CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUATERNİYONİK ÇATIYA GÖRE HELİSLERİN VE SLANT HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Yüksek Lisans Tezi

Beyza Betül PEKACAR

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

MANİSA 2013

KUATERNİYONİK ÇATIYA GÖRE HELİSLERİN VE SLANT HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Yüksek Lisans Tezi

Beyza Betül PEKACAR

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: … / … /2013

Tezin Savunulduğu Tarih : … / … /2013

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Mustafa KAZAZ

Doç. Dr. Ahmet ATAÇ

Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

MANİSA 2013

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince danışmanlığımı üstlenerek çalışmalarımı özenle takip eden, her konuda yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen, en büyük desteği sağlayan saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT' e teşekkürü borç bilirim.

Çalışmalarım esnasında bilgi ve tecrübelerini sabırla paylaşan, karşılaştığım sorunlarda yol gösteren Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÖNDER hocama sonsuz teşekkürler sunarım. Ayrıca hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle arkamda olan aileme ve bu tezi yazma aşamasında manevi güç veren arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Beyza Betül PEKACAR
Celal Bayar Üniversitesi, 2013

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR ……..ii
İÇİNDEKİLER …….iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ ……..iv
ÖZET ……vi
ABSTRACT ……vii

GİRİŞ ……...1

1. BÖLÜM
TEMEL KAVRAMLAR …….. 2
1.1 Öklid Uzayında Temel Kavramlar ……. 2
1.2 Kuaterniyonlar …….. 9

2. BÖLÜM
2.1. 3- Boyutlu E^3 Öklid Uzayında Kuaterniyonik Slant Helislerin Karakterizasyonları ……18
2.2. 4-Boyutlu E^4 Öklid Uzayında Kuaterniyonik Slant Helislerin Karakterizasyonları ….....20

3. BÖLÜM
3.1. 4- Boyutlu E^4 Öklid Uzayında Kuaterniyonik Genel Helislerin Karakterizasyonları …….…….29

4. BÖLÜM
4.1. 4- Boyutlu E^4 Öklid Uzayında Kuaterniyonik $\boldsymbol{N}_3$ Slant Helislerin Karakterizasyonları ……..36

5. BÖLÜM
SONUÇ …… 44

KAYNAKLAR ……45
ÖZGEÇMİŞ …….. 46

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

E^n : n-boyutlu Öklid uzayı

$\mathbb{R}^n$: n-boyutlu iç çarpım uzayı

$\mathbb{Q}$: Kuaterniyonlar cümlesi

V : Vektör uzayı

$\boldsymbol{V}_i$: E^n Öklid uzayında $i-$yinci Frenet vektörü

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$: E^n, n-boyutlu Öklid uzayında herhangi iki vektör

X, Y, Z : E^n, n-boyutlu Öklid uzayında herhangi üç nokta

I : $\mathbb{R}$ reel Öklid uzayında bir açık aralık

$\langle , \rangle$: İç çarpım

$\wedge$: Vektörel çarpım

α, β, ξ, ϕ : E^3 ve E^4 Öklid uzaylarında herhangi eğriler

k_i : E^n Öklid uzayında $i-$yinci Frenet eğriliği

κ, τ, σ : Öklid uzayında Frenet eğrilikleri

$\boldsymbol{u}$: E^3 Öklid uzayında sabit açı yapan vektör

$\boldsymbol{U}$: E^4 Öklid uzayında sabit açı yapan vektör

$\boldsymbol{U}'$: $\boldsymbol{U}$ vektörünün s parametresine göre diferensiyeli

q : Herhangi bir kuaterniyon

S_q : q kuaterniyonunun skalar kısmı

V_q : q kuaterniyonunun vektörel kısmı

q^{-1} : q kuaterniyonunun tersi

q_0 : q birim kuaterniyonunu

S_0 : Bir kuaterniyonun ekseni

$\oplus$: Kuaterniyonlarda toplama

$\odot$: Kuaterniyonlarda skalar ile çarpım

$\times$: Kuaterniyon çarpımı

$\overline{q}$: Herhangi bir q kuaterniyonunun eşleniği

$h(,)$: Kuaterniyonik iç çarpım

$\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$: E^3 Öklid uzayında kuaterniyonik Frenet vektörleri

k, r : E^3 Öklid uzayında kuaterniyonik Frenet eğrilikleri

$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_3$: E^4 Öklid uzayında Kuaterniyonik Frenet vektörleri

$K, k, (r-K)$: E^4 Öklid uzayında kuaterniyonik Frenet eğrilikleri

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, Öklid uzayı ve kuaterniyonlar kümesinin bazı temel kavramlarından bahsedilmiştir. Ayrıca bu bölümde, helislerin bazı temel tanım ve teoremleri verilmiştir.

İkinci bölümde, 3 – boyutlu E^3 ve 4 – boyutlu E^4 Öklid uzaylarında kuaterniyonik slant helis tanımı verilerek bazı karakterizasyonları incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, E^4 Öklid uzayında kuaterniyonik genel helis tanımı verilerek bazı integral karakterizasyonları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, E^4 Öklid uzayında kuaterniyonik $\boldsymbol{N}_3$ slant helis tanımı verilerek bazı integral karakterizasyonları incelenmiştir.

Son olarak beşinci bölümde, çalışmanın kısa bir özeti verilmiştir ve sonraki araştırmalar için öneride bulunulmuştur.

İkinci, üçüncü ve dördüncü bölümler bu tezin orijinal kısımlarıdır.

ABSTRACT

This study consists of five chapter.

In the first chapter, basic concepts of Euclidean space and set of quaternions are mentioned. Also in this chapter, some basic definitions and theorems of helices are given.

In the second chapter, the definition of quaternionic slant helix is given and some characterizations of them are investigated in the 3- dimensional and 4- dimensional Euclidean spaces E^3 and E^4.

In the thirth chapter, quaternionic general helix is defined and some integral characterizations of them are investigated in the 4- dimensional Euclidean space E^4.

In the fourth chapter, the definition of quaternionic $\boldsymbol{N}_3$ slant helix is given and some integral characterizations of them are investigated in the 4- dimensional Euclidean space E^4.

Finally, in the fifth parth, a summary of the study is given and suggestions are proposed for investigations in future.

The second, thirth and fourth chapters are the original parts of this thesis.

GİRİŞ

Kuaterniyonlar, 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton'un kompleks sayıları 3-boyutlu uzaya genelleştirmek amacıyla yaptığı çalışmalar sırasında bulunmuş ve ilk defa 13 kasım 1843 yılında Hamilton (1805-1865) tarafından Royal Irish Akaddemy'de ünlü bildirisi "On a New Spacies of Imagianery Quantites Connected with the Theory of Quaternions" ile tanımlanarak yayınlanmıştır [1].

Helisler, diferansiyel geometride en iyi bilinen eğrilerdir. Helis eğrisi, 3 boyutlu Öklid uzayında, teğet vektörü belirli bir doğrultu ile sabit açı yapan eğri olarak tanımlanır. Bir helis eğrisi, burulması τ ve eğriliği κ olmak üzere, eğri boyunca $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının sabit olması ile karakterize edilir [2].

E^3 Öklid uzayında bir slant helis, asli normal vektörü belirli bir doğrultu ile sabit açı yapan eğridir. Eğriliği sıfırdan farklı bir α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{\kappa^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right)(s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır [2].

B_2 slant helis, E^4 Öklid uzayında ikinci binormal vektörü belirli bir doğrultu ile sabit açı yapan eğridir ve k_1, k_2, k_3 eğrilikler olmak üzere

$$\left(\frac{k_3}{k_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' \right)^2 = sabit$$

olması ile karakterize edilir [3].

Bu çalışmada ise reel kuaterniyonların cebirsel özellikleri verildikten sonra yukarıda sözü edilen eğriler, kuaterniyonik eğri seçilerek kuaterniyonik helis, kuaterniyonik slant helis ve kuaterniyonik N_3 slant helis kavramları tanımlanmıştır. Ayrıca, bu eğrilerin E^3 ve E^4 Öklid uzaylarında bazı integral karakterizasyonları incelenmiştir.

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde E^n, $n-$boyutlu reel Öklid uzayında temel kavramlardan bahsedilecektir. Daha sonra $n=3$ ve $n=4$ olması özel durumunda çalışmamıza esas olan tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1.1. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V vektör uzayında $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ ve $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ olmak üzere,

$$\langle\ ,\ \rangle : V\times V\to\mathbb{R}$$

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

şeklinde bir Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, A afin uzayına $n-$boyutlu Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir [4].

Tanım 1.1.2. $n-$boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V ile birleşen bir Öklid uzayı E^n olsun. V vektör uzayı üzerindeki norm $\|\ ,\ \|$, $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ ve $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ olmak üzere,

$$d:E^n\times E^n\to\mathbb{R}$$

$$d(X,Y)=\|\boldsymbol{XY}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}$$

olarak tanımlanan fonksiyona E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve her $X,Y\in E^n$ için $d(X,Y)$ değerine de X ile Y noktaları arasındaki uzaklık adı verilir [4].

Teorem 1.1.1. E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir [4].

Tanım 1.1.3. E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında tanımlanan uzaklık fonksiyonuna E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında Öklid metriği denir [4].

Tanım 1.1.4. E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında farklı üç nokta X,Y,Z olsun. $\boldsymbol{XY}$ ile $\boldsymbol{XZ}$ vektörleri arasındaki $\theta\in\mathbb{R}$ açısı, $0\le\theta\le\pi$ olmak üzere,

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{XY}, \boldsymbol{XZ} \rangle}{\|\boldsymbol{XY}\|\|\boldsymbol{XZ}\|}$$

dır [4].

Tanım 1.1.5. $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu reel iç çarpım uzayı ile birleşen E^n Öklid uzayında, sıralı bir $\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ nokta $(n+1)-$lisi için eğer $\{\boldsymbol{P_0P_1}, \boldsymbol{P_0P_2}, \cdots, \boldsymbol{P_0P_n}\}$ vektör sistemi, $\mathbb{R}^n$ iç çarpım uzayının bir ortonormal bazı ise bu nokta $(n+1)-$lisine bir dik çatı veya Öklid çatısı denir [4].

Tanım 1.1.6. E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında bir X noktasının E^n Öklid uzayındaki standart Öklid çatısına göre ifadesi

$$\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{E}_0\boldsymbol{E}_i$$

dir. Burada

$$x_i : E^n \to \mathbb{R} \quad (1 \le i \le n)$$

fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar $n-$lisine de E^n Öklid uzayının Öklid koordinat sistemi denir [4].

Tanım 1.1.7. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve

$$\alpha : I \to E^n$$
$$s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \cdots, \alpha_n(s))$$

diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\alpha(I) \subset E^n$ alt kümesine E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri denir. $I \subset \mathbb{R}$ aralığına, α eğrisinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine de $\alpha(s)$ eğrisinin parametresi denir [4].

Tanım 1.1.8. M, E^n $n-$boyutlu Öklid uzayında (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \cdots, \alpha_n(s))$$

olsun. Bu takdirde

$$\left.\frac{d\alpha}{ds}\right|_s = \alpha'(s)|_s = \left(\left.\frac{d\alpha_1}{ds}\right|_s, \left.\frac{d\alpha_2}{ds}\right|_s, \cdots, \left.\frac{d\alpha_n}{ds}\right|_s \right)$$

tanjant vektörüne, M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü denir [4].

Tanım 1.1.9. $M \subseteq E^n$ eğrisi, (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\|\alpha'\| : I \to \mathbb{R}$$
$$s \to \|\alpha'\|(s) = \|\alpha'(s)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre skalar hız fonksiyonu, $\|\alpha'(s)\|$ reel sayısına da M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki skalar hızı denir. Eğer

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise, M eğrisine birim hızlı eğri ve $s \in I$ parametresine de eğrinin yay-parametresi denir [4].

Tanım 1.1.10. $M \subseteq E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $a,b \in I$ olmak üzere,

$$s = \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds$$

reel sayısına M eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay-uzunluğu denir [4].

Tanım 1.1.11. M eğrisi E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında (I,α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve

$$\psi = \left\{\alpha', \alpha'', \cdots, \alpha^{(r)}\right\}$$

sistemi lineer bağımsız olsun.

$$\alpha^{(k)} \in S_p\{\psi\}, \qquad k > r$$

olmak üzere, ψ lineer bağımsız sisteminden elde edilen $\{V_1, V_2, \cdots, V_r\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin Serret-Frenet $r-$ayaklı alanı, $m \in M$ için $\{\boldsymbol{V}_1(m), \boldsymbol{V}_2(m), \cdots, \boldsymbol{V}_r(m)\}$ sistemine $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet $r-$ayaklısı ve her bir $\boldsymbol{V}_i$, $1 \le i \le r$, vektörüne de Serret-Frenet vektörü denir [4].

Tanım 1.1.12. M eğrisi E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay-parametresine karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet $r-$ayaklısı $\{\boldsymbol{V}_1(s), \boldsymbol{V}_2(s), \cdots, \boldsymbol{V}_r(s)\}$ olmak üzere,

$$k_i : I \to \mathbb{R}, \qquad (1 \le i < r)$$
$$s \to k_i(s) = \left\langle \boldsymbol{V}_i'(s), \boldsymbol{V}_{i+1}(s) \right\rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin $i-$yinci eğrilik fonksiyonu ve $\forall s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $i-$yinci eğriliği denir [4].

