149976

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

149976

SONLU GRUPLAR VE YÜZEYLERE ETKİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Derya DOĞAN

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Cebir ve Sayılar Teorisi

MANİSA - 2004

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU GRUPLAR VE YÜZEYLERE ETKİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Derya DOĞAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 21.06.2004
Tezin Savunulduğu Tarih : 08.07.2004

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Mustafa KAZAZ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN

Doç. Dr. H. Hüseyin UĞURLU

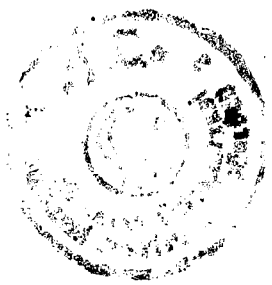
MANİSA - 2004

ÖZET

G sonlu bir grup ve $\sum_g$, g genüslü kompakt, bağlantılı yönlendirilebilir bir yüzey olsun. Bu çalışmada, G, $\sum_g$ nin yönü koruyan self-homeomorfizmlerin bir grubu olarak faithful etkiye sahip olacak şekildeki g değerlerinin $\zeta(G)$ kümesi incelenmiştir. $\zeta(G)$ nin bulunması; G nin G_2 Sylow 2-altgrubunun yapısına bağlı olan bir K pozitif tamsayısının varlığına bağlıdır: $\zeta(G)$ kümesi, sonlu sayıda hariç bütün negatif olmayan $g \equiv 1 \pmod{K}$ tamsayılarını içerir. Ayrıca, G, $\sum_g$ üzerinde serbest etkiye sahip olacak şekildeki g lerin $\mathcal{F}(G)$ kümesi elde edilmiştir. Bu durumda $\sum_g \to \sum_g / G$ örtüsü dallanmamış bir örtüdür. Bu kümeyi, G nin Cayley grafiği yardımıyla elde edebiliriz.

ABSTRACT

Let G be a finite group and let $\sum_g$ be a compact, connected and orientable surface with genus g. In this study, we work on when G, which has faithful action, was given as a finite group of $\sum_g$ orientation-preserving self-homeomorphisms, we determine $\zeta(G)$ set of g values. There exist a positive integer K, depending only on the order $d = |G|$ of G, the exponent $e = \exp G$ of G, and the structure of a Sylow 2- subgroup G_2 of G, satisfying: $\zeta(G)$ consists of all but finitely many non-negative integers $g \equiv 1 \pmod{K}$. Furthermore, the set $\mathcal{F}(G)$ of g such that G acts freely on $\sum_g$, is obtained. In this case, $\sum_g \to \sum_g / G$ is unbranched. We can obtain this set by using Cayley graph of G.



TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın konusunu veren, oluşmasında bana yol gösteren ve destek olan, karşılaştığım zorluklarda ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa KAZAZ' a teşekkürlerimi sunarım.

Hem lisans, hem de yüksek lisans eğitimim süresince benden ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, her konuda destek olan bölümümüzün diğer hocalarına ve araştırma görevlilerine teşekkür ederim.

Her konuda desteğini sonuna kadar hissettiğim, bu çalışmanın oluşturulması ve tamamlanmasında da benden moral desteğini esirgemeyen sevgili arkadaşım Deniz Üsteğmen M. Engin UZUN' a teşekkür ederim.

Hayatımın her anında, yaşadığım bütün zorluklarda desteklerinin eksikliğini hiç hissetmediğim, beni bugünlere getiren, canımdan çok sevdiğim aileme çok teşekkür ederim.

