $F_i : E \to P(X), G_i : E \to P(X_0),\ i = 1,2,...,n$ olmak üzere $(F_i, E)_\kappa$ nin X üzerinde ve $(G_i, E)_\kappa$ nın X_0 üzerinde $(G_i, E)_\kappa \subseteq (F_i, E)_\kappa$ olacak şekilde dijital esnek kümeler olduğunu kabul edelim. $r: X \to X_0$ dijital esnek retraksiyon olsun. Bu takdirde $f \circ r \circ r^{-1} : Y \to f(X_0)$ dijital esnek retraksiyondur. Gerçekten dijital esnek sürekli fonksiyonların bileşkesi de dijital esnek sürekli olduğundan

$$r \circ f^{-1} : Y \to X_0$$

ve

$$f : X \to Y$$

dijital esnek sürekli fonksiyonlarının bileşkesini alırsak

$$f \circ r \circ f^{-1} : X \to X_0$$

dijital esnek sürekli fonksiyonunu elde ederiz.

$(G_i, E)_\kappa \subseteq (F_i, E)_\kappa$ olduğundan $f((G_i, E)_\kappa) \subseteq f((F_i, E)_\kappa)$ olup, $f((F_i, E)_\kappa)$ Y üzerinde bir dijital esnek kümedir.

$X_0 \subset X$ ise $f(X_0) \subseteq Y$ olup olmadığını inceleyelim:

$$r : X \to X_0$$

$$r_1 = f \circ r \circ f^{-1} : Y \to f(X_0)$$

olduğunu göz önüne alalım.

i) $X_0 \subseteq X$ olup, f dijital esnek homeomorfizm olduğundan birebir ve örtendir. böylece $f(X_0) \subseteq f(X) = Y$ olduğu açıktır.

ii) $f \circ r(f^{-1}(y)) = f(r(f^{-1}(y)))$ (r dijital esnek retraksiyon olduğundan)

$$= f(f^{-1}(y)) = y \qquad (ff^{-1} \text{ birim olduğundan})$$

elde edilir.

Sonuç olarak $f(X_0)$, Y nin dijital esnek retraktıdır. ■

Örnek 5.1.7 $X_0 = [0,1]_2$, $X = [-1,2]_2$, $Y = [0,3]_2$ $\mathbb{Z}$ de $2-$ yakınlıklı dijital görüntüler ve $r : X \to X_0$ bir dijital esnek retraksiyon olsun. $F_i : E \to P(X),\ G_i : E \to P(X_0),\ H_i : E \to P(Y),\ i = 1,2$ olmak üzere $(F_1,E)_2, (F_2,E)_2$ X üzerinde, $(G_1,E)_2, (G_2,E)_2$ X_0 üzerinde ve $(H_1,E)_2, (H_2,E)_2$ Y üzerindeki dijital esnek kümelerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$(F_1,E)_2 = \{(e_1,\{-1,0\}),(e_2,\{0,1,2\})\}$,

$(F_2,E)_2 = \{(e_1,\{-1,0,1\}),(e_2,\{1,2\})\}$,

$(G_1,E)_2 = \{(e_1,\{0\}),(e_2,\{0,1\})\}$,

$(G_2,E)_2 = \{(e_1,\{0,1\}),(e_2,\{1\})\}$,

$(H_1,E)_2 = \{(e_1,\{0,1\}),(e_2,\{1,2,3\})\}$,

$(H_2,E)_2 = \{(e_1,\{0,1,2\}),(e_2,\{2,3\})\}$.

$r : X \to X_0$ dijital esnek retraksiyonu

$$r(-1) = r(0) = 0,$$

$$r(1) = r(2) = 1$$

olacak şeklinde tanımlansın.

$f : X \to Y$ dijital esnek homeomorfizmasını

$f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde aşağıda gösterildiği gibi $f \circ r \circ f^{-1} : Y \to f(X_0)$ dönüşümü bir dijital esnek retraksiyondur.