Teorem 1.1.2. $M \subseteq E^3$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, M eğrisinin $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}(s) &= \alpha'(s) \\ \boldsymbol{n}(s) &= \frac{1}{\|\alpha''(s)\|}\alpha''(s) \\ \boldsymbol{b}(s) &= \boldsymbol{t}(s) \wedge \boldsymbol{n}(s) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

şeklindedir [4].

Teorem 1.1.3. $M \subset E^3$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ herhangi bir parametre olmak üzere, M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3- ayaklısı, $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ ise

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}(s) &= \frac{1}{\|\alpha'(s)\|}\alpha'(s) \\ \boldsymbol{n}(s) &= \boldsymbol{b}(s) \wedge \boldsymbol{t}(s) \\ \boldsymbol{b}(s) &= \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|} \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

dır [4].

Teorem 1.1.4. $M \subseteq E^3$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ herhangi bir parametre ve M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği ve burulması, sırasıyla, $\kappa(s)$, $\tau(s)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \frac{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3} \\ \tau(s) &= \frac{\langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^2} \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

dır [5].

Teorem 1.1.5. $M \subseteq E^4$ eğrisi (I,ξ) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ herhangi bir parametre olmak üzere, M eğrisinin $\xi(s)$ noktasındaki $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s), \boldsymbol{E}(s)\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= \frac{1}{\|\xi'(s)\|}\xi'(s) \\
\boldsymbol{N}(s) &= \frac{\|\xi'(s)\|^2 \xi''(s) - \langle \xi'(s), \xi''(s)\rangle \xi'(s)}{\left\|\|\xi'(s)\|^2 \xi''(s) - \langle \xi'(s), \xi''(s)\rangle \xi'(s)\right\|} \\
\boldsymbol{B}(s) &= \eta \boldsymbol{E}(s) \wedge \boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \\
\boldsymbol{E}(s) &= \eta \frac{\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \wedge \xi'''(s)}{\|\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \wedge \xi'''(s)\|}, \qquad (\eta = \pm 1)
\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

şeklinde hesaplanır [6].

Buradaki vektörel çarpım aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 1.1.13. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^4$ uzayının standart bazı $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}\}$ olmak üzere,

$$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{T} & \boldsymbol{N} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{cases} \boldsymbol{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4) \\ \boldsymbol{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4) \\ \boldsymbol{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4) \end{cases}$$

şeklindeki çarpıma $\mathbb{R}^4$ uzayında vektörel çarpım veya dış çarpım denir [7].

Teorem 1.1.6. $M \subseteq E^4$ eğrisi (I, ξ) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ herhangi bir parametre ve M eğrisinin $\xi(s)$ noktasındaki Frenet eğrilikleri, sırasıyla, $\kappa(s)$, $\tau(s)$ ve $\sigma(s)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\kappa(s) &= \frac{\left\|\|\xi'(s)\|^2 \xi''(s) - \langle \xi'(s), \xi''(s)\rangle \xi'(s)\right\|}{\|\xi'(s)\|^4} \\
\tau(s) &= \frac{\|\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \wedge \xi'''(s)\|\|\xi'(s)\|}{\left\|\|\xi'(s)\|^2 \xi''(s) - \langle \xi'(s), \xi''(s)\rangle \xi'(s)\right\|} \\
\sigma(s) &= \frac{\langle \xi^{(iv)}(s), \boldsymbol{E}(s)\rangle}{\|\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}(s) \wedge \xi'''(s)\|\|\xi'(s)\|}
\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

şeklinde hesaplanır [6].

Teorem 1.1.7. $M \subseteq E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen $s \in I$ yay-parametreli bir eğri olsun. M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $i-$yinci eğriliği $k_i(s)$ ve Frenet $r-$ayaklısı da $\{\boldsymbol{V}_1(s), \boldsymbol{V}_2(s), \cdots, \boldsymbol{V}_r(s)\}$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \boldsymbol{V}_1'(s) = k_1(s)\boldsymbol{V}_2(s) \\
&2) \quad \boldsymbol{V}_i'(s) = -k_{i-1}(s)\boldsymbol{V}_{i-1}(s) + k_i(s)\boldsymbol{V}_{i+1}(s)\,, \quad (1 < i < r) \\
&3) \quad \boldsymbol{V}_r'(s) = -k_{r-1}(s)\boldsymbol{V}_{r-1}(s)
\end{aligned} \tag{1.1.6}
$$

bağıntıları sağlanır [4].

Tanım 1.1.14. $M \subseteq E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen $s \in I$ yay-parametreli bir eğri olsun. M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $i-$yinci eğriliği $k_i(s)$ olmak üzere, $\{\boldsymbol{V}_1(s), \boldsymbol{V}_2(s), \cdots, \boldsymbol{V}_r(s)\}$ Frenet $r-$ayaklısının $\boldsymbol{V}_i(s)$ Frenet vektörlerinin eğri boyunca kovaryant türevleri ile ilgili eşitlikler

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1' \\ \boldsymbol{V}_2' \\ \boldsymbol{V}_3' \\ . \\ . \\ . \\ \boldsymbol{V}_{r-1}' \\ \boldsymbol{V}_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 \\ \boldsymbol{V}_2 \\ \boldsymbol{V}_3 \\ . \\ . \\ . \\ \boldsymbol{V}_{r-1} \\ \boldsymbol{V}_r \end{bmatrix}
$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliklere Frenet Formülleri denir [4].

Teorem 1.1.8. $\alpha : I \to E^3$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi cinsinden verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet $3-$ayaklısı $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$; eğrilik ve burulması, sırasıyla, $\kappa(s)$, $\tau(s)$ olmak üzere, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet formülleri

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{t}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s) \\
&\boldsymbol{n}'(s) = -\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s) \\
&\boldsymbol{b}'(s) = -\tau(s)\boldsymbol{n}(s)
\end{aligned} \tag{1.1.7}
$$

dir. Bu Frenet formüllerinin matrisel ifadesi ise

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}' \\ \boldsymbol{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}
$$

şeklindedir [5].

Teorem 1.1.9. $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin herhangi bir parametresi $s \in I$ olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet $3-$ ayaklısı $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ ve eğrilik ile burulması, sırasıyla, $\kappa(s)$, $\tau(s)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}'(s) &= \|\alpha'(s)\| \kappa(s) \boldsymbol{n}(s) \\ \boldsymbol{n}'(s) &= \|\alpha'(s)\| \left(-\kappa(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s)\right) \\ \boldsymbol{b}'(s) &= -\|\alpha'(s)\| \tau(s) \boldsymbol{n}(s) \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

şeklinde hesaplanır [5].

Teorem 1.1.10. $\xi : I \to E^4$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. ξ eğrisinin $\xi(s)$ noktasındaki Frenet elemanları $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s), \boldsymbol{E}(s), \kappa(s), \tau(s), \sigma(s)\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}'(s) &= \kappa(s)\boldsymbol{N}(s) \\ \boldsymbol{N}'(s) &= -\kappa(s)\boldsymbol{T}(s) + \tau(s)\boldsymbol{B}(s) \\ \boldsymbol{B}'(s) &= -\tau(s)\boldsymbol{N}(s) + \sigma(s)\boldsymbol{E}(s) \\ \boldsymbol{E}'(s) &= -\sigma(s)\boldsymbol{B}(s) \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

şeklindedir. Bu formüllere Frenet formülleri denir ve bu formüllerin matrisel ifadesi ise

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}' \\ \boldsymbol{N}' \\ \boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{E}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau & 0 \\ 0 & -\tau & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & -\sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E} \end{bmatrix}$$

şeklindedir [6].

Teorem 1.1.11. E^3, $3-$ boyutlu Öklid uzayında bir α eğrisi doğrudur ancak ve ancak eğrinin her noktasındaki eğriliği sıfırdır $(\kappa = 0)$ [2].

Teorem 1.1.12. E^3, $3-$ boyutlu Öklid uzayında bir α eğrisi düzlemsel bir eğridir ancak ve ancak eğrinin her noktasındaki burulması sıfırdır $(\tau = 0)$ [2].

Tanım 1.1.15. $\alpha : I \to E^n$ eğrisi $s \in I$ yay-parametresi ile verilsin. Eğer $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet eğrilikleri sabitse $\alpha(s)$ eğrisine $W-$ eğrisi denir [6].

1.2. Kuaterniyonlar

Bu bölümde kuaterniyonlar, uzaysal kuaterniyonik ve kuaterniyonik eğrilerle ilgili çalışmamıza esas olan tanım ve teoremler verilecektir.

Bir reel kuaterniyon, sıralı dört sayının $+1, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Bu dört birim

$$i) \quad \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_i = -\boldsymbol{e}_4, \qquad (\boldsymbol{e}_4 = +1, \quad 1 \le i \le 3)$$
$$ii) \quad \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_k = -\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_i \quad (1 \le i, j \le 3)$$

olmak üzere,

$\times$	$+1$	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$
$+1$	$+1$	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1$	-1	$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_3$	-1	$\boldsymbol{e}_1$
$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1$	-1

şeklindedir. Böylece bir reel kuaterniyon

$$q = d + a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3$$

biçiminde ifade edilir. Burada $d, a, b, c \in \mathbb{R}$ reel sayılarına q kuaterniyonunun bileşenleri denir. Kısaca reel kuaterniyonların kümesi

$$\mathbb{Q} = \{q \,|\, q = d + a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3, \;\; d, a, b, c \in \mathbb{R}, \;\; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{R}^3\}$$

şeklinde gösterilir. O halde q kuaterniyonu, S_q ile gösterilen skalar kısım ve $\boldsymbol{V}_q$ ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere, iki kısma ayrılır. Böylece

$$S_q = d \quad , \qquad \boldsymbol{V}_q = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3$$

olduğundan q kuaterniyonu

$$q = S_q + \boldsymbol{V}_q$$

şeklinde yazılabilir [8].

Tanım 1.2.1. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar kümesi üzerinde toplama işlemi,

$$S_{q_1} + S_{q_2} = S_{q_1 + q_2} \qquad \text{ve} \qquad \boldsymbol{V}_{q_1 \oplus q_2} = \boldsymbol{V}_{q_1} \oplus \boldsymbol{V}_{q_2}$$

olmak üzere,

$$\oplus : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$
$$(q_1, q_2) \to q_1 \oplus q_2 = S_{q_1+q_2} + \boldsymbol{V}_{q_1 \oplus q_2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $S_{q_1}, S_{q_2} \in \mathbb{R}$ dir ve + işlemi $\mathbb{R}$ reel Öklid uzayındaki toplama işlemidir. $\boldsymbol{V}_{q_1}$ ve $\boldsymbol{V}_{q_2}$ vektörleri de birer reel vektör olup $\oplus$ işlemi, $(\mathbb{R}, +)$ Abel grubundaki işlemin aynısıdır. O halde $(\mathbb{Q}, \oplus)$ ikilisi bir Abel grubudur. Buradaki etkisiz eleman $(0,0,0,0)$ şeklindedir ve sıfır kuaterniyon adını alır [8].

Tanım 1.2.2. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar kümesinde skalar ile çarpma işlemi,

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$
$$(\lambda, q) \to \lambda \odot q = \lambda q = \lambda S_q + \lambda \boldsymbol{V}_q$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca,

$i)$ $\lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = \lambda \odot q_1 \oplus \lambda \odot q_2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$

$ii)$ $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall q \in \mathbb{Q}$

$iii)$ $(\lambda_1 . \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q)$

$iv)$ $1 \odot q = q$

özellikleri sağlanır.

O halde $\{\mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır. Kısaca bu uzay $\mathbb{Q}$, kuaterniyonlardaki toplama ve çarpma işlemleri, sırasıyla "+" ve "." ile gösterilecektir [8].

Tanım 1.2.3. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar kümesinde kuaterniyonik çarpma işlemi,

$$q_1 = d_1 + a_1 \boldsymbol{e}_1 + b_1 \boldsymbol{e}_2 + c_1 \boldsymbol{e}_3$$
$$q_2 = d_2 + a_2 \boldsymbol{e}_1 + b_2 \boldsymbol{e}_2 + c_2 \boldsymbol{e}_3$$

olmak üzere,

$$\times : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$
$$(q_1, q_2) \to q_1 \times q_2$$
$$\begin{aligned} q_1 \times q_2 &= (d_1 + a_1 \boldsymbol{e}_1 + b_1 \boldsymbol{e}_2 + c_1 \boldsymbol{e}_3) \times (d_2 + a_2 \boldsymbol{e}_1 + b_2 \boldsymbol{e}_2 + c_2 \boldsymbol{e}_3) \\ &= d_1 d_2 - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + (d_1 a_2 + a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2) \boldsymbol{e}_1 \\ &\quad + (d_1 b_2 + b_1 d_2 + b_1 a_2 - a_1 c_2) \boldsymbol{e}_2 + (d_1 c_2 + d_2 c_1 + a_1 b_2 - b_1 a_2) \boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

$$q_1 \times q_2 = S_{q_1} S_{q_2} - \left\langle \boldsymbol{V}_{q_1}, \boldsymbol{V}_{q_2} \right\rangle + S_{q_1} \boldsymbol{V}_{q_2} + S_{q_2} \boldsymbol{V}_{q_1} + \boldsymbol{V}_{q_1} \wedge \boldsymbol{V}_{q_2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde kuaterniyon çarpımının aşağıdaki özelliklere sahip olduğu kolayca görülür:

i) İki kuaterniyon çarpımı bir kuaterniyondur,

ii) Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir,

iii) Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

Fakat kuaterniyonlar kümesi üzerindeki kuaterniyon çarpımının değişme özelliği yoktur. Bu özellikleriyle $\{\mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ sistemi bir asosyatif (birleşimli) cebirdir. Bu cebire kuaterniyon cebiri denir ve kısaca $\mathbb{Q}$ ile gösterilir. Bu cebirin standart bazı $\{1, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ olmak üzere, $\mathbb{Q}$ cebirinin boyutu 4 dür. Özel olarak q_1 ve q_2 birer skalar veya vektör kısımları orantılı $(\boldsymbol{V}_{q_2} = \lambda \boldsymbol{V}_{q_1})$ ise

$$q_1 \times q_2 = q_2 \times q_1$$

olur [8].