Derya DOĞAN



İÇİNDEKİLER

Sayfa

Özet.....i

Abstract.....ii

Teşekkür.....iii

İçindekiler.....iv

Sembol Listesi.....v

Şekil Listesi.....vi

Giriş.....1

I. BÖLÜM : Temel Kavramlar

1.1 Temel Tanım ve Teoremler.....3
1.2 Grup Etkileri.....7

II. BÖLÜM : Yüzeylerin Sınıflandırılması ve Hurwitz Teoremi

2.1 Bir Yüzeyin Temel Grubu.....15
2.2 Yüzeylerin Sınıflandırılması.....20
2.3 Örtü Uzayları ve Hurwitz Teoremi.....24

III. BÖLÜM : Sonlu Gruplar ve Yüzeylere Etkileri

3.1 Yüzeylerin Simetrileri.....31
3.2 Örnekler.....46

Kaynaklar.....80
Özgeçmiş.....81

SEMBOL LİSTESİ

$\|G\|$	: G Grubunun Mertebesi
$o(x)$	: x in Yörüngesi
G_x	: x in Dengeleyeni
x^G	: x Elemanını İçeren Eşlenik Sınıfı
$\exp(G)$	: G Grubunun Eksponenti
$\Pi(X,x_0)$	: x_0 Noktasındaki Temel Grup
g	: Genüs
K	: Euler Karakteristiği
$\sum_g$	: g Genüslü, Kompakt, Bağlantılı Yönlendirilebilir Yüzey
$\sum_g^-$	: g Genüslü, Kompakt, Bağlantılı Yönlendirilemeyen Yüzey
$Aut(G)$	: G 'nin Otomorfizmalarının Grubu
$[\alpha]$	: Yol Sınıfı
$(\tilde{X},p)$	: Örtü Uzayı
f_*	: İndüklenmiş Homomorfizma
p_*	: Temel Gruptan Temel Gruba İndüklenmiş Homomorfizma
T^σ	: T nin Kısa Elemanlarının Cümlesi
$\zeta(G)$	: $\sum_g$ Üzerinde Faithful Etkiye Sahip Olacak Şekildeki g Değerlerinin Kümesi
$\zeta_h(G)$	: $\sum_g/G \approx \sum_h$ Olacak Şekilde $\sum_g$ Üzerine Etkiyen g Değerlerinin Kümesi
$\mathcal{F}(G)$	: G nin $\sum_g$ Üzerine Serbest Etkidiği g Değerlerinin Kümesi
G_2	: G nin Sylow 2-altgrubu
γ	: Cayley Grafiği

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.2.1	20
Şekil 2.2.2	21
Şekil 2.2.3	22
Şekil 3.1	47
Şekil 3.2	48
Şekil 3.3	48
Şekil 3.4	49
Şekil 3.5	50
Şekil 3.6	51
Şekil 3.7	55
Şekil 3.8	57
Şekil 3.9	58
Şekil 3.10	60
Şekil 3.11	62
Şekil 3.12	64
Şekil 3.13	65
Şekil 3.14	66
Şekil 3.15	68
Şekil 3.16	69
Şekil 3.17	71
Şekil 3.18	74
Şekil 3.19	77

GİRİŞ

G sonlu bir grup ve $\sum_g$, g genüslü kompakt, bağlantılı yönlendirilebilir bir yüzey olsun. α, $\sum_g$ üzerinde G nin bir etkisi olsun. Eğer G nin sadece birim elemanı $\sum_g$ nin her elemanını sabit bırakıyorsa α etkisine faithful; $\sum_g$ nin hiçbir elemanı $G-\{1\}$ in herhangi bir elemanı tarafından sabit bırakılmıyorsa α etkisine serbest (free) denir. Bu çalışmada, $\sum_g$ üzerinde sonlu G grupların ($\sum_g$ nin yönü koruyan self-homeomorfizmlerinin grubu olarak) faithful etkisi incelenmiştir. Bu durumda, kısaca G ye $\sum_g$ üzerinde etkir veya G ye $\sum_g$ nin bir simetri grubu diyeceğiz. Bir G grubu verildiğinde, G nin $\sum_g$ nin bir simetri grubu olabilecek şekilde, g lerin kümesini $\zeta(G)$ ile gösterelim. $\zeta(G)$ kümesi sadece G nin $d=|G|$ mertebesi, G nin $e=\exp G$ eksponenti ve G nin bir G_2 Sylow-2 altgrubuna bağlı olan bir K tamsayısının varlığı ile verilmiştir: $\zeta(G)$ kümesi sonlu sayıda hariç bütün negatif olmayan $g\equiv 1 \pmod K$ sayılarını içerir. Ayrıca G, $\sum_g$ üzerinde serbest etki edecek şekildeki g lerin kümesi $\mathcal{F}(G)$ olmak üzere, $\mathcal{F}(G)$ nin belirlenmesi de önemlidir. Bu durumda, karşılık gelen $\sum_g \to \sum_g / G \cong \sum_h$ örtüsü dallanmamış örtüdür. Her G grubu için bir $g_0 = 1 \pmod d$ sayısı vardır öyleki $\mathcal{F}(G) = g_0 + d\mathbb{N}$ kümesidir (Böylece $\mathcal{F}(G)$, sonlu çoklukta hariç bütün $g = 1 \pmod d$ sayılarını içerir). $\mathcal{F}(G)$ kümesi, G nin Cayley grafiği üzerindeki doğal etkisinde elde edilen etkiye karşılık gelir.