$f \circ r \circ f^{-1}(0) = f \circ r \circ f^{-1}(1) = 1,$

$f \circ r \circ f^{-1}(2) = f \circ r \circ f^{-1}(3) = 2.$

Gerçekten de

$f((G_1, E)_2), f((G_2, E))$ $f(X_0)$ üzerindeki dijital esnek kümeler aşağıdaki gibidir:

$f((G_1, E)) = \{(e_1, \{1\}), (e_2, \{1, 2\})\},$

$. f((G_2, E)) = \{(e_1, \{1, 2\}), (e_2, \{2\})\}.$

Bu takdirde

$f \circ r \circ f^{-1}((H_1, E)_2) = f((G_1, E)_2)$

$f \circ r \circ f^{-1}((H_2, E)_2) = f((G_2, E)_2)$

olup $f \circ r \circ f^{-1}$ bir dijital esnek retraksiyondur. Dolayısıyla bu örnekte dijital esnek homeomorfizmanın dijital esnek retraksiyonu koruduğunu gördük.

6. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE ESNEK HOMOTOPİ

Tanım 6.1.1. κ ve λ yakınlık bağıntıları ile birlikte $X, Y \subseteq \mathbb{Z}^n$ dijital görüntülerini göz önüne alalım. $F_i : E \to P(X),\ G_i : E \to P(Y),\ i = 1,2,...,n$ olmak üzere $(F_i, E)_\kappa$ X üzerinde $(G_i, E)_\lambda$ Y üzerinde tanımlanan dijital esnek kümeler ve $f, g : X \to Y$ dijital esnek sürekli fonksiyonlar olsun. Pozitif bir m tamsayısının ve aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde bir $F : X \times [0,m]_{\mathbb{Z}} \to Y$ fonksiyonunun olduğunu kabul edelim:

- $\forall x \in X$ için $F(x,0) = f(x)$, $F(x,m) = g(x)$
- X üzerinde tanımlanan her $(F_i, E)_\kappa$ esnek kümesi için

  $F((F_i, E)_\kappa, 0) = f((F_i, E)_\kappa)$

  $F((F_i, E)_\kappa, m) = g((F_i, E)_\kappa)$

- $\forall x \in X$ için
  $F_x(t) = F(x,t)$, $\forall t \in [0,m]_{\mathbb{Z}}$

ile tanımlanan $F_x : [0,m]_{\mathbb{Z}} \to Y$ indirgenmiş fonksiyonu $(2,\lambda)-$ süreklidir.

- $\forall t \in [0,m]_{\mathbb{Z}}$ için
  $F_t(x) = F(x,t)$ $(\forall x \in X)$

ile tanımlanan $F_t : X \to Y$ indirgenmiş fonksiyonu $(\kappa,\lambda)-$ süreklidir.

Bu takdirde F dönüşümüne f ve g arasında dijital esnek homotopi denir. f ve g ye dijital esnek homotop dönüşümler denir.

Örnek 6.1.2. $\mathbb{Z}^2$ de $4-$ yakınlık bağıntısını göz önüne alalım. $X = \{(0,1),(0,0),(0,-1),(-1,0),(1,0)\}$, $Y = \{(1,0),(2,0),(2,-1),(2,1),(3,0)\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ dijital görüntüler, $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesi, $I = [0,m]_2$ dijital aralık, $f, g : X \to Y$ dijital sürekli iki fonksiyon olsun. $F_i : E \to P(X),\ i = 1,2$ olmak üzere $(F_1, E)_4, (F_2, E)_4$, X dijital görüntüsü üzerindeki ve $G_i : E \to P(Y),\ i = 1,2,3,4$

olmak üzere $(G_1,E)_4,(G_2,E)_4,(G_3,E)_4,(G_4,E)_4$ Y dijital görüntüsü üzerindeki dijital esnek kümeler aşağıdaki gibi tanımlansın:

$(F_1,E)_4=\{(e_1,\{(1,0),(0,0)\}),(e_2,\{(0,0),(1,0),(-1,0)\})\}$,

$(F_2,E)_4=\{(e_1,\{(0,1),(0,-1),(0,0)\}),(e_2,\{(0,0),(-1,0),(1,0)\})\}$;

ve

$(G_1,E)_4=\{(e_1,\{(2,0),(3,0)\}),(e_2,\{(1,0),(2,0),(3,0)\})\}$,

$(G_2,E)_4=\{(e_1,\{(2,0),(2,1),(2,-1)\}),(e_2,\{(1,0),(2,0),(3,0)\})\}$;

$(G_3,E)_4=\{(e_1,\{(1,0),(2,0)\}),(e_2,\{(1,0),(2,0),(3,0)\})\}$,

$(G_4,E)_4=\{(e_1,\{(2,0),(2,1),(2,-1)\}),(e_2,\{(1,0),(2,0),(3,0)\})\}$.

$f,g:X\to Y$ fonksiyonlarını

$f((1,0))=(3,0),\ f((0,0))=(2,0),\ f((0,1))=(2,1),\ f((0,-1))=(2,-1),$

$f((-1,0))=(1,0);$

$g(0,0)=(2,0)$, $g(1,0)=(1,0)$, $g(0,-1)=(2,1)$, $g(-1,0)=(3,0)$, $g(0,1)=(2,-1).$

olacak şekilde tanımlayalım.

Yukarıdaki gibi tanımlanan f ve g fonksiyonları

$f((F_1,E)_4)=(G_1,E)_4$ $\qquad$ $g((F_1,E)_4)=(G_3,E)_4$

$f((F_2,E)_4)=(G_2,E)_4$ $\qquad$ $g((F_2,E)_4)=(G_4,E)_4$

olduğundan dijital esnek süreklidir.

$H:X\times I_m\to Y$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$H((1,0),(0,0))=(3,0)$ $\qquad$ $H((0,1),(m,0))=(2,-1)$

$H((0,1),(0,0))=(2,1)$ $\qquad$ $H((0,-1),(m,0))=(2,1)$

$H((0,0),(0,0)) = (2,0)$ $H((0,0),(m,0)) = (2,0)$

$H((-1,0),(0,0)) = (1,0)$ $H((-1,0),(m,0)) = (3,0)$

$H((0,-1),(0,0)) = (2,-1)$ $H((1,0),(m,0)) = (1,0)$

Bu takdirde H fonksiyonu f ve g arasında dijital esnek homotipidir. Gerçekten de

$$H((F_1,E)_4,0) = \{(e_1,\{(2,0),(2,1)\}),(e_2,\{(2,0)\})\} = (G_1,E)_4 = f((F_1,E)_4)$$

$$H((F_2,E)_4,0) = \{(e_1,\{(2,0),(2,1),(2,-1)\}),(e_2,\{(2,0)\})\} = (G_2,E)_4 = f((F_2,E)_4)$$

$$H((F,E)_4,(0,0)) = f((F,E)_4)$$

$$H((F_1,E)_4,m) = \{(e_1,\{(3,0),(2,1)\}),(e_2,\{(2,0),(3,0),(1,0)\})\} = (G_3,E)_4 = g((F_1,E)_4)$$

$$H((F_2,E)_4,m) = \{(e_1,\{(2,0),(2,1),(2,-1)\}),(e_2,\{(2,0),(3,0),(1,0)\})\} = (G_4,E)_4 = g((F_2,E)_4)$$

$$H((F,E)_4,m)) = g((F,E)_4)$$

olduğundan H , f ve g arasında dijital esnek homotipidir.