Tanım 1.2.4. Kuaterniyonlar için eşitlik bağıntısı, $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ için

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2} \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{V}_{q_1} = \boldsymbol{V}_{q_2}$$

şeklinde tanımlanır [8].

Tanım 1.2.5. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar kümesindeki iki kuaterniyonun farkı,

$$S_{q_1 - q_2} = S_{q_1} - S_{q_2} \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{V}_{q_1 - q_2} = \boldsymbol{V}_{q_1} - \boldsymbol{V}_{q_2}$$

olmak üzere,

$$q_1 - q_2 = (S_{q_1} - S_{q_2}) + (\boldsymbol{V}_{q_1} - \boldsymbol{V}_{q_2})$$

şeklinde tanımlanır [8].

Tanım 1.2.6. $q = S_q + \boldsymbol{V}_q \in \mathbb{Q}$ reel kuaterniyonun eşleniği

$$\begin{aligned} \hat{} : \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ q &\to \hat{q} = S_q - \boldsymbol{V}_q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve q kuaterniyonuna q kuaterniyonunun eşleniği denir. Buna göre q kuaterniyonunun eşleniği ile çarpımı

$$\begin{aligned} q \times q &= (d + a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3) \times (d - a\boldsymbol{e}_1 - b\boldsymbol{e}_2 - c\boldsymbol{e}_3) \\ &= d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$q \times q = q \times q > 0, \qquad q \neq 0$$

$$q \times q = q \times q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q = 0$$

sonucu çıkarılabilir. O halde eşlenik işleminin

$i)\ \ (aq_1 + bq_2) = aq_1 + bq_2$

$ii)\ \ (q_1 \times q_2) = q_2 \times q_1$

$iii)\ \ q = q$

özelliklerine sahip olduğu kolayca görülebilir. Bu üç özelliğe kuaterniyonun eşlenik özellikleri denir [8].

Tanım 1.2.7. $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ reel kuaterniyonları için

$$h : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$
$$(q_1, q_2) \to h(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1 \times q_2 + q_2 \times q_1) \tag{1.2.1}$$

şeklinde tanımlanan h fonksiyonuna kuaterniyonik iç çarpım denir. Reel değerli, simetrik, bilineer h fonksiyonu iç çarpım aksiyomlarını sağlar [1].

Tanım 1.2.8. Eğer $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonları için $h(q_1, q_2) = 0$ oluyorsa q_1 ile q_2 kuaterniyonlarına $h-$ ortogonal denir [1].

Tanım 1.2.9. Bir $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonunun normu

$$\|q\|^2 = h(q, q) = q \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \tag{1.2.2}$$

eşitliğini sağlayan $\|q\|$ reel sayısına denir [8].

Tanım 1.2.10. Bir $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonunun tersi

$$(\ )^{-1} : \mathbb{Q} - \{0\} \to \mathbb{Q} - \{0\}$$
$$q \to q^{-1} = \frac{q}{\|q\|}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $\mathbb{Q}$ cebirinde bölme işlemi tanımlanabilir [8].

Tanım 1.2.11. $q_2 \neq 0$ olmak üzere, q_1 kuaterniyonunu q_2 kuaterniyonu ile bölmek için, kuaterniyon çarpımının değişme özelliği olmadığından, q_1, q_2^{-1} ile sağdan ve soldan çarpılırsa

$$r_1 = q_1 \times q_2^{-1}$$
$$r_2 = q_2^{-1} \times q_1$$

elde edilir. Burada r_1 kuaterniyonuna q_1 kuaterniyonunun q_2 kuaterniyonu ile sağdan ve r_2 kuaterniyonuna da q_1 kuaterniyonunun q_2 kuaterniyonu ile soldan bölümü denir. Genel olarak r_1 ve r_2 farklıdır.

Eğer genelleştirme yapılırsa $\forall q_1, q_2, \cdots, q_n \in \mathbb{Q}$ için

$$(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) = (q_1) + (q_2) + \cdots + (q_n)$$
$$(q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_n) = (q_n) \times \cdots \times (q_2) \times (q_1)$$
$$(q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_n)^{-1} = (q_n)^{-1} \times \cdots \times (q_2)^{-1} \times (q_1)^{-1}$$

bağıntıları elde edilir [8].

Tanım 1.2.12. Normu birim olan kuaterniyona birim kuaterniyon denir ve q_0 ile gösterilir. Buna göre vektörlerde olduğu gibi herhangi bir q_0 birim kuaterniyonu,

$$\|q\|^2 = h(q,q) = q \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

olmak üzere,

$$q_0 = \frac{q}{\|q\|} = \frac{d + a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

biçiminde ifade edilir. Bu q_0 birim kuaterniyonu

$$q_0 = \cos\omega + \boldsymbol{S}_0 \sin\omega$$

formunda da yazılabilir. Burada

$$\cos\omega = \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

biçimindedir. $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ olduğu zaman

$$\boldsymbol{S}_0 = \frac{a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

birim vektörüne q_0 birim kuaterniyonunun ekseni denir [8].

Tanım 1.2.13. Eğer $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonu için

$$q + q = 0$$

ise q kuaterniyonuna bir uzaysal kuaterniyon denir. Uzaysal kuaterniyonların kümesi $3-$ boyutlu vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ uzayına izomorftur.

Ayrıca, q_1, q_2 gibi iki uzaysal kuaterniyonun kuaterniyonik çarpımı

$$q_1 \times q_2 = -\langle q_1, q_2 \rangle + q_1 \wedge q_2$$

şeklindedir. Dolayısıyla, iki uzaysal kuaterniyon birbirine dikse kuaterniyon çarpımları vektörel çarpımlarına, paralel ise kuaterniyon çarpımları bu iki vektörün skalar çarpımının ters işaretlisine eşit olur [8].

Eğer $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonu için

$$q - q = 0$$

oluyorsa q kuaterniyonuna temporal kuaterniyon denir. O halde genel olarak bir q kuaterniyonu

$$q = \frac{1}{2}\left(q + q\right) + \frac{1}{2}(q - q)$$

şeklinde yazılabilir [1].

Tanım 1.2.14. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar kümesinde $s \in I = [0,1]$ olmak üzere,

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$$

$$s \to \alpha(s) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(s)\boldsymbol{e}_i, \qquad (1 \le i \le 3)$$

olarak tanımlanan eğriye uzaysal kuaterniyonik eğri denir [1].

Teorem 1.2.1. $\alpha : I \to E^3$**,** uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s \in [0,1]$ yay-parametresi ile verilsin. $\alpha(s)$, uzaysal kuaterniyonik eğrisinin $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{n}_2(s)\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}(s) &= \alpha'(s) \\ \boldsymbol{n}_1(s) &= \frac{1}{\|\alpha''(s)\|}\alpha''(s) \\ \boldsymbol{n}_2(s) &= \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}_1(s) \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

şeklinde hesaplanır. Bu vektörler arasında

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{n}_1(s) \times \boldsymbol{n}_1(s) = \boldsymbol{n}_2(s) \times \boldsymbol{n}_2(s) = -1 \\ &\boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}_1(s) = \boldsymbol{n}_2(s) = -\boldsymbol{n}_1(s) \times \boldsymbol{t}(s) \\ &\boldsymbol{n}_1(s) \times \boldsymbol{n}_2(s) = \boldsymbol{t}(s) = -\boldsymbol{n}_2(s) \times \boldsymbol{n}_1(s) \\ &\boldsymbol{n}_2(s) \times \boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{n}_1(s) = -\boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}_2(s) \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

olacak şekilde bir bağıntı vardır [9].

Teorem 1.2.2. $\alpha : I \to E^3$**,** uzaysal kuaterniyonik eğrisi verilsin. $s \in [0,1]$ herhangi bir parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$, uzaysal kuaterniyonik eğrisinin $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{n}_2(s)\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}(s) &= \frac{1}{\nu(s)}\alpha'(s) \ , \ \|\alpha'(s)\| = \nu(s) \\ \boldsymbol{n}_1(s) &= \boldsymbol{n}_2(s) \times \boldsymbol{t}(s) \\ \boldsymbol{n}_2(s) &= \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s) + \nu(s)\nu'(s)}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s) + \nu(s)\nu'(s)\|} \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

şeklindedir [10].

Teorem 1.2.3. $\alpha : I \to E^3$**,** uzaysal kuaterniyonik eğrisinin $s \in [0,1]$ herhangi bir parametresi ve $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği ile burulması, sırasıyla, $k(s)$, $r(s)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} k(s) &= \frac{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s) + \nu(s)\nu'(s)\|}{\nu^3(s)}, \quad \|\alpha'(s)\| = \nu(s) \\ r(s) &= \frac{h(\alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s) + \nu(s)\nu'(s)\|^2} \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

şeklinde hesaplanır [10].

Teorem 1.2.4. $\alpha : I \to E^3$, uzaysal kuaterniyonik eğrisi $s \in [0,1]$ yay-parametresi ile verilsin. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet $3-$ayaklısı $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{n}_2(s)\}$ ve eğrilikleri de $k(s)$, $r(s)$ olmak üzere, $\alpha(s)$ eğrisi boyunca $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{n}_2(s)\}$ vektörlerinin türevleri ile eğrilikler arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}'(s) &= k(s)\boldsymbol{n}_1(s) \\ \boldsymbol{n}_1'(s) &= -k(s)\boldsymbol{t}(s) + r(s)\boldsymbol{n}_2(s) \\ \boldsymbol{n}_2'(s) &= -r(s)\boldsymbol{n}_1(s) \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

biçimindedir. Bu formüllere Frenet formülleri denir ve matrisel ifadesi ise

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}_1' \\ \boldsymbol{n}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & r \\ 0 & -r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n}_1 \\ \boldsymbol{n}_2 \end{bmatrix} \tag{1.2.8}$$

şeklindedir [10].

Tanım 1.2.15. $\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonlar kümesinde $s \in I = [0,1]$ olmak üzere,

$$\xi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$$
$$s \to \xi(s) = \sum_{i=1}^{4} \xi_i(s)\boldsymbol{e}_i, \quad (1 \le i \le 4), \quad (\boldsymbol{e}_4 = 1)$$

şeklinde tanımlanan eğriye kuaterniyonik eğri denir [1].

Teorem 1.2.5. $\xi : I \to \mathbb{Q}$ kuaterniyonik eğrisi herhangi bir $s \in [0,1]$ parametresi ile verilsin. ξ kuaterniyonik eğrisinin $\xi(s)$ noktasındaki $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}_1(s), \boldsymbol{N}_2(s), \boldsymbol{N}_3(s)\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(s) &= \frac{1}{\|\xi'(s)\|}\xi'(s) \\
\boldsymbol{N}_1(s) &= \frac{\|\xi'(s)\|^2 \xi''(s) - h(\xi'(s), \xi''(s))\xi'(s)}{\left\|\|\xi'(s)\|^2 \xi''(s) - h(\xi'(s), \xi''(s))\xi'(s)\right\|} \\
\boldsymbol{N}_2(s) &= \eta \boldsymbol{N}_3(s) \wedge \boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}_1(s) \\
\boldsymbol{N}_3(s) &= \eta \frac{\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}_1(s) \wedge \xi'''(s)}{\|\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}_1(s) \wedge \xi'''(s)\|}, \ (\eta = \pm 1)
\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

şeklindedir [10].

Teorem 1.2.6. $\xi : I \to \mathbb{Q}$**,** kuaterniyonik eğrisi herhangi bir $s \in [0,1]$ parametresi ile verilsin. ξ kuaterniyonik eğrisinin $\xi(s)$ noktasındaki Frenet eğrilikleri, sırasıyla, $K(s)$, $k(s)$ ve $(r(s) - K(s))$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
K(s) &= \frac{\left\|\|\xi'(s)\|^2 \xi''(s) - h(\xi'(s), \xi''(s))\xi'(s)\right\|}{\|\xi'(s)\|^4} \\
k(s) &= \frac{\|\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}_1(s) \wedge \xi'''(s)\|\|\xi'(s)\|}{\left\|\|\xi'(s)\|^2 \xi''(s) - h(\xi'(s), \xi''(s))\xi'(s)\right\|} \\
r(s) - K(s) &= \frac{h(\xi^{(iv)}(s), \boldsymbol{N}_3(s))}{\|\boldsymbol{T}(s) \wedge \boldsymbol{N}_1(s) \wedge \xi'''(s)\|\|\xi'(s)\|}
\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

ile verilir [10].