Bu çalışma üç bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde, sonlu grup teori ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Bir G grubunun Sylow-p altgrupları ve özellikle Sylow-2 altgrupları incelenmiştir.

İkinci bölümde, bir yüzeyin temel grubu ve kompakt yüzeylerin sınıflandırılması verilmiştir. Temel gruplar kullanılarak uzaylar ve sürekli dönüşümler ile ilgili topolojiksel problemlerin çoğu zaman gruplar ve homomorfizmalar ile ilgili basit cebirsel problemlere

indirgenebildiği ifade edilmiştir. Ayrıca, bir sonlu G grubunun $\sum_g$ üzerine etki etmesi için gerek ve yeter şart olan Riemann - Hurwitz formülü verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, yüzeylerin simetrileri incelenmiştir. Bu bölümde, G mertebesi $d = |G| = \prod_p p^{n_p}$ ve eksponenti $e = \exp G = \prod_p p^{e_p}$ (p asal) olan bir sonlu grup olacaktır. Böylece G nin bir G_p Sylow p-altgrubunun mertebesi p^{n_p} ve eksponenti p^{e_p} dir. G verilen bir sonlu grup ve $\sum_g$, g genüslü kompakt, bağlantılı ve yönlendirilebilir bir yüzey olsun. G, $\sum_g$ nin yönü koruyan self-homeomorfizmlerinin bir grubu olarak, $\sum_g$ üzerinde faithful etkiye sahip olacak şekildeki g değerlerinin kümesi göz önüne alınmıştır. Bu küme $\zeta(G)$ ile gösterilmiştir. Yani,

$$\zeta(G) = \{\, g \mid G, \sum_g \text{ üzerine faithful etkir} \,\}$$

dır. Ayrıca her bir $h \in \mathbb{N}$ için ,

$$\zeta_h(G) = \{\, g \mid G \text{ grubu, } \sum_g / G \approx \sum_h \text{ olacak şekilde } \sum_g \text{ üzerine etkir.} \,\}$$

cümleleri göz önüne alınmıştır. Bu durumda $\zeta(G) = \cup_{h\geq 0} \zeta_h(G)$ olacağından $\zeta_h(G)$ kümesi belirlenmiştir. $\zeta_h(G)$ kümesi, yine sadece d, e ve G_2 ye bağlı bir J tamsayısının varlığı ile verilmiştir: $\zeta_h(G)$ kümesi sonlu sayıda hariç bütün negatif olmayan $g \equiv d(h-1)+1 \pmod{J}$ tamsayılarından oluşur.

Son olarak da, $\mathcal{F}(H)$ kümesi göz önüne alınmıştır. Verilen her bir örnekte bu kümenin G nin Cayley grafiği tarafından nasıl elde edilebileceği açıklanmıştır.

BÖLÜM 1

GRUP TEORİDE TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Temel Tanım Ve Teoremler

Tanım 1.1. 1. $A \times A$ dan A ya bir fonksiyona A da bir ***ikili işlem*** denir.