Teorem 6.1.3. Dijital esnek homotop olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat:

i) Herhangi bir $f : X \to Y$ $(\kappa,\lambda)-$ sürekli fonksiyonu ve bir m pozitif tamsayısı için için

$$F((x,t)) = f(x) \quad (\forall t \in [0,m]_{\mathbb{Z}})$$

$$F(((F_i,E)_\kappa,t)) = f((F_i,E)_\kappa)$$

olacak şekilde tanımlı $F : X \times [0,m]_{\mathbb{Z}} \to Y$ dönüşümü f den f e bir dijital esnek homotopidir.

ii) $F : X \times [0,m]_{\mathbb{Z}} \to Y$ $f,g : X \to Y$ arasında bir dijital esnek homotopi olsun. Bu takdirde

$G(x,t) = F(x, m-t) \quad (\forall t \in [0,m]_{\mathbb{Z}})$

$G((F_i,E)_\kappa, t) = F((F_i,E)_\kappa, m-t)$

ile tanımlı $G: X \times [0,m]_{\mathbb{Z}} \to Y$ fonksiyonu g den f e bir dijital esnek homotopidir.

iii) $f,g,h: X \to Y$ olmak üzere $F: X \times [0,m]_{\mathbb{Z}} \to Y$ f ve g arasında bir dijital esnek homotopi, $G: X \times [0,m_0]_{\mathbb{Z}} \to Y$ g ve h arasında bir dijital esnek homotopi olsun.

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,t), & \forall (x,t) \in X \times [0,m]_{\mathbb{Z}} \\ G(x,t-m), & \forall (x,t) \in X \times [m,m+m_0]_{\mathbb{Z}} \end{cases},$$

$$H((F_i,E)_\kappa, t) = \begin{cases} F((F_i,E)_\kappa, t), & t \in [0,m]_{\mathbb{Z}} \\ G((F_i,E)_\kappa, t-m), & t \in [m,m+m_0]_{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlı $H: X \times [0,m+m_0]_{\mathbb{Z}} \to Y$ fonksiyonu f ve h arasında bir dijital esnek homotopidir. ■

Teorem 6.1.4. $\mathbb{Z}^n$ de X, Y, Z dijital alt görüntülerinin sırasıyla κ, λ, μ yakınlıklı olduğunu kabul edelim. $f_0, f_1: X \to Y$ $(\kappa,\lambda)-$ dijital esnek sürekli fonksiyonlar olmak üzere, $f_0 \simeq_{(\kappa,\lambda)} f_1$ ve $g_0, g_1: Y \to Z$ $(\lambda,\mu)-$ dijital esnek sürekli fonksiyonlar olmak üzere $g_0 \simeq_{(\lambda,\mu)} g_1$ olsun. Bu takdirde $g_0 \circ f_0 \simeq_{(\kappa,\mu)} g_1 \circ f_1$ dir.

İspat: $F_i: E \to P(X), G_i: E \to P(Y), H_i: E \to P(Z), \ i = 1,2,...,n$ $(F_i,E)_\kappa$ olmak üzere X dijital görüntüsü üzerinde $(G_i,E)_\lambda$ Y dijital görüntüsü üzerinde $(H_i,E)_\mu$ Z dijital görüntüsü üzerinde dijital esnek kümeler olsun. $F: X \times [0,m_0]_2 \to Y$ fonksiyonu f_0 ve f_1 arasında dijital esnek homotopi , $G: Y \times [0,m_1]_2 \to Z$ fonksiyonu g_0 ve g_1 arasında dijital esnek homotopi olsun. Bu takdirde $(F,E)_\kappa$, X üzerinde herhangi bir dijital esnek küme olmak üzere;

$$H(((F,E)_\kappa,t)) = \begin{cases} G(F((F,E)_\kappa,0)) & 0 \le t \le m_0 \\ G(f_1((F,E)_\kappa), t-m_0) & m_0 \le t \le m_0+m_1 \end{cases}$$

ile tanımlanan $H : X \times [0, m_0+m_1] \to Z$ fonksiyonu $g_0 \circ f_0$ ve $g_1 \circ f_1$ arasında dijital esnek homotopidir. Gerçekten de sürekli fonksiyonların bileşkesi sürekli olduğundan $g_0 \circ f_0$ ve $g_1 \circ f_1$ bileşke fonksiyonları süreklidir.(Teorem 4.1.5)

$t = 0$ için,

$G(F((F,E)_\kappa,0),0) = G(f_0((F,E)_\kappa),0) = g_0(f_0((F,E)_\kappa)) = g_0 \circ f_0((F,E)_\kappa)$,