Teorem 1.2.7. $\xi : I \to \mathbb{Q}$**,** kuaterniyonik eğrisi herhangi bir $s \in [0,1]$ parametresi ile verilsin. $\xi(s)$ noktasındaki Frenet $4-$ayaklısı $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}_1(s), \boldsymbol{N}_2(s), \boldsymbol{N}_3(s)\}$ ve eğrilikleri de $K(s), k(s)$ ve $(r(s) - K(s))$ olmak üzere, $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisi boyunca Frenet vektörleri ile eğrilikler arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}'(s) = K(s)\boldsymbol{N}_1(s)\ ,\ K(s) = \left\|\boldsymbol{T}'(s)\right\|\ ,\ \boldsymbol{N}_1(s) = \boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{T}(s)\\
&\boldsymbol{N}_1'(s) = -K(s)\boldsymbol{T}(s) + k(s)\boldsymbol{N}_2(s)\ ,\ \boldsymbol{N}_2(s) = \boldsymbol{n}_1(s)\times\boldsymbol{T}(s)\\
&\boldsymbol{N}_2'(s) = -k(s)\boldsymbol{N}(s) + \left(r(s) - K(s)\right)\boldsymbol{N}_3(s)\ ,\ \boldsymbol{N}_3(s) = \boldsymbol{n}_2(s)\times\boldsymbol{T}(s)\\
&\boldsymbol{N}_3'(s) = -\left(r(s) - K_{\xi}(s)\right)\boldsymbol{N}_2(s)
\end{aligned}
\tag{1.2.11}
$$

Bu formüllere Frenet formülleri denir ve matrissel ifadesi

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}' \\ \boldsymbol{N}_1' \\ \boldsymbol{N}_2' \\ \boldsymbol{N}_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ -K & 0 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & (r-K) \\ 0 & 0 & -(r-K) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N}_1 \\ \boldsymbol{N}_2 \\ \boldsymbol{N}_3 \end{bmatrix}
\tag{1.2.12}
$$

şeklindedir [1].

Burada $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisi öyle seçildi ki kuaterniyonik eğrinin birim teğet vektörü olan $\boldsymbol{T}(s)$ vektörü, $\boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{N}_1(s)\times\boldsymbol{T}(s)$ bağıntısı ile verildi. O halde $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin burulması, $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin asli eğriliğidir. Ayrıca, $\alpha(s)$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin burulması $r(s)$ ve $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin asli eğriliği $K(s)$ olmak üzere, $\xi(s)$ kuaterniyonik eğrisinin 3.eğriliği $\left(r(s) - K(s)\right)$ dır [10].

2. BÖLÜM

2.1 3-BOYUTLU E^3 ÖKLİD UZAYINDA KUATERNİYONİK SLANT HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Tanım 2.1.1 $\alpha : I \to E^3$, düzenli uzaysal kuaterniyonik bir eğri ve $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\}$ kuaterniyonik Frenet çatısı olsun. Eğer $\boldsymbol{n}_1(s)$ birim normal vektörü, sabit bir $\boldsymbol{u}$ vektörü ile sabit bir θ açısı yapıyorsa, yani her $s \in I$ için Hamilton iç Çarpımı sabit ise yani, $h(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{u}) = \cos\theta = sabit$ ise, bu durumda α eğrisine kuaterniyonik çatıya göre spatial kuaterniyonik slant helis denir [13].

Teorem 2.1.1 $\alpha = \alpha(s)$, E^3 3- boyutlu Öklid uzayında, sıfırdan farklı eğriliklere sahip bir birim hızlı uzaysal kuaterniyonik eğri olsun. Bu durumda, α eğrisinin bir kuaterniyonik slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{k^2}{(r^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{r}{k}\right)'(s) \tag{2.1.1}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

İspat. α, bir kuaterniyonik slant helis ve $\boldsymbol{u}$, $h(\boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{u}) = c$ sabit olacak şekilde sabit bir vektör olsun. Bu durumda $a_1 = a_1(s)$ ve $a_2 = a_2(s)$ regüler fonksiyonları için $\boldsymbol{u}$ vektörünü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\boldsymbol{u} = a_1(s)\boldsymbol{t}(s) + c\boldsymbol{n}_1(s) + a_2(s)\boldsymbol{n}_2(s), \ s \in I \tag{2.1.2}$$

(2.1.2) nin diferensiyelini alırsak

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}' = a_1'(s)\boldsymbol{t}(s) + a_1(s)\boldsymbol{t}'(s) + c'\boldsymbol{n}_1(s) + c\boldsymbol{n}_1'(s) + a_2'(s)\boldsymbol{n}_2(s) + a_2(s)\boldsymbol{n}_2'(s)\\
&0 = a_1'(s)\boldsymbol{t}(s) + a_1(s)[k\boldsymbol{n}_1(s)] + c[-k\boldsymbol{t}(s) + r\boldsymbol{n}_2(s)] + a_2'(s)\boldsymbol{n}_2(s) + a_2(s)[-r\boldsymbol{n}_1(s)]\\
&0 = [a_1'(s) - ck]\boldsymbol{t}(s) + [ka_1(s) - ra_2(s)]\boldsymbol{n}_1(s) + [cr + a_2'(s)]\boldsymbol{n}_2(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1' - ck = 0, \\ a_1 k - a_2 r = 0, \\ cr + a_2' = 0. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

elde ederiz. (2.1.3) nin ikinci eşitliğinden

$$a_1 = a_2\left(\frac{r}{k}\right) \tag{2.1.4}$$

yazabiliriz ve $\boldsymbol{u}$ vektörü sabit olduğundan

$$h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{u}\times\hat{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{u}\times\hat{\boldsymbol{u}}]$$
$$= \langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle$$
$$= \langle a_1(s)\boldsymbol{t}(s) + c\boldsymbol{n}_1(s) + a_2(s)\boldsymbol{n}_2(s), a_1(s)\boldsymbol{t}(s) + c\boldsymbol{n}_1(s) + a_2(s)\boldsymbol{n}_2(s)\rangle$$
$$h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = a_1^2 + c^2 + a_2^2 = sabit \qquad (2.1.5)$$

elde ederiz. (2.1.4) eşitliğini (2.1.5) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\left[a_2\left(\frac{r}{k}\right)\right]^2 + c^2 + a_2^2 = sabit$$
$$a_2^2\left[\left(\frac{r}{k}\right)^2 + 1\right] + c^2 = sabit$$

ve c sabit olduğundan

$$a_2^2\left(\left(\frac{r}{k}\right)^2 + 1\right) = m^2 = sabit$$

elde ederiz. Burada $m \neq 0$ kabul edeceğiz. Çünkü eğer $m = 0$ olursa $a_2 = 0$ ve (2.1.4) eşitliğinden $a_1 = c = 0$ olur. Bu da $\boldsymbol{u} = \vec{0}$ demektir. Böylece,

$$a_2 = \mp\frac{m}{\sqrt{\left(\frac{r}{k}\right)^2 + 1}}$$

yazabiliriz.

(2.1.3) sisteminin üçüncü eşitliğinden

$$\left(\mp\frac{m}{\sqrt{\left(\frac{r}{k}\right)^2 + 1}}\right)' = -cr$$

dır. Bu son eşitlik düzenlenirse

$$\frac{k^2}{(r^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{r}{k}\right)' = \mp\frac{c}{m} = sabit$$

elde edilir. Böylece (2.1.1) eşitliğini elde etmiş oluruz.

Şimdi tersine (2.1.1) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Hesapları kolaylaştırmak için bu eşitliğin sabit olduğunu kabul edelim ve c olarak alalım. Aşağıdaki gibi bir $\boldsymbol{u}$ vektörü tanımladığımızda $\boldsymbol{u}$ nun s ye göre diferensiyeli alınırsa

$$\boldsymbol{u} = \frac{r}{\sqrt{r^2+k^2}}\boldsymbol{t} + c\boldsymbol{n}_1 + \frac{k}{\sqrt{r^2+k^2}}\boldsymbol{n}_2 \qquad (2.1.6)$$

$$\boldsymbol{u}' = \left(\frac{r}{\sqrt{r^2+k^2}} \right)' \boldsymbol{t} + \frac{r}{\sqrt{r^2+k^2}} \boldsymbol{t}' + c\boldsymbol{n}_1' + \left(\frac{k}{\sqrt{r^2+k^2}} \right)' \boldsymbol{n}_2 + \frac{k}{\sqrt{r^2+k^2}} \boldsymbol{n}_2'$$

$$\boldsymbol{u}' = \left[\frac{r'\sqrt{r^2+k^2} - r(\sqrt{r^2+k^2})'}{r^2+k^2} - kc \right] \boldsymbol{t} + \left[\frac{k'\sqrt{r^2+k^2} - k(\sqrt{r^2+k^2})'}{r^2+k^2} + rc \right] \boldsymbol{n}_2$$

ve kabulden c yi yerine yazdığımızda

$$\boldsymbol{u}' = \left[\frac{r'\sqrt{r^2+k^2} - r(\sqrt{r^2+k^2})'}{r^2+k^2} - \frac{k^2r' - krk'}{(r^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \boldsymbol{t} + \left[\frac{k'\sqrt{r^2+k^2} - k(\sqrt{r^2+k^2})'}{r^2+k^2} + \frac{krr' - r^2k'}{(r^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \boldsymbol{b}$$

olur. Buradan $\boldsymbol{u}' = 0$ elde edilir. Bu da $\boldsymbol{u}$ nun sabit bir vektör olduğunu gösterir. Diğer yandan

$$h(\boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{u}) = h(\boldsymbol{n}_1(s), a_1(s)\boldsymbol{t}(s) + c\boldsymbol{n}_1(s) + a_2(s)\boldsymbol{n}_2(s))$$
$$h(\boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{u}) = a_1(s)h(\boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{t}(s)) + ch(\boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{n}_1(s)) + a_2(s)h(\boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{n}_2(s))$$

dır. Burada $h(\boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{n}_2(s)) = 0$ ve $h(\boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{t}(s)) = 0$ olduğundan

$$h(\boldsymbol{n}_1(s), \boldsymbol{u}) = c = sabit$$

elde edilir. Böylece, Tanım 2.1.1 den α uzaysal eğrisinin bir kuaterniyonik slant helis olduğunu elde ederiz.

Burada göstermiş olduk ki, 3- boyutlu E^3- Öklid uzayında kuaterniyonik çatıya göre, bir kuaterniyonik slant helis, (2.1.1) eşitliğini sağlar.

2.2. 4-BOYUTLU E^4 ÖKLİD UZAYINDA KUATERNİYONİK SLANT HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Tanım 2.2.1 $\alpha : I \to E^4$ birim hızlı kuaterniyonik eğri olmak üzere, $\boldsymbol{N}_1$ birim normali herhangi bir sabit $\boldsymbol{U}$ vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa bu durumda α eğrisine kuaterniyonik slant helis denir [14].

Teorem 2.2.1 $\alpha : I \to E^4$, 4- boyutlu E^4 Öklid uzayında birim hızlı bir kuaterniyonik eğri olsun.

$$G_0 = \int K(s)ds, \;\; G_1 = 1, \;\; G_2 = \frac{K}{k} G_0, \;\; G_3 = \frac{1}{r-K}\left[kG_1 + G_2' \right] \qquad (2.2.1)$$

fonksiyonları tanımlansın. Bu durumda α eğrisinin kuaterniyonik slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{i=0}^{3} G_i^2 = c \tag{2.2.2}$$

fonksiyonunun sıfırdan farklı ve sabit olmasıdır. Ayrıca $\boldsymbol{N}_1$ ile sabit bir $\boldsymbol{U}$ vektörü arasındaki açı θ olmak üzere $c = \sec^2\theta$ dır.