$*$, A da bir ikili işlem ve a , $b \in A$ olsun. (a,b) nin $*$ işlemi altındaki görüntüsünü $a*b$ ile gösterelim. Fonksiyon olma özelliklerinden;

$i) \forall\ a,b \in A$ için A da bir $a*b$ elemanı var ve

$ii)$ Bu eleman tek türlü belirlidir.

Bu özelliklerden birincisine işlemin ***kapalılığı***, ikincisine de ***iyi tanımlılığı*** denir.

Tanım 1.1.2. Bir $G \neq \varnothing$ kümesinde tanımlanmış bir $(a,b) \mapsto ab$ ikili işlemi aşağıdaki şartları gerçekliyorsa, G ye bir ***grup*** denir.

1) Her $a,b,c \in G$ için

$$(ab)c = a(bc)$$

dir.

2) Her $a \in G$ için

$$ea = ae = a$$

olacak şekilde bir $e \in G$ elemanı vardır. e elemanına G nin ***birim elemanı*** denir.

3) Her $a \in G$ elemanına karşılık

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e$$

olacak şekilde bir $a^{-1} \in G$ elemanı vardır. a^{-1} elemanına a nın ***tersi*** denir.

Sonlu sayıda elemanı bulunan bir gruba ***sonlu grup***, elemanları sonlu sayıda olmayan gruba da ***sonsuz grup*** denir. Bir G grubunun eleman sayısına onun ***mertebesi*** denir ve $|G|$ ile gösterilir.

G bir grup olsun. Her $a,b \in G$ ikilisi için $ab = ba$ ise G ye ***değişmeli grup*** veya ***abel grubu*** denir.

Tanım 1.1.3. G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ bir alt küme olsun. H, G de tanımlanan ikili işleme göre bir grup ise H a G nin bir ***altgrubu*** denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.4. G bir grup ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. G grubunun A yı içeren bütün altgruplarının ailesinin arakesitini $< A >$ ile gösterelim. Bu taktirde $< A >$, G nin bir altgrubudur. Bu altgrup A yı içeren en küçük altgruptur ve A tarafından üretilen altgrup olarak adlandırılır. Eğer $A = \{ x \}$ şeklinde bir elemanlı bir küme ise bu taktirde $< A >$ yerine $< x >$ yazılır. $< x >$ e G nin bir ***devirli altgrubu*** denir. Eğer G grubunun kendisi x elemanı tarafından üretiliyorsa G ye ***devirli grup*** denir.

$G = < x >$ bir devirli grup olsun. Bu taktirde

$$G = < x > = \{ x^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

dir. $G = < x >$ devirli grubu daima değişmelidir.

Tanım 1.1.5. G bir grup ve N de G nin bir altgrubu olsun. Eğer $\forall\, g \in G$ için $Ng = gN$ ise N ye G nin ***normal altgrubu*** denir ve N in G nin normal altgrubu olduğunu göstermek için $N \lhd G$ yazılır.

Tanım 1.1.6. $G \neq 1$ grubu, eğer G ve 1 den başka normal altgruba sahip değilse ***basittir*** denir.

Teorem 1.1.1. G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $[G:H] = 2$ ise $H \lhd G$ dir. Mertebesi asal olan her grup basittir.

Tanım 1.1.7. G bir grup ve $M \lhd G$ olsun. M yi içeren M ve G den başka hiçbir normal altgrup yoksa M ye G nin ***maksimal normal altgrubu*** denir.

Tanım 1.1.8. G bir grup, $H \leq G$ ve $g \in G$ olsun. Bu taktirde

$$Hg = \{ hg \mid h \in H \}$$

kümesine H ın G deki ***sağ-yan sınıfı*** denir. H ın G deki bütün sağ-yan sınıflarının koleksiyonu G/H ile gösterilir;

$$G/H = \{ Hg \mid g \in G \}.$$

H ın G deki herhangi iki sağ-yan sınıfı aynı sayıda elemana sahiptir. Ayrıca farklı sağ-yan sınıflar ayrık olduğundan

$$|G| = \left| G/H \right| . |H|$$

elde edilir, böylece $|H|, |G|$ yi böler. $\left| G/H \right|$ a H ın G deki ***indeksi*** denir.