$t = m_0$ için,

$G(F((F,E)_\kappa,m_0),0) = G(f_1((F,E)_\kappa),0) = g_0(f_1((F,E)_\kappa)) = g_0 \circ f_1((F,E)_\kappa)$,

$$G(f_1((F,E)_\kappa),0) = g_0(f_1((F,E)_\kappa)) = g_0 \circ f_1((F,E)_\kappa),$$

$t = m_0 + m_1$ için,

$G(f_1((F,E)_\kappa),m_1) = g_1(f_1((F,E)_\kappa)) = g_1 \circ f_1((F,E)_\kappa)$

elde edilir.

$H : X \times [0, m_0+m_1] \to Z$ fonksiyonu

$$H((F,E)_\kappa,0) = g_0 \circ f_0((F,E)_\kappa),$$

$$H((F,E)_\kappa,m_0+m_1) = g_1 \circ f_1((F,E)_\kappa),$$

eşitliklerini sağladığından $g_0 \circ f_0$ ve $g_1 \circ f_1$ bileşke fonksiyonları dijital esnek homotopiktir. ■

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yapılan çalışma sonucunda esnek küme kavramı digital görüntülerde tanımlanmış ve esnek sürekli fonksiyon tanımı dijital görüntülerde verilmiştir. Sürekli fonksiyon tanımı dijital görüntülerde genel topolojik uzaylardan farklılık gösterdiği için birim dönüşüm esnek sürekli olmamasına rağmen, dijital görüntülerde esnek sürekli olarak elde edilmiştir. Bu özellik cebirsel topolojinin temel kavramlarından olan homeomorfizm ve homotopinin parametre kümesi göz önüne alınarak dijital görüntülerde esnek anlamda ifade edilebilmesini sağlamıştır. Örneklerde genellikle $1-$ ve $2-$ boyutlu dijital görüntülerde çalışılmış ve $2-, 4-$ ve $8-$ yakınlık bağıntıları kullanılmıştır. Örneklerdeki hesaplamalar detaylı olarak verilmiştir. Sonuç olarak dijital esnek homotopinin bazı özellikleri ispatlanmıştır.

İlerleyen zamanlarda bu çalışmada oluşturulan yapı kullanılarak cebirsel topolojinin farklı kavramları üzerine çalışılabilir. Ayrıca bu çalışmada sunulan örnekler $3-$ boyutlu dijital görüntülerde farklı yakınlık bağıntılarının kullanılmasıyla geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

1. Rosenfeld A. , 'Continuous' functions on digital pictures, *Pattern Recognition Letters*, Vol. 4, 1986, pp. 177–184.

2. Boxer L., Digitally continuous functions, *Pattern Recognition Letters*, Vol. 15, pp. 833–839, 1994.

3. Boxer L., A classical construction for the digital fundamental group, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 10, pp. 51–62, 1999.

4. Boxer L., Properties of digital homotopy, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 22, pp. 19–26, 2005.

5. Malgouyres R. , Homotopy in 2-dimensional digital images, *Theoretical Computer Science*, Vol. 230, pp. 221–233,2000.

6. Mutlu A. , Mutlu B. , Öztunç S. , On digital homotopy of digital paths, Research Journal of Algebra, Vol 2, No:6, 147-154, 2012.

7. Öztunç S.**,** Mutlu A., The structure of simplicial sets in digital images, International Conference on Applied Analysis and Algebra (ICAAA2012), 20-24 June 2012, Yildiz Technical University, Istanbul, TURKEY, pp. 246.

8. Öztunç S. , Bildik N., A. Mutlu, The construction of simplicial groups in digital images, International Congress in Honour of Proffessor Hari M. Srivastava, 23-26 August 2012, Uludağ University Görükle/BURSA, TURKEY, Pp. 126

9. Öztunç S., Mutlu Ali., Categories in digital images, American Journal of Mathematics and Statistics, Vol.3, No.1, 62-66, 2013.