İspat. α , 4 boyutlu E^4 Öklid uzayında birim hızlı bir kuaterniyonik eğri olmak üzere α eğrisinin bir kuaterniyonik slant helis olduğunu kabul edelim. $h(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) = 1$ olacak şekilde $\boldsymbol{N}_1$ ile sabit bir θ açısı yapan $\boldsymbol{U}$ vektörünü göz önüne alalım. $a_i(s),\ 0 \le i \le 3$ fonksiyonları diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, her $s \in I$ için

$$\boldsymbol{U} = a_0(s)\boldsymbol{T}(s) + \sum_{i=1}^{3} a_i(s)\boldsymbol{N}_i,\ \ s \in I \tag{2.2.3}$$

yani,

$$a_0 = h(\boldsymbol{T},\boldsymbol{U}),\ \ a_i = \sum_{i=1}^{3} h(\boldsymbol{N}_i,\boldsymbol{U}) \tag{2.2.4}$$

yazabiliriz. $\boldsymbol{U}$ vektörü sabit olduğundan (2.2.3) ün diferensiyelinden aşağıdaki diferensiyel eşitlik sistemini elde ederiz:

$$\begin{cases} a_0' - Ka_1 = 0, \\ a_0K - ka_2 = 0, \\ a_1k + a_2' - (r-K)a_3 = 0, \\ a_2(r-K) + a_3' = 0. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Şimdi

$$a_i(s) = G_i(s)a_1,\ \ 0 \le i \le 3 \tag{2.2.6}$$

biçiminde $G_i = G_i(s)$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Burada $a_1 \neq 0$ alacağız. Aksi halde (2.2.6) den $a_i = 0$, $0 \le i \le 3$ olur. Bu da $\boldsymbol{U} = 0$ olması demektir. $\boldsymbol{U}$, sıfırdan farklı sabit açı yapan bir vektör olmasını kabul ettiğimizden bir çelişki oluşur. (2.2.6) eşitliğinde, ilk olarak $i = 0$ için

$$G_0 = \frac{a_0}{a_1},$$

dır. (2.2.5) in ilk eşitliğinde, $a_0' - Ka_1 = 0$ ve buradan $a_0 = \int K(s)a_1 ds$ olduğundan

$$G_0 = \int K(s)ds$$

olarak bulunur. $i = 1$ için $G_1 = 1$ dir. $i = 2$ için (2.2.5) in ikinci eşitliğinden G_2 fonksiyonu,

$$G_2 = \frac{\frac{K}{k}a_0}{a_1}$$

$$G_2 = \frac{K}{k}G_0$$

olarak bulunur ve son olarak $i = 3$ için G_3 fonksiyonu (2.2.5) in üçüncü eşitliğinden,

$$G_3 = \frac{\frac{1}{r-K}(a_1 k + a_2')}{a_1}$$

$$G_3 = \frac{1}{r-K}(G_1 k + G_2')$$

biçiminde elde edilir. Böylece G_0, G_1, G_2 ve G_3 fonksiyonlarını aşağıdaki gibi elde etmiş oluruz:

$$\begin{cases} G_0 = \int K(s)ds\,, \\ G_1 = 1, \\ G_2 = \dfrac{K}{k}G_0, \\ G_3 = \dfrac{1}{r-K}\left[kG_1 + G_2'\right]. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

(2.2.6) nin son eşitliğinden

$$G_2(r-K) + G_3' = 0 \tag{2.2.8}$$

yazabiliriz. Şimdi

$$t(s) = \int_0^s (r-K)(u)du, \quad \frac{dt}{ds} = (r-K)(s) \tag{2.2.9}$$

değişken değiştirmesi yapalım (2.2.7) nin son eşitliği ve (2.2.8) eşitliğinden

$$G_2'(s) = (r-K)(s)G_3(s) - k(s)G_1(s)$$

olarak buluruz. Bu son eşitliği t ye göre yazarsak

$$G_2'(t) = G_3(t) - \left(\frac{k(t)}{(r-K)(t)}\right)G_1(t)$$

elde ederiz. (2.2.8) eşitliğinin t değişkenine göre diferensiyeli aldığımızda ise

$$G_2(s) = -\frac{1}{(r-K)(s)}G_3'(s)$$

$$G_2'(t) = -G_3''(t)$$

olarak buluruz. Son iki eşitliğin ortak çözümünden aşağıdaki gibi $G_3(t)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden bir diferensiyel denklemini elde ederiz:

$$G_3''(t)+G_3(t)=\frac{k(t)}{(r-K)(t)}G_1(t).$$

Burada $G_3(t)=y$, $\frac{k(t)}{(r-K)(t)}G_1(t)=f(t)$ olarak alırsak genel çözüm A ve B keyfi sabitler olmak üzere,

$$y_1=A\cos t+B\sin t$$

şeklinde bulunur. Özel çözüm ise

$$y_2=-\left(\int f(t)\sin(t)dt\right)\cos t+\left(\int f(t)\cos(t)dt\right)\sin t$$

olarak bulunur. Buna göre $G_3(t)$ fonksiyonunu,

$$G_3(t)=\left(A-\int\left[\frac{k(t)}{(r-K)(t)}G_1(t)\sin t\right]dt\right)\cos t+\left(B+\int\left[\frac{k(t)}{(r-K)(t)}G_1(t)\cos t\right]dt\right)\sin t \tag{2.2.10}$$

biçiminde bulmuş oluruz. Buaradan değişken değiştirmesi yaptığımızda $G_3(s)$ fonksiyonu,

$$\begin{aligned}G_3(s)=&\left(A-\int\left[k(s)G_1(s)\sin\int(r-K)(s)ds\right]ds\right)\cos\int(r-K)(s)ds\\&+\left(B+\int\left[k(s)G_1(s)\cos\int(r-K)(s)ds\right]ds\right)\sin\int(r-K)(s)ds\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

şeklinde olur.

(2.2.8) eşitliğinden G_2 fonksiyonu,

$$\begin{aligned}G_2(s)=&\left(A-\int\left[k(s)G_1(s)\sin\int(r-K)(s)ds\right]ds\right)\sin\int(r-K)(s)ds\\&-\left(B+\int\left[k(s)G_1(s)\cos\int(r-K)(s)ds\right]ds\right)\cos\int(r-K)(s)ds.\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

biçiminde elde edilir. (2.2.11) ve (2.2.12) eşitliklerinde

$$A-\int\left[k(s)G_1(s)\sin\int(r-K)(s)ds\right]ds=p$$
$$B+\int\left[k(s)G_1(s)\cos\int(r-K)(s)ds\right]ds=q$$
$$\int(r-K)(s)ds=t$$

olarak alırsak

$$G_2^2+G_3^2=(p\sin t-q\cos t)^2+(p\cos t+q\sin t)^2$$
$$G_2^2+G_3^2=p^2+q^2$$
$$G_2^2+G_3^2=\left[A-\int kG_1\sin(t)ds\right]^2+\left[B+\int kG_1\cos(t)ds\right]^2$$
$$G_2^2+G_3^2=A^2+B^2+c_1^2+c_2^2 \tag{2.2.13}$$

yazabiliriz. Burada c_1 ve c_2 integral sabitleridir. (2.2.7) eşitlik sisteminden ise

$$G_0^2 + G_1^2 = sabit \tag{2.2.14}$$

dir. Böylece (2.2.13) ve (2.2.14) eşitliklerinden

$$\sum_{i=0}^{3} G_i^2 = c$$

elde ederiz. Ayrıca bu c sabiti aşağıdaki gibi hesaplanabilir: (2.2.2) ve (2.2.6) eşitliklerinden

$$c = \sum_{i=0}^{3} G_i^2 = \frac{1}{a_1^2}\sum_{i=0}^{3} a_i^2 = \frac{1}{a_1^2} = \sec^2\theta$$

dır.

Tersine (2.2.6) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $c = \sec^2\theta$ olsun. $\boldsymbol{U}$ birim vektörünü,

$$\boldsymbol{U} = \cos\theta\left[G_0\boldsymbol{T} + \sum_{i=1}^{3} G_i\boldsymbol{N}_i \right]$$

olarak tanımlayalım. $\boldsymbol{U}$ nun s değişkenine göre diferensiyeli alırsak

$$\boldsymbol{U}' = \cos\theta\left[G_0'\boldsymbol{T} + G_0\boldsymbol{T} + \sum_{i=1}^{3}\left(G_i'\boldsymbol{N}_i + G_i\boldsymbol{N}_i'\right) \right]$$

$$\boldsymbol{U}' = \cos\theta\begin{bmatrix} (G_0' - KG_1)\boldsymbol{T} + (G_0K - G_1' - kG_2)\boldsymbol{N}_1 + (G_2' + kG_1 - (r-K)G_3)\boldsymbol{N}_2 \\ +((r-K)G_2 + G_3')\boldsymbol{N}_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}' = 0$$

buluruz. Bu da $\boldsymbol{U}$ nun bir sabit vektör olduğunu gösterir. Diğer yandan $\boldsymbol{N}_1$ ile $\boldsymbol{U}$ nun kuaterniyon iç çarpımından

$$h(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{U}) = h\left(\boldsymbol{N}_1, \cos\theta(G_0\boldsymbol{T} + \sum_{i=1}^{3} G_i\boldsymbol{N}_i) \right)$$

$$h(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{U}) = G_1\cos\theta = \cos\theta$$

elde ederiz. Tanım 2.2.1 den α nın E^4 Öklid uzayında bir kuaterniyonik slant helis olduğunu göstermiş olduk.

Böylece, 4 – boyutlu E^4 Öklid uzayında birim hızlı bir kuaterniyonik α eğrisinin, (2.2.1) eşiliğindeki fonksiyonlarla birlikte, (2.2.2) şartını sağlayan bir slant helis olduğunu göstermiş olduk.

Teorem 2.2.2 E^4 4- boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı ve sabit eğriliğe sahip kuaterniyonik slant helis yoktur.

İspat. İlk olarak sıfırdan farklı ve sabit eğriliğe sahip bir kuaterniyonik slant helisin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda (2.2.5) ve (2.2.7) eşitlik sistemleri vardır. Bu eşitliklerden,

$$\sum_{i=0}^{3} G_i^2 = G_0^2 + G_1^2 + G_2^2 + G_3^2$$

$$= \left(\int K(s)ds\right)^2 + 1 + \left(\frac{K}{k}\right)^2 G_0^2 + \frac{1}{(r-K)^2}(kG_1 + G_2')^2$$

$$= \left(\int K(s)ds\right)^2 \left(1 + \left(\frac{K}{k}\right)^2\right) + \frac{1}{(r-K)^2}\left(k^2 + 2k\left(\frac{K}{k}\right)' + \left[\left(\frac{K}{k}\right)'\right]^2\right) + 1$$

yazabiliriz. Eğrilikleri sabit kabul ettiğimiz için türevleri de sıfır olacağından,

$$\sum_{i=0}^{3} G_i^2 = \left(\int K(s)ds\right)^2 \left(1 + \left(\frac{K}{k}\right)^2\right) + \left(\frac{k}{r-K}\right)^2 + 1$$

elde ederiz. Burada integralden s değişkenine bağlı bir değer geleceği için sabit olmayan bir eşitlik buluruz. Teorem 2.2.1 de $\sum_{i=0}^{3} G_i^2 = sabit$ olarak elde etmiştik. Öyleyse kabulümüz yanlıştır. Yani, E^4 Öklid uzayında sıfırdan farklı ve sabit eğrilikli kuaterniyonik slant helis yoktur.

Teorem 2.2.3 $\alpha : I \to E^4$, bir birim hızlı kuaterniyonik eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin bir kuaterniyonik slant helis olması için gerek ve yeter şart $G_3(s)$, C^2- fonksiyonunun

$$G_0 = \int K(s)ds, \quad G_1 = 1, \quad G_2 = \frac{K}{k}G_0, \quad G_3 = \frac{1}{r-K}\left[kG_1 + G_2'\right]$$

olmak üzere,

$$G_3' = -(r-K)(s)G_2(s) \tag{2.2.15}$$

olmasıdır.

İspat. α eğrisinin bir kuaterniyonik slant helis olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 2.2.2 sağlanır. (2.2.2) eşitliğinin diferensiyellenmesiyle

$$\sum_{i=0}^{3} G_i^2 = c$$

$$\sum_{i=0}^{3} G_i G_i' = 0$$

$$G_0 K + G_2((r-K)G_3 - kG_1) + G_3 G_3' = 0$$

$$G_0K+(r-K)G_2G_3-k\frac{K}{k}G_0+G_3G_3'=0$$

$$G_3(G_3'+G_2(r-K))=0$$

elde ederiz. $G_3(s)\neq 0$ olduğundan

$$G_3'+G_2(r-K)=0$$

dır. Bu da (2.2.15) eşitliğini gösterir.

Şimdi tersine, (2.2.15) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. $\boldsymbol{U}$ vektörünü

$$\boldsymbol{U}=\cos\theta\left[G_0\boldsymbol{T}+\sum_{i=1}^{3}G_i\boldsymbol{N}_i\right]$$

olarak tanımlayalım. $\boldsymbol{U}$ nun s değişkenine göre diferensiyelini aldığımızda

$$\boldsymbol{U}'=\cos\theta\left[G_0'\boldsymbol{T}+G_0\boldsymbol{T}'+\sum_{i=1}^{3}G_i'\boldsymbol{N}_i+\sum_{i=1}^{3}G_i\boldsymbol{N}_i'\right]$$

$$\boldsymbol{U}'=\cos\theta\begin{bmatrix}K\boldsymbol{T}+G_0K\boldsymbol{N}_1+(r-K)G_3\boldsymbol{N}_2-k\boldsymbol{N}_2-(r-K)G_2\boldsymbol{N}_3\\-K\boldsymbol{T}+k\boldsymbol{N}_2-kG_2\boldsymbol{N}_1+(r-K)G_2\boldsymbol{N}_3-G_3(r-K)\boldsymbol{N}_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}'=0$$

elde ederiz. Yani $\boldsymbol{U}$ nun sabit bir vektör olduğunu göstermiş oluruz. Diğer taraftan

$$h(\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{U})=\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{N}_1\times\hat{\boldsymbol{U}}+\boldsymbol{U}\times\hat{\boldsymbol{N}}_1\right]$$

$$h(\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{U})=\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{U}\rangle$$

$$h(\boldsymbol{N}_1(s),\boldsymbol{U})=\cos\theta=sabit$$

dır. Yani, Tanım 2.2.1 den α bir kuaterniyonik slant helistir.