Tanım 1.1.9. N, G nin normal altgrubu olsun. $(Ng)(Nh) = N(gh)$ çarpımı ile G/N bir gruptur. Bu gruba N ile G nin ***bölüm grubu*** denir.

Tanım 1.1.10. $M \lhd G$ ***maksimaldir*** $\Leftrightarrow G/M$ basit gruptur.

Tanım 1.1.11. G ve H iki grup ve $\varphi : G \to H$ bir dönüşüm olsun. Her $g_1, g_2 \in G$ için

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\, \varphi(g_2)$$

ise φ ye G den H a bir ***homomorfizm*** denir. $\varphi : G \to H$ bir homomorfi olsun. Bu taktirde $\varphi^{-1}(e) = \{ g \in G \mid \varphi(g) = e \}$ kümesi G in bir altgrubudur. Buna φ homomorfisinin ***çekirdeği*** denir ve *çek* φ ile gösterilir.

Tanım 1.1.12. Örten φ homomorfisine bir ***epimorfizm*** ve $1:1$ bir φ homomorfisine de bir ***monomorfizm*** denir.

Tanım 1.1.13. $\phi : G \to H$ bir grup homomorfisi olsun. Eğer ϕ, $1:1$ ve örten ise ϕ ye bir ***izomorfizma*** denir. Eğer G ve H arasında bir izomorfizma varsa bu gruplara ***izomorfik gruplar*** denir ve bu durum $G \cong H$ ile ifade edilir.

Teorem 1.1.2. $\phi : G \to H$ bir grup homomorfizmi olsun.

i) *Çek* $\phi = N \lhd G$ dir.

ii) $h \in H$ ve $a \in G$ için $\phi(a) = h \Rightarrow \phi^{-1}(h) = N\,a$ dir.

iii) $G/N \cong \phi(G)$ dir.

Tanım 1.1.14. G bir grup ve $x, y \in G$ olsun. x ve y nin ***komütatörü*** ile

$$[x,y] = x^{-1} y^{-1} x y$$

anlaşılır. Komütatörlerin kümesi ile üretilen altgrup komütatörlerin bütün sonlu çarpımlarını içerir. Bu alt gruba ***komütatör grubu*** denir ve G' ile gösterilir.

$x \in G'$ olsun. $x = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ yazalım. Bu taktirde $g^{-1} x g = \prod_{i=1}^{n} [g^{-1} a_i g, g^{-1} b_i g]$ dir ve böylece $g^{-1} x g \in G'$ olur. Bu ise G' nün G nin bir normal altgrubu olduğunu söyler. Şimdi G/G' bölüm grubunu göz önüne alalım. Bu taktirde bu bölüm grubu değişmelidir. Gerçekten $[a,b] \in G'$ olduğundan $[a,b]G' = G'$ dür ve böylece

$$xG'yG' = xyG' = xy[y,x]G' = yxG' = yG'xG'$$

olur.

Teorem 1.1.3. Eğer $N \lhd G$ ise, bu taktirde G/N değişmelidir $\Leftrightarrow G' \leq N$ dir.

1.2. Grup Etkileri

Tanım 1.2.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve G bir grup olsun. X üzerinde G nin bir ***etkisi*** aşağıdaki şartları sağlayan bir $\alpha : G \times X \to X$ dönüşümüdür:

i) $e \in G$ birim eleman olmak üzere, her $x \in X$ için $\alpha(e,x) = x$ dir.

ii) Her $x \in X$ ve her $g,h \in G$ için $\alpha(gh,x) = \alpha(g,\alpha(h,x))$ dir.

Bu durumda, X e bir $G-$***küme*** ve α ya da ***grup etkisi*** denir. Eğer X üzerinde G nin bir etkisi varsa, bu durumda G ye X üzerinde ***etkir (etki ediyor veya hareket ediyor)*** denir.

$\alpha(g,x)$ yerine genellikle gx yazılır. Bu durumda yukarıdaki iki şart $ex = x$ ve $(gh)x = g(hx)$ şeklinde olur.