10. Öztunç S. , Bildik N. , Mutlu A. , Simplicial homotopy in digital images, 1st International Eurasian Conference on Mathematical Science and Applications (IECMSA 2012), 03-07 September 2012, Prishtine/KOSOVA, Pp. 240.

11. Kong T.Y. , Roscoe A.W. and Rosenfeld A., Concepts of digital topology, *Topology and its Applications*, Vol. 46, pp. 219–262, 1992.

12. Molodtsov D. Soft set theory-First result, Comput. Math. Appl., 1999, 37, 19- 31.

13. Maji P. K, Biswas R. and Roy A. R. Soft set theory, Comput. Math. Appl., 45, 2003, 555-562.

14. Zorlutuna, I., Akdag, M., Min, W. K., Atmaca, S., Remarks on soft topological spaces, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics 3 (2012), 171-185.

15. Zorlutuna İ. and Çakır H. (2015). On Continuity of Soft Mappings, Appl. Math. Inf. Sci. 9, No. 1, 403-409.

16. Aras Ç.G., Sönmez A., Çakallı H., On Soft Mappings, 2014, Preprint.

17. Aras Ç.G. , Poşul H. , On Some New Operations in Probabilistic Soft Set Theory, European Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol:9, No:3, 333-339, (2016).

18. Bayramov S, Aras Ç.G., Soft locally compact and soft paracompact spaces, *Journal of Mathematics and System Science.*

19. Majumdar P. , Samanta S.K., On soft Mappings, Computers and Mathematics with Applications, 60, 2010, 2666-2672.

20. Shabir M. Munazza Naz: On soft topological spaces. Computers & Mathematics with Applications 61(7): 1786-1799 (2011).

21. Sardar S. K. and Gupta S., "Soft category theory-an ıntroduction," *Journal of Hyperstructures*, vol. 2, no. 2, pp. 118-135, (2013).

22. Massey W.S., Algebraic topology: An introduction, Harcourt, Brace, and World: New York, 1967.

23. Munkres J.R., Topology a first course,Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

24. Borsuk K. , Theory of retracts, Polish Scientific Publishers: Warsaw, 1967.

25. Mutlu A., Teorik ve Çözümlü Topoloji Ders Notları, Manisa, 2012.

26. İhtiyar S., Öztunç S., Digital Görüntülerde Esnek Kümeler ve Digital Görüntülerde Esnek Süreklilik, XXVIII. Ulusal Matematik Sempozyumu, 7-9 Eylül 2015, Akdeniz Üniversitesi, Antalya/ Türkiye, Pp. 226. (Poster)

27. Öztunç S., İhtiyar S., Properties of Soft Homotopy in Digital Images. 11 th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences (ICNPAA), 05-08 July 2016.

28. Öztunç S., İhtiyar S., Properties of Soft Homotopy in Digital Images, American Instutite of Physics, 1798, 020120 (2017); doi:10.1063/1.4972712.

29. Hussein S., Ahmad B., Some Properties of Soft Topoogical Spaces, Computers & Mathematics with Applications, Vol:62, No:11, 4058-4067.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sultan İHTİYAR

Doğum Yeri ve Yılı : Afyon, 1992

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : sultan_ihtiyar2035@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Şehit Ali Karaoğlan Lisesi, 2010

Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2014

Yayınları

[1] Öztunç S., İhtiyar S., Properties of Soft Homotopy in Digital Images, American Instutite of Physics, 1798, 020120 (2017); doi:10.1063/1.4972712

[2] İhtiyar S., Öztunç S., Dijital Görüntülerde Esnek Kümeler ve Dijital Görüntülerde Esnek Süreklilik, XXVIII. Ulusal Matematik Sempozyumu, 7-9 Eylül 2015, Akdeniz Üniversitesi, Antalya/ Türkiye, Pp. 226. (Poster)

[3] Öztunç S., İhtiyar S., Properties of Soft Homotopy in Digital Images. 11 th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences (ICNPAA), 05-08 July 2016