Böylece, E^4 Öklid uzayında birim hızlı bir α kuaterniyonik eğrisinin (2.2.1) fonksiyonları ile birlikte slant helis olması için gerek ve yeter şartın (2.2.15) şartını sağlaması gerektiğini göstermiş olduk.

Teorem 2.2.4 $\alpha:I\to E^4$, bir birim hızlı kuaterniyonik eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin bir kuaterniyonik slant helis olması için gerek ve yeter şart C ve D sabitler olmak üzere,

$$\begin{aligned}G_2(s)=&\left(C-\int\left[kG_1(s)\sin\int^s(r-K)(u)du\right]ds\right)\sin\int^s(r-K)(u)du\\&-\left(D+\int\left[kG_1(s)\cos\int^s(r-K)(u)du\right]ds\right)\cos\int^s(r-K)(u)du\end{aligned}\tag{2.2.16}$$

olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki α bir kuaterniyonik slant helis olsun.

$$t = \int^{s} (r-K)(u)du$$

olmak üzere $c(s)$ ve $d(s)$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{cases} c(s) = G_3(s)\cos t + G_2(s)\sin t + \int (kG_1(s)\sin t)ds, \\ d(s) = G_3(s)\sin t - G_2(s)\cos t - \int (kG_1(s)\cos t)ds. \end{cases} \tag{2.2.17}$$

(2.2.17) eşitliklerinin s değişkenine göre diferensiyelini alırsak

$$c'(s) = G_3'(s)\cos t - G_3(s)t'\sin t + G_2'(s)\sin t + G_2(s)t'\cos t + kG_1(s)\sin t$$
$$c'(s) = -(r-K)G_2(s)\cos t - G_3(s)(r-K)\sin t + G_2(s)(r-K)\cos t$$
$$+(G_3(s)(r-K) - kG_1(s))\sin t + kG_1(s)\sin t$$
$$c'(s) = 0$$

ve

$$d'(s) = G_3'(s)\sin t + G_3(s)t'\cos t - G_2'(s)\cos t + G_2(s)t'\sin t - kG_1(s)\sin t$$
$$d'(s) = -(r-K)G_2(s)\sin t + G_3(s)(r-K)\cos t + G_2(s)(r-K)\sin t$$
$$-(G_3(s)(r-K) - kG_1(s))\cos t - kG_1(s)\cos t$$
$$d'(s) = 0$$

olarak elde ederiz. Öyleyse $c(s) = C$ ve $d(s) = D$ olacak şekilde C ve D sabitlerini yazabiliriz. Bulunan bu C ve D sabitlerini (2.2.17) sisteminde yerine yazarak ortak çözüm yaparsak $G_2(s)$ fonksiyonunu,

$$C = G_3(s)\cos t + G_2(s)\sin t + \int (kG_1(s)\sin t)ds$$
$$D = G_3(s)\sin t - G_2(s)\cos t - \int (kG_1(s)\cos t)ds$$
$$G_2(s)\sin t = C - G_3(s)\cos t - \int (kG_1(s)\sin t)ds$$
$$G_2(s)\cos t = -D + G_3(s)\sin t - \int (kG_1(s)\cos t)ds$$
$$G_2(s)\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) = \sin t\left[C - G_3(s)\cos t - \int (kG_1(s)\sin t)ds\right]$$
$$+\cos t\left[-D + G_3(s)\sin t - \int (kG_1(s)\cos t)ds\right]$$
$$G_2(s) = \left[C - \int (kG_1(s)\sin t)ds\right]\sin t - \left[D + \int (kG_1(s)\cos t)ds\right]\cos t$$

olarak buluruz.

Tersine, (2.2.16) eşitliği var olsun. (2.2.16) eşitliğinin diferensiyellenmesiyle

$$G_2'(s) = -kG_1(s) + (r-K)G_3(s)$$

eşitliğini elde ederiz ve (2.2.7) nin son eşitliğinden α eğrisinin bir kuaterniyonik slant helis olduğunu ispatlamış oluruz.

Böylece α eğrisinin bir kuaterniyonik slant helis olması için gerek ve yeter şartın $G_2(s)$ fonksiyonunun (2.2.16) daki gibi tanımlı olması gerektiğini göstermiş olduk.

3. BÖLÜM

3.1. 4- BOYUTLU E^4 ÖKLİD UZAYINDA KUATERNİYONİK ÇATIYA GÖRE GENEL HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Tanım 3.1.1 Birim hızlı bir $\alpha : I \to E^4$ kuaterniyonik eğrisinin $\boldsymbol{T}$ birim teğet vektörü, sabit yönlü bir $\boldsymbol{U}$ vektörüyle sabit bir açı yapıyorsa bu durumda α eğrisine kuaterniyonik genel helis adı verilir.

Teorem 3.1.1 Regüler bir α kuaterniyonik eğrisi için $K > 0,\ k > 0$ ve $r - K \neq 0$ olmak üzere α eğrisinin bir kuaterniyonik genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{K}{k}\right)^2 + \left[\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k}\right)'\right]^2 = \tan^2\theta = sabit \tag{3.1.1}$$

koşulunun sağlanmasıdır.

İspat. α, bir kuaterniyonik genel helis olsun. Yani $h(\boldsymbol{T},\boldsymbol{U}) = \cos\theta$ olsun. Bu eşitliğin her iki tarafının s değişkenine göre türevini alırsak

$$h(\boldsymbol{T}',\boldsymbol{U}) + h(\boldsymbol{T},\boldsymbol{U}') = 0$$
$$h(K\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{U}) = 0$$

$K \neq 0$ olduğundan $h(\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{U}) = 0$ elde ederiz. Ayrıca $\boldsymbol{U}$ vektörü $\boldsymbol{T},\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_3$ vektörleri yardımıyla $c = \cos\theta,\ a_1 = \cos\varphi$ ve $a_2 = \cos\psi$, $\boldsymbol{U}$ vektörünün doğrultman kosinüsleri olmak üzere

$$\boldsymbol{U} = c\boldsymbol{T} + a_1\boldsymbol{N}_2 + a_2\boldsymbol{N}_3 \tag{3.1.2}$$

biçiminde yazabiliriz. $\boldsymbol{U}$ birim vektör olduğundan

$$h(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) = 1$$
$$h(c\boldsymbol{T} + a_1\boldsymbol{N}_2 + a_2\boldsymbol{N}_3, c\boldsymbol{T} + a_1\boldsymbol{N}_2 + a_2\boldsymbol{N}_3) = 1$$
$$h(c\boldsymbol{T},c\boldsymbol{T}) + h(a_1\boldsymbol{N}_2,a_1\boldsymbol{N}_2) + h(a_2\boldsymbol{N}_3,a_2\boldsymbol{N}_3) = 1$$
$$c^2h(\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}) + a_1^2h(\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_2) + a_2^2h(\boldsymbol{N}_3,\boldsymbol{N}_3) = 1$$
$$c^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1$$

dır. (3.1.2) eşitliğinin her iki tarafının diferensiyelinden

$$c'\boldsymbol{T} + c\boldsymbol{T}' + a_1'\boldsymbol{N}_2 + a_1\boldsymbol{N}_2' + a_2'\boldsymbol{N}_3 + a_2\boldsymbol{N}_3' = 0$$

$$(cK - a_1 k)\boldsymbol{N}_1 + \left[a_1' - a_2(r-K)\right]\boldsymbol{N}_2 + \left[a_1(r-K) + a_2'\right]\boldsymbol{N}_3 = 0$$

elde ederiz ve buradan aşağıdaki eşitliklere ulaşmış oluruz:

$$a_1 = \frac{K}{k}c = -\frac{1}{r-K}a_2',\ a_1' = (r-K)a_2. \tag{3.1.3}$$

Buradan, $a_1 = -\frac{1}{r-K}a_2'$ olduğundan

$$a_1' = \frac{(r-K)'}{(r-K)^2}a_2' - \frac{1}{r-K}a_2''$$

ve aynı zamanda $a_1' = (r-K)a_2$ olduğundan a_2 ye bağlı

$$a_2'' - \frac{\left(r-K\right)'}{\left(r-K\right)}a_2' + \left(r-K\right)^2 a_2 = 0 \tag{3.1.4}$$

şeklinde ikinci dereceden bir diferensiyel denklem elde ederiz. $t = \int_0^s (r-K)ds$ değişken değiştirmesi yaparsak son eşitliği t değişkenine bağlı olarak

$$a_2'' - \frac{\left(r-K\right)'}{\left(r-K\right)}a_2' + \left(r-K\right)^2 a_2 = 0$$

$$\frac{d^2a_2}{ds^2} - \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right)\frac{ds}{dt}\frac{da_2}{ds} + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 a_2 = 0$$

$$\frac{d^2a_2}{dt^2} + a_2 = 0$$

$$a_2''(t) + a_2(t) = 0$$

biçiminde yazabiliriz. Bu denklemin çözümü, E ve F sabitler olmak üzere,

$$a_2(t) = E\cos t + F\sin t$$

$$a_2 = E\cos\int_0^s (r-K)ds + F\sin\int_0^s (r-K)ds \tag{3.1.5}$$

şeklindedir. (3.1.3) ve (3.1.5) eşitliklerinden

$$a_1 = -\frac{1}{r-K}a_2' = c\frac{K}{k}$$

$$a_1 = -\frac{1}{r-K}\left[-E(r-K)\sin\int_0^s (r-K)ds + F(r-K)\cos\int_0^s (r-K)ds\right]$$

$$a_1 = E\sin\int_0^s (r-K)ds - F\cos\int_0^s (r-K)ds = c\frac{K}{k}$$

ve

$$a_1' = (r-K)a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{r-K}a_1'$$

$$a_2 = \frac{1}{r-K}\left[E(r-K)\cos\int_0^s (r-K)ds + F(r-K)\sin\int_0^s (r-K)ds \right] = \frac{1}{r-K}\left(c\frac{K}{k} \right)'$$

$$a_2 = E\cos\int_0^s (r-K)ds + F\sin\int_0^s (r-K)ds = c\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k} \right)'$$

olarak bulunur. Bu son iki eşitlikten E ve F sabitlerini aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$E = c\left[\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k} \right)' \cos\int_0^s (r-K)(s)ds + \frac{K}{k}\sin\int_0^s (r-K)(s)ds \right]$$

$$F = c\left[\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k} \right)' \sin\int_0^s (r-K)(s)ds - \frac{K}{k}\cos\int_0^s (r-K)(s)ds \right].$$

Böylece

$$E = a_2\cos t + a_1\sin t = c\left[\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k} \right)' \cos t + \frac{K}{k}\sin t \right]$$

$$F = a_2\sin t - a_1\cos t = c\left[\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k} \right)' \sin t - \frac{K}{k}\cos t \right]$$

$$E^2 + F^2 = c^2\left[\begin{array}{l} \left(\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k} \right)' \cos\int_0^s (r-K)(s)ds + \frac{K}{k}\sin\int_0^s (r-K)(s)ds \right)^2 \\ + \left(\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k} \right)' \sin\int_0^s (r-K)(s)ds - \frac{K}{k}\cos\int_0^s (r-K)(s)ds \right)^2 \end{array} \right]$$

$$+ (a_1^2 + a_2^2)(\cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$E^2 + F^2 = a_1^2 + a_2^2 = c^2\left[\left(\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k} \right)' \right)^2 + \left(\frac{K}{k} \right)^2 \right]$$

$$E^2 + F^2 = \left[\frac{1}{(r-K)^2}\left(\left(\frac{K}{k} \right)' \right)^2 + \left(\frac{K}{k} \right)^2 \right] \cos^2\theta = \sin^2\theta$$

veya

$$\left(\frac{K}{k}\right)^2+\left(\frac{1}{(r-K)}\left(\frac{K}{k}\right)'\right)^2=\tan^2\theta=sabit \tag{3.1.6}$$

olarak bulmuş oluruz.

Tersine, bu şartı sağlayan düzenli bir kuaterniyonik eğri için her zaman bu eğrinin teğeti ile sabit açı yapan sabit yönlü bir $\boldsymbol{U}$ vektörü bulabiliriz.

$$\boldsymbol{U}=\left[\boldsymbol{T}+\frac{K}{k}\boldsymbol{N}_2+\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k}\right)'\boldsymbol{N}_3\right]\cos\theta$$

olarak tanımlanan vektörü göz önüne alalım. Burada $\boldsymbol{U}$ vektörünün s ye göre diferensiyelini alırsak $\boldsymbol{U}'=0$ olur. Bu da $\boldsymbol{U}$ nun sabit vektör olması demektir. Dolayısıyla Tanım 3.1.1 den α, bir kuaterniyonik genel helis olur ve böylece bir α kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik genel helis olması için gerek ve yeter şartın (3.1.1) koşulunun sağlanması olduğunu göstermiş olduk.