G, X üzerinde etki etsin. X üzerinde bir $\sim$ bağıntısını şöyle tanımlayalım: "$x \sim y :\Leftrightarrow gx = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ elemanı vardır". Bu takdirde $\sim$ nın bir denklik bağıntısı olduğunu göstermek kolaydır. Buna göre aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 1.2.2. Eğer G, X üzerinde etkir ve $x \in X$ ise, bu taktirde x in ***yörüngesi***, X in

$$o(x) = \{\, gx \mid g \in G \,\} \subset X$$

altkümesidir.

x in ***dengeleyeni*** ise, G nin

$$G_x = \{\, g \in G \mid gx = x \,\} \subset G$$

altgrubudur.

Teorem 1.2.1. G bir grup ve X bir küme olsun. S_X ile X üzerindeki simetrik grubu gösterelim. Herhangi bir

$$\varphi : G \to S_X$$

homomorfisi için bir

$$\alpha : G \times X \to X$$

grup etkisi vardır öyle ki her $x \in X$, $g \in G$ için

$$\alpha\,(g.x) = \varphi\,(g)x$$

dır.

İspat. Etki için iki aksiyomu kontrol edelim.

(1) $x \in X$ olsun. Bu taktirde

$$\alpha\,(1,x) = \varphi\,(1)(x) = 1_X(x) = x$$

dır.

(2) $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$ olsun.

$$\alpha\,(g_1 g_2\,, x) = \varphi\,(g_1 g_2)(x) = (\varphi(g_1)\varphi(g_2))\,(x) = \varphi(g_1)(\varphi(g_2)(x))$$
$$= \varphi(g_1)(\varphi(g_2, x)) = \alpha(g_1, \alpha(g_2, x))$$

dır.

Teorem 1.2.2. $\alpha : G \times X \to X$ bir grup etkisi olsun. Bu taktirde α, bir $\varphi : G \to S_X$ homomorfisini verir, burada $\forall (g,x) \in G \times X$ için, $\varphi(g)(x) = \alpha(g,x)$ dır.

İspat. Önce $\varphi(g)$ ($\forall g \in G$ için) nin $1-1$ ve örten olduğunu göstermeliyiz. $\varphi(g)(x) = \varphi(g)(x')$ olsun. Bu taktirde $\alpha(g,x) = \alpha(g,x')$ dır. Buradan

$$\alpha(g^{-1}, \alpha(g,x)) = \alpha(g^{-1}, \alpha(g,x')) \Rightarrow \alpha(g^{-1}g, x) = \alpha(g^{-1}g, x')$$
$$\Rightarrow \alpha(1,x) = \alpha(1,x') \Rightarrow x = x'$$

elde edilir. Yani $\varphi(g)$ $1-1$ dır.

$\varphi(g)$ örtendir: $x\in X$ ve $\alpha(g,x)=y$ olsun. Bu taktirde

$$\alpha(g^{-1},\alpha(g,x))=\alpha(g^{-1},y)=\alpha(g^{-1}g,x)=\alpha(1,x)=x=\varphi(g)(y)$$

elde edilir. Böylece $\varphi(g)\in S_X$ olduğunu göstermiş oluruz. Dolayısıyla φ iyi tanımlı bir dönüşümdür.

Şimdi φ nin homomorfi olduğunu gösterelim:

$g,g'\in G$ olsun.

$$\varphi(gg')=\varphi(g)\varphi(g')$$

olduğunu göstereceğiz. $x\in X$ olsun.

$$\begin{aligned}\varphi(gg')(x)&=\alpha(gg',x)=\alpha(g,\alpha(g',x))\\&=\varphi(g)(\varphi(g')(x))=(\varphi(g)\circ\varphi(g'))(x)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi(gg')=\varphi(g)\varphi(g')$

O halde φ homomorfidir. □

Yukarıdaki φ homomorfisi $1-1$ olabilir de olmayabilirde. Yani $Ker\,\varphi$, trivial olabilirde olmayabilirde. Eğer $Ker\,\varphi=\{1\}$ ise bu taktirde φ nin faithful olduğu söylenir. (Bu durumda ilgili α grup etkisine faithfuldur denir.)