Teorem 3.1.2. 4- boyutlu E^4 uzayında $\alpha=\alpha(s)$ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik genel helis olması için gerek ve yeter şart $f\in C^2$ fonksiyonu için

$$(r-K)f(s)=\left(\frac{K}{k}\right)' \tag{3.1.7}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. $\alpha=\alpha(s)$ eğrisi bir kuaterniyonik genel helis olsun. Teorem 4.1.1 deki eşitliğin her iki tarafının s ye göre diferensiyelini alırsak

$$\left(\frac{K}{k}\right)^2+\left[\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k}\right)'\right]^2=\tan^2\theta$$

$$2\frac{K}{k}\left(\frac{K}{k}\right)'+2\left[\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k}\right)'\right]\left[\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k}\right)'\right]'=0$$

$$\frac{K}{k}\left(\frac{K}{k}\right)'+\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k}\right)'\left[\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k}\right)'\right]'=0 \tag{3.1.8}$$

ve

$$\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k}\right)' = -\frac{\frac{K}{k}(\frac{K}{k})'}{[\frac{1}{r-K}(\frac{K}{k})']'} \tag{3.1.9}$$

yazabiliriz.

$$f(s) = -\frac{\frac{K}{k}(\frac{K}{k})'}{[\frac{1}{r-K}(\frac{K}{k})']'}, \tag{3.1.10}$$

olarak alarak (3.1.9) da yerine yazarsak

$$(r-K)f(s) = \left(\frac{K}{k}\right)' \tag{3.1.11}$$

elde edilir. Ayrıca (3.1.8) den

$$\left[\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k}\right)'\right]' = -(r-K)\frac{K}{k}$$

yazılabilir. (3.1.11) de elde edilen $f(s)$ fonksiyonu son eşitlikte yerine yazarsak

$$[f(s)]' = -(r-K)\frac{K}{k}$$

$$f'(s) = -(r-K)\frac{K}{k} \tag{3.1.12}$$

olarak buluruz.

Tersine, (3.1.7) eşitliği var olsun. $\boldsymbol{U}$ vektörünü

$$\boldsymbol{U} = \left[\boldsymbol{T} + \frac{K}{k}\boldsymbol{N}_2 + f(s)\boldsymbol{N}_3\right]\cos\theta \tag{3.1.13}$$

olarak tanımlarsak Teorem 3.1.1 den $\boldsymbol{U}' = 0$ olur. Ayrıca $\alpha(s)$ eğrisinin $\boldsymbol{T}$ birim teğet vektörü $\boldsymbol{U}$ birim vektörü ile sabit θ açısı yaptığından Tanım 3.1.1 den $\alpha(s)$ eğrisi bir kuaterniyonik genel helis olur. Böylece, α kuaterniyonik genel helisinin $f \in C^2$ fonksiyonu için (3.1.7) eşitliğini sağladığını göstermiş olduk.

Teorem 3.1.3 E^4 uzayında bir $\alpha = \alpha(s)$ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik genel helis olması için gerek ve yeter şart G ve H sabitler olmak üzere,

$$\frac{K}{k} = G\cos\int_0^s (r-K)(s)ds + H\sin\int_0^s (r-K)(s)ds \tag{3.1.14}$$

olmasıdır.

İspat. Önce (3.1.14) şartının sağlandığını kabul edelim. Bu eşitliğin her iki tarafının s ye göre diferensiyeli alınırsa

$$\left(\frac{K}{k}\right)' = -G(r-K)\sin\int_0^s (r-K)(s)ds + H(r-K)\cos\int_0^s (r-K)(s)ds$$

$$\left(\frac{K}{k}\right)' = (r-K)\left[-G\sin\int_0^s (r-K)(s)ds + H\cos\int_0^s (r-K)(s)ds\right] \qquad (3.1.15)$$

elde ederiz. Bir $f(s)$ fonksiyonunu

$$f(s) = -G\sin\int_0^s (r-K)(s)ds + H\cos\int_0^s (r-K)(s)ds$$

şeklinde tanımlarsak (3.1.15) eşitliği (3.1.7) şartını sağlamış olur. Yani α eğrisi bir kuaterniyonik genel helis olur.

Şimdi de α eğrisinin bir kuaterniyonik genel helis olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 3.1.2 sağlanır. Bir $t = t(s)$, C^2-fonksiyonunu ve $g(s)$ ile $h(s)$ C^1-fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$t(s) = \int_0^s (r-K)(u)du \qquad (3.1.16)$$

$$\begin{cases} g(s) = \dfrac{K}{k}\cos t - f(s)\sin t \\ h(s) = \dfrac{K}{k}\sin t + f(s)\cos t \end{cases} \qquad (3.1.17)$$

(3.1.17) eşitliklerinin s değişkenine göre diferensiyellerini alırsak

$$g(s) = \frac{K}{k}\cos t - f(s)\sin t$$

$$g'(s) = \left(\frac{K}{k}\right)'\cos t - \frac{K}{k}t'\sin t - f'(s)\sin t - f(s)t'\cos t$$

$$g'(s) = \left(\frac{K}{k}\right)'\cos t - \frac{K}{k}(r-K)\sin t - \left(-(r-K)\frac{K}{k}\right)\sin t - \frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k}\right)'(r-K)\cos t$$

$$g'(s) = 0$$

ve benzer olarak

$$h(s) = \frac{K}{k}\sin t + f(s)\cos t$$

$$h'(s) = \left(\frac{K}{k}\right)'\sin t + \frac{K}{k}t'\cos t + f'(s)\cos t - f(s)t'\sin t$$

$$h'(s)=\left(\frac{K}{k}\right)'\sin t+\frac{K}{k}(r-K)\cos t+\left(-(r-K)\frac{K}{k}\right)\cos t-\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k}\right)'(r-K)\sin t$$

$$h'(s)=0$$

olarak buluruz. Böylece $g(s)$ ve $h(s)$ fonksiyonlarının sabit olduğunu bulduğumuzdan G ve H sabitler olmak üzere $g(s)=G$ ve $h(s)=H$ yazabiliriz. Şimdi bu G ve H yi (3.1.17) eşitlikerinde yerine yazarak ortak çözüm yaparsak,

$$\frac{K}{k}\cos t=G+f(s)\sin t$$

$$\frac{K}{k}\sin t=G-f(s)\cos t$$

$$\frac{K}{k}=G\cos t+f(s)\sin t\cos t+H\sin t-f(s)\cos t\sin t$$

$$\frac{K}{k}=G\cos t+H\sin t$$

biçiminde bulmuş oluruz. Burada t yi yerine yazarsak (3.1.14) eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla, bir α eğrisinin (3.1.14) eşitliğini sağlayan bir kuaterniyonik genel helis olduğunu göstermiş olduk.

4. BÖLÜM

4.1. 4- BOYUTLU E^4 ÖKLİD UZAYINDA KUATERNİYONİK ÇATIYA GÖRE N_3 SLANT HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Tanım 4.1.1 Birim hızlı bir $\alpha : I \to E^4$ kuaterniyonik α eğrisinin ikinci binormal birim vektörü $\boldsymbol{N}_3$, sabit doğrultulu bir $\boldsymbol{U}$ vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa α eğrisine kuaterniyonik $\boldsymbol{N}_3$ slant helis denir.

Teorem 4.1.1 Düzenli bir α kuaterniyonik eğrisinin $K > 0,\ k > 0$ ve $r - K \neq 0$ olmak üzere bir kuaterniyonik $\boldsymbol{N}_3$ slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{r-K}{k}\right)^2 + \left[\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right]^2 = \tan^2\theta = sabit \tag{4.1.1}$$

olmasıdır.

İspat. α eğrisi, bir kuaterniyonik $\boldsymbol{N}_3$ slant helis olsun. Bu durumda $h(\boldsymbol{N}_3, \boldsymbol{U}) = \cos\theta = sabit$ dir. Bu eşitliğin her iki tarafının diferensiyellenmesiyle

$$h(\boldsymbol{N}_3, \boldsymbol{U}) = \cos\theta = sabit$$
$$h(\boldsymbol{N}_3', \boldsymbol{U}) + h(\boldsymbol{N}_3, \boldsymbol{U}') = 0$$
$$h(-(r-K)\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{U}) = 0$$
$$-(r-K)h(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{U}) = 0$$

$r - K \neq 0$ olduğundan $h(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{U}) = 0$ elde edilir. Böylece $\boldsymbol{U}$ vektörünü $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_3$ vektörleri ile

$$\boldsymbol{U} = a_1\boldsymbol{T} + a_2\boldsymbol{N}_1 + a_3\boldsymbol{N}_3 \tag{4.1.2}$$

biçiminde yazabiliriz. Burada $a_1 = \cos\psi,\ a_2 = \cos\varphi$ ve $a_3 = \cos\theta$, $\boldsymbol{U}$ vektörünün doğrultman kosinüsleridir. Ayrıca

$$h(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}) = 1$$
$$h(a_1\boldsymbol{T} + a_2\boldsymbol{N}_1 + a_3\boldsymbol{N}_3, a_1\boldsymbol{T} + a_2\boldsymbol{N}_1 + a_3\boldsymbol{N}_3) = 1$$
$$a_1^2 h(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) + a_2^2 h(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1) + a_3^2 h(\boldsymbol{N}_3, \boldsymbol{N}_3) = 1$$

olduğundan $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ olur. (5.1.2) eşitliğinin diferensiyellenmesiyle

$$\boldsymbol{U} = a_1\boldsymbol{T} + a_2\boldsymbol{N}_1 + a_3\boldsymbol{N}_3$$

$$\boldsymbol{U}' = a_1'\boldsymbol{T} + a_1\boldsymbol{T}' + a_2'\boldsymbol{N}_1 + a_2\boldsymbol{N}_1' + a_3'\boldsymbol{N}_3 + a_3\boldsymbol{N}_3'$$
$$0 = a_1'\boldsymbol{T} + a_1K\boldsymbol{N}_1 + a_2'\boldsymbol{N}_2 + a_2(-K\boldsymbol{T} + k\boldsymbol{N}_2) + a_3(-(r-K)\boldsymbol{N}_3)$$
$$(a_1' - Ka_2)\boldsymbol{T} + (a_1K + a_2')\boldsymbol{N}_1 + \left[a_2k - a_3(r-K)\right]\boldsymbol{N}_2 + a_3'\boldsymbol{N}_3 = 0$$

elde ederiz ve buradan

$$a_1 = -\frac{1}{K}a_2', \;\; a_1' = Ka_2 = \frac{K(r-K)}{k}a_3 \tag{4.1.3}$$

yazabiliriz.

$$a_2 = \frac{1}{K}a_1' \text{ ve } a_2' = -a_1K$$

olduğundan ilk eşitlikteki a_2 değerini, ikinci eşitlikteki yerine yazarsak aşağıdaki ikinci dereceden lineer denklemi elde ederiz;

$$a_2' = -a_1K$$
$$\left(\frac{1}{K}a_1'\right)' = -a_1K$$
$$\left(\frac{1}{K}\right)' a_1' + \frac{1}{K}a_1'' = -a_1K$$
$$a_1'' - \frac{K'}{K}a_1' + K^2a_1 = 0 \tag{4.1.4}$$

(4.1.4) denkleminde $t = \int_0^s K(s)ds$ alarak tekrar yazarsak bu lineer denklem

$$a_1'' - \frac{K'}{K}a_1' + K^2a_1 = 0$$
$$\frac{d^2a_1}{ds^2} - \frac{1}{K}\frac{dK}{ds}\frac{da_1}{ds} + K^2a_1 = 0$$
$$\frac{d^2a_1}{dt^2} + a_1 = 0$$
$$a_1''(t) + a_1(t) = 0$$

biçiminde olur. Bu son denklemin çözümü ise, M ve N sabitler olmak üzere,

$$a_1(t) = M\cos t + N\sin t$$
$$a_1 = M\cos\int_0^s K(s)ds + N\sin\int_0^s K(s)ds \tag{4.1.5}$$

şeklindedir. (4.1.5) ve (4.1.3) eşitliklerinden

$$a_2 = \frac{1}{K} a_1' = \frac{r-K}{k} a_3$$

$$a_2 = \frac{1}{K}\left[-MK \sin \int_0^s K(s)ds + NK \cos \int_0^s K(s)ds \right] = \frac{r-K}{k} a_3$$

$$a_2 = -M \sin \int_0^s K(s)ds + N \cos \int_0^s K(s)ds = \frac{r-K}{k} a_3$$

ve

$$a_2' = -Ka_1 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{K} a_2'$$

$$a_1 = -\frac{1}{K}\left[-MK \cos \int_0^s K(s)ds - NK \sin \int_0^s K(s)ds \right] = -\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k} a_3 \right)'$$

$$a_1 = M \cos \int_0^s K(s)ds + N \sin \int_0^s K(s)ds = -a_3 \frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k} \right)'$$

olarak buluruz. Bu son iki eşitlikten M ve N sabitlerini aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$M = -a_3 \left[\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k} \right)' \cos \int_0^s K(s)ds + \frac{r-K}{k} \sin \int_0^s K(s)ds \right]$$

$$N = a_3 \left[-\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k} \right)' \sin \int_0^s K(s)ds + \frac{r-K}{k} \cos \int_0^s K(s)ds \right]$$

Böylece

$$M = a_2 \cos t + a_1 \sin t = c \left[\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k} \right)' \cos t + \frac{K}{k} \sin t \right]$$

$$N = a_2 \sin t - a_1 \cos t = c \left[\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k} \right)' \sin t - \frac{K}{k} \cos t \right]$$

$$M^2 + N^2 = c^2 \left[\begin{array}{l} \left(\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k} \right)' \cos \int_0^s (r-K)ds + \frac{K}{k} \sin \int_0^s (r-K)ds \right)^2 \\ + \left(\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k} \right)' \sin \int_0^s (r-K)ds - \frac{K}{k} \cos \int_0^s (r-K)ds \right)^2 \end{array} \right]$$
$$+ (a_1^2 + a_2^2)(\cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$M^2+N^2=a_1^2+a_2^2=c^2\left[\left(\frac{1}{r-K}\left(\frac{K}{k}\right)'\right)^2+\left(\frac{K}{k}\right)^2\right]$$

$$M^2+N^2=\left[\left(\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right)^2+\left(\frac{r-K}{k}\right)^2\right]\cos^2\theta=\sin^2\theta$$

veya

$$\left(\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right)^2+\left(\frac{r-K}{k}\right)^2=\tan^2\theta=sabit \qquad (4.1.6)$$

olarak bulmuş oluruz.