Aşağıda verilen ifadeler birbirine denk olduğu kolayca gösterilebilir:

(1) $\alpha: G\times X\to X$ etkisi faithfuldur (ya da $\varphi: G\to S_X$ faithful).

(2) $\varphi(g)=1_X \Rightarrow g=1$,

(3) $\{\ \forall x\in X \text{için } \varphi(g)(x)=x\ \}\Rightarrow g=1$,

(4) $\{\ \forall x\in X \text{için } \alpha(g,x)=x\ \}\Rightarrow g=1$,

(5) $g\neq 1\Rightarrow \exists\, x\in X$ öyleki $\alpha(g,x)\neq x$,

(6) $g\neq g'\Rightarrow \exists\, x\in X$ öyleki $\alpha(g,x)\neq \alpha(g',x)$,

(7) $g \neq g' \Rightarrow \varphi(g) \neq \varphi(g')$

dır.

Tanım 1.2.3. G, bir X kümesi üzerinde etki etsin. Eğer her $x \in X$ için $gx = x$ olması $g = e$ olmasını gerektiriyorsa yani, G grubunun birim elemandan farklı hiçbir elemanı herhangi bir x elemanını sabit bırakmıyorsa, G ye ***serbest etkiye sahiptir*** denir. Daha açık ifade edersek, birimden farklı her $g \in G$ için ve X in herhangi bir x elemanı için $gx \neq x$ dir.

Tanım 1.2.4. Eğer her $x, y \in X$ ikilisi için $gx = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa, G grubuna X üzerinde ***geçişmeli olarak (transitively) etkir*** denir. Bu durumda $| o(x) | = X$ dir.

Tanım 1.2.5. G bir grup ve $x, y \in G$ olsun.

$$y = g^{-1} x g$$

olacak şekilde $g \in G$ elemanı varsa y, x e ***eşleniktir*** denir.

G de eşlenik olan bütün elemanların kümesi

$$x^G = \{ g^{-1} x g : g \in G \}$$

ile gösterilir ve buna G de x in ***eşlenik sınıfı*** denir.

G bir grup ve H da G nin bir altgrubu olsun. $g \in G$ olmak üzere

$$gHg^{-1} = \{ ghg^{-1} \mid h \in H \}$$

kümesini tanımlayalım. Bu taktirde gHg^{-1} in G nin bir altgrubu olduğunu göstermek kolaydır.

Tanım 1.2.6. G bir grup ve H, K , G nin iki altgrubu olsun. Eğer bir $g \in G$ için $K = gHg^{-1}$ oluyorsa, H ve K altgruplarına ***eşleniktir*** denir.



Eşlenik olma, bir G grubunun bütün altgruplarının koleksiyonu üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Bir X cümlesi üzerinde bir sonlu G grubunun bir etkisine sahip olduğumuzu kabul edelim. G nin bir g elemanı tarafından sabit bırakılan noktalardan oluşan X in alt cümlesi için X^g yazalım. Yani,

$$X^g = \{ x \in X : gx = x \}$$

dir.

Tanım 1.2.7. G bir grup ve p bir asal sayı olsun. Eğer G nin mertebesi p nin bir kuvveti şeklinde ise G ye bir p - ***grup*** denir.

Bir G grubunun bir H altgrubunun mertebesi bir p asal sayısının kuvveti şeklinde ise H a G nin bir p - ***altgrubu*** denir.

Teorem 1.2.3. G değişmeli ve sonlu bir grup olsun. p asal ve $p \mid |G|$ ise G de mertebesi p olan bir eleman, dolayısı ile G nin p nci mertebeden bir altgrubu vardır. Mertebesi p olan elemanın ürettiği altgrup da p nci mertebeden olur.

Tanım 1.2.8. $|G| = p^n m$, $(p,m) = 1$ olsun. G nin bir H altgrubunun mertebesi tam olarak p^n ise, bu taktirde H a G nin bir ***Sylow*** p - ***altgrubu*** denir.