Tersine, düzenli bir kuaterniyonik eğri için, bu şart sağlanıyorsa her zaman bu eğrinin ikinci binormal vektörü ile sabit açı yapan sabit doğrultulu bir $\boldsymbol{U}$ vektörü bulabiliriz. Bu vektörünü,

$$\boldsymbol{U}=\left[-\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\boldsymbol{T}+\frac{r-K}{k}\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_3\right]\cos\theta$$

şeklinde tanımlarsak sabit olur. Gerçekten,

$$\boldsymbol{U}=\left[-\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\boldsymbol{T}+\frac{r-K}{k}\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_3\right]\cos\theta$$

$$\boldsymbol{U}'=\left[-\left(\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right)'\boldsymbol{T}-\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\boldsymbol{T}'+\left(\frac{r-K}{k}\right)'\boldsymbol{N}_1+\frac{r-K}{k}\boldsymbol{N}_1'+\boldsymbol{N}_3'\right]\cos\theta$$

ve

$$\left(\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right)'=\left(\frac{1}{K}\right)'\left(\frac{r-K}{k}\right)'+\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)''$$

$$\left(\frac{r-K}{k}\right)^2+\left[\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right]^2=sabit$$

$$2\left(\frac{r-K}{k}\right)\left(\frac{r-K}{k}\right)'+2\left[\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right]\left[\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right]'=0$$

$$\left(\frac{r-K}{k}\right)\left(\frac{r-K}{k}\right)' + \left[\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right]\left[\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right]' = 0$$

$$\left(\frac{r-K}{k}\right)'\left[\left(\frac{r-K}{k}\right) + \frac{1}{K}\left[\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right]'\right] = 0 \qquad (4.1.7)$$

dır. $\left(\frac{r-K}{k}\right)' \neq 0$ olduğundan

$$\left(\frac{r-K}{k}\right) + \frac{1}{K}\left[\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right]' = 0$$

$$\frac{K(r-K)}{k} + \left[\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right]' = 0$$

$$\left[\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right]' = -\frac{K(r-K)}{k}$$

elde edilir. Bu son eşitliği $\boldsymbol{U}$ nun diferensiyelinde yerine koyarsak

$$\boldsymbol{U}' = \left[-\left(\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right)'\boldsymbol{T} - \frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\boldsymbol{T}' + \left(\frac{r-K}{k}\right)'\boldsymbol{N}_1 + \frac{r-K}{k}\boldsymbol{N}_1' + \boldsymbol{N}_3'\right]\cos\theta$$

$$\boldsymbol{U}' = \left[\begin{array}{l}\frac{K(r-K)}{k}\boldsymbol{T} - \frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'K\boldsymbol{N}_1 + \left(\frac{r-K}{k}\right)'\boldsymbol{N}_1 \\ + \frac{r-K}{k}(-K\boldsymbol{T} + k\boldsymbol{N}_2) - (r-K)\boldsymbol{N}_2\end{array}\right]\cos\theta$$

$$\boldsymbol{U}' = 0$$

elde ederiz. Yani, $\boldsymbol{U}$ nun sabit olduğunu göstermiş oluruz. Böylece Tanım 4.1.1 den α kuaterniyonik eğrisinin bir kuaterniyonik $\boldsymbol{N}_3$ slant helis olduğunu göstermiş oluruz.

Burada 0 dan farklı eğriliklere sahip regüler bir kuaterniyonik eğrinin $\boldsymbol{N}_3$ slant helis olması için gerek ve yeter şartın (4.1.1) eşitliğinin sağlanması olduğunu elde etmiş olduk.

Teorem 4.1.2 E^4 Öklid uzayında bir kuaterniyonik $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin bir kuaterniyonik $\boldsymbol{N}_3$ slant helis olması için gerek ve yeter şart $f \in C^2$ fonksiyonu için

$$f(s)K = \left(\frac{r-K}{k}\right)', \quad f'(s) = -\frac{K(r-K)}{k} \tag{4.1.8}$$

olmasıdır.

İspat. $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin bir kuaterniyonik $\boldsymbol{N}_3$ slant helis olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 5.1.1' deki şart sağlanır. Bu durumda (4.1.7) eşitliğinden,

$$\frac{r-K}{k}\left(\frac{r-K}{k}\right)' + \frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\left[\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right]' = 0$$

$$\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)' = -\frac{\frac{r-K}{k}\left(\frac{r-K}{k}\right)'}{\left[\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right]'} \tag{4.1.9}$$

yazabiliriz ve

$$f(s) = -\frac{\frac{r-K}{k}\left(\frac{r-K}{k}\right)'}{\left[\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right]'} \tag{4.1.10}$$

olarak alırsak

$$\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)' = f(s) \tag{4.1.11}$$

veya

$$K\ f(s) = \left(\frac{r-K}{k}\right)'$$

elde edilmiş olur. Ayrıca, (4.1.7) eşitliğinden

$$\left[\frac{1}{K}\left(\frac{r-K}{k}\right)'\right]' = -\frac{K(r-K)}{k}$$

yazabiliriz. (4.1.11) eşitliğini bu son eşitlikte yerine yazarsak

$$f'(s) = -\frac{K(r-K)}{k} \tag{4.1.12}$$

olur.

Tersine, (4.1.11) eşitliği var olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin ikinci binormal vektörü $\boldsymbol{N}_3$ ile sabit bir θ açısı yapan $\boldsymbol{U}$ vektörünü

$$\boldsymbol{U} = \left(-f(s)\boldsymbol{T} + \frac{r-K}{k}\boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_3 \right)\cos\theta$$

biçiminde tanımlarsak $\boldsymbol{U}$ vektörünü Teorem 4.1.1 den sabit olduğunu buluruz. Bu da α kuaterniyonik eğrisinin $\boldsymbol{N}_3$ slant helis olması demektir. Böylece, bir kuaterniyonik $\boldsymbol{N}_3$ slant helisin (4.1.8) şartlarını sağlayan $f \in C^2$ fonksiyonu olduğunu göstermiş olduk.

Teorem 4.1.3 E^4 Öklid uzayında $\alpha = \alpha(s)$ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik $\boldsymbol{N}_3$ slant helis olması için gerek ve yeter şart P ve Q sabitler olmak üzere,

$$\frac{r-K}{k} = P\cos\int_0^s K(s)ds + Q\sin\int_0^s K(s)ds \tag{4.1.13}$$

olmasıdır.

İspat. İlk olarak (4.1.13) şartın var olduğunu kabul edelim. Bu eşitliğin her iki tarafının s ye göre diferensiyellenmesiyle

$$\frac{r-K}{k} = P\cos\int_0^s K(s)ds + Q\sin\int_0^s K(s)ds$$

$$\left(\frac{r-K}{k}\right)' = -PK\sin\int_0^s K(s)ds + QK\cos\int_0^s K(s)ds$$

$$\left(\frac{r-K}{k}\right)' = K\left[-P\sin\int_0^s K(s)ds + Q\cos\int_0^s K(s)ds\right]$$

elde ederiz. Eğer bir $f(s)$ fonksiyonu

$$f(s) = -P\sin\int_0^s K(s)ds + Q\cos\int_0^s K(s)ds$$

biçiminde tanımanırsa (4.1.8) şartı sağlanmış olur. Yani $\alpha(s)$ eğrisi bir kuateniyonik $\boldsymbol{N}_3$ slant helis olmuş olur.

Şimdi de $\alpha(s)$ eğrisinin bir kuaterniyonik $\boldsymbol{N}_3$ slant helis olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 4.1.2 sağlanır. Bir $t = t(s) = \int_0^s K(u)du$, $C^2 -$ fonksiyonu ve

$$\begin{cases} p(s) = \dfrac{r-K}{k}\cos\theta - f(s)\sin\theta \\ q(s) = \dfrac{r-K}{k}\sin\theta + f(s)\cos\theta \end{cases} \tag{4.1.14}$$

biçiminde C^1- fonksiyonları tanımlayalım. Teorem 3.1.3 e benzer olarak (4.1.14) eşitliklerinin diferensiyelleri alınırsa sıfıra eşit olduğu görülür. Ayrıca $p(s) = P$ ve $q(s) = Q$ olarak alınarak (4.1.14) de yerine yazılırsa ortak çözümden

$$\frac{(r-K)(s)}{k(s)}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = P\cos\theta + f(s)\sin\theta\cos\theta + Q\sin\theta - f(s)\cos\theta\sin\theta$$

$$\frac{(r-K)(s)}{k(s)} = P\cos\theta + Q\sin\theta$$

elde edilir.

Şimdi de (4.1.13) şartının var olduğunu kabul edelim.

$$f(s) = -P\sin\int_0^s K(s)ds + Q\cos\int_0^s K(s)ds$$

olarak tanımladığımızda Teorem 4.1.2 deki şart sağlanmış olur. Böylece $\alpha(s)$ eğrisi bir kuaterniyonik $\boldsymbol{N}_3$ slant helis olmuş olur. Burada $\alpha = \alpha(s)$ kuaterniyonik eğrisinin kuaterniyonik $\boldsymbol{N}_3$ slant helis olması için gerek ve yeter şartın (4.1.13) koşulunun sağlanması olduğunu göstermiş olduk.

5. BÖLÜM

SONUÇ

Bu çalışmada, Öklid uzayı ve reel kuaterniyonlar kümesinde diferansiyel geometrinin iyi bilinen eğrilerinden helisler ele alınmıştır. Reel uzayda [11], [12],[13], [14] referanslarında yapılan hesaplamaların $n=3$ ve $n=4$ için Öklid uzayındaki kuaterniyonik Frenet çatısına göre de sağlanıp sağlanmadığı incelenmiştir. Bu hesaplamalarda kuaterniyonların özelliklerinden yararlanılmıştır.

Bu çalışmada elde edilen Öklid uzayındaki kuaterniyonik çatıya göre yapılan işlemler, dual uzayda ve Lorentz uzayında, kuaterniyonik çatıya göre araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] BAHARATHI, K., NAGARAJ, M., "Quaternion Valued Function of Real Serret-Frenet Formulae", Indian J. Pure Appl. Math. 16 (1985), 741-756.

[2] HACISALİHOĞLU, H.H., SABUNCUOĞLU, A., "Diferensiyel Geometri", Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 1983.

[3] ÖNDER, M., KAZAZ, M., KOCAYİĞİT, H., KILIÇ, "B_2 -slant helix in Euclidean 4-space E^4", Int. J. Cont. Math. Sci. vol. 3, no.29 (2008), 1433-1440.

[4] HACISALİHOĞLU, H.H.," Diferensiyel Geometri", Ankara Üniversitesi, 1998.

[5] SABUNCUOĞLU, A., "Diferensiyel Geometri", Nobel Yayınları, Ankara, 2004.

[6] ÖZYILMAZ, E., YILMAZ, S., "Involute-Evolute Curve Couples in the Euclidean 4-space", Int. J. Open Problems Compt. Math., 2 (2), June, 2009.

[7] MAĞDEN, A., "On the Curves of Constant Slope", Y.Y.Ü. Fen Bilimleri Dergisi 4, 103-109, 1993.

[8] HACISALİHOĞLU, H.H., "Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi", Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No: 2, 1983.

[9] KARADAĞ, M., SİVRİDAĞ, A.İ., "Kuaterniyonik Eğilim Cizgileri için Karakterizasyonlar", Erc. Ünv. Fen Bil. Derg. 13 1-2 (1997), 37-53.

[10] TUNA, A., "Yarı Öklid Uzayındaki Kuaterniyonik Eğriler için Serret-Frenet Formülleri", Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, 2002.

[11] GÖK, İ., OKUYUCU, O.Z., KAHRAMAN, F., HACISALİHOĞLU, H.H., "On the Quaternionic B_2 -slant Helix in the Euclidean space E^4", Adv. Appl. Clifford Algebras, 21 (2011), 707–719.

[12] GÜNGÖR, M. A., TOSUN, M., "Some Characterizations of Quaternionic Rectifying Curves", Differential Geometry-Dynamical Systems , Vol. 13, 2011, pp. 89-100.

[13] KULA, L., EKMEKÇİ, N., YAYLI, Y., İLARSLAN, K., "Characterizations of Slant Helices in Euclidean 3- space", Turk. Math. Vol. 34(2010), 261-273.

[14]] ALİ, A. T., TURGUT, M., "Some Characterizations of Slant Helices in the Euclidean Space E^n", arXiv:0904.1187v1, Math.DG, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Beyza Betül PEKACAR

Doğum Yeri : Menemen

Doğum Tarihi : 28.03.1988

Medeni Hali : Bekâr

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Saruhanlı Anadolu Lisesi, 2006

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2010.