Teorem 1.2.4. G sonlu bir grup, $n \geq 1$ ve $p \nmid m$ için $|G| = p^n m$ ise,

$i)$ $1 \leq k \leq n$ olmak üzere her k için G nin p^k mertebeli bir altgrubu vardır,

$ii)$ $1 \leq k \leq n$ olmak üzere G nin her p^k mertebeli H altgrubu p^{k+1} mertebeli bir altgrubunun normal altgrubudur.

Teorem 1.2.5. G sonlu bir grup olsun. Bu taktirde,

$i)$ Her p asal sayısı için G bir Sylow p-altgrubuna sahiptir.

$ii)$ Herhangi iki Sylow p-altgrup G de eşleniktir.

iii) G nin her p-altgrubu G nin bir Sylow p-altgrubunda içerilir.

iv) G sonlu bir grup ve $p \mid\mid G \mid$ olsun. G nin Sylow p- altgruplarının sayısı k ise $k \equiv 1 \pmod{p}$ ve $k \mid\mid G \mid$ dir.

Sonuç 1.2.1. G sonlu bir grup olsun. Bir p asal sayısı için G nin bir tek P Sylow p-altgrubu vardır $\Leftrightarrow P \lhd G$ dır.

Şimdi üçüncü bölümde kullanacağımız bazı sonlu grupların Sylow 2-altgruplarını bulalım:

Örnek 1.2.1. Mertebesi 6 olan S_3 simetrik grubunun Sylow 2-altgruplarını bulalım. $\mid S_3 \mid = 6 = 2.3$ olduğundan, S_3 ün bir Sylow 2-altgruplarının mertebesi 2 dir.

S_3 grubunun elemanlarını,

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = (123), \quad \sigma_2 = (132)$$
$$\sigma_3 = (23), \quad \sigma_4 = (13), \quad \sigma_5 = (12)$$

ile gösterelim. $H_1 = \{ \sigma_0, \sigma_3 \}$, $H_2 = \{ \sigma_0, \sigma_4 \}$, $H_3 = \{ \sigma_0, \sigma_5 \}$, $H_4 = \{ \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \}$ ve $H_5 = \{ \sigma_0 \}$ grupları S_3 grubunun altgruplarıdır. Ancak bunlardan $H_1 = \{ \sigma_0, \sigma_3 \}$, $H_2 = \{ \sigma_0, \sigma_4 \}$ ve $H_3 = \{ \sigma_0, \sigma_5 \}$ altgrupları Sylow 2-altgruplarıdır.

Örnek 1.2.2. $G = A_4 = < a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^3 = 1 >$

$= < a = (123), b = (12)(34) >$ mertebesi 12 olan alterne grubun Sylow 2-altgruplarını bulalım.

$\mid A_4 \mid = 12 = 2^2.3$ olduğundan A_4 ün bir Sylow 2-altgrubunun mertebesi 4 dür. $\mid A_4 \mid = 12$ olduğundan Sylow Teoremine göre, A_4 ün Sylow 2- altgruplarının sayısı ya 1 ya da 3 tür. S_4 de mertebesi 4 olan elemanlar sadece 4- devreler olup bunlar A_4 ün elemanı değildir. Yani A_4 de mertebesi 4 olan eleman yoktur. Böylece bir Sylow 2- altgrubu, iki ayrık transpozisyonun çarpımı ve birimden oluşur, yani

$$V = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23), 1\}$$

dir. $(12)(34),(13)(24)$ ve $(14)(23)$ permutasyonlarının biri diğerine eşleniktir. Böylece V, A_4 ün bir normal altgrubudur. Dolayısıyla, A_4 ün bir tane Sylow 2-altgrubu vardır ve bu altgrup Klein 4 –grubudur.

Tanım 1.2.9. G bir grup olsun. Eğer her $x \in G$ için $x^n = 1$ olacak şekilde bir pozitif n tamsayısı varsa, bu şekildeki en küçük n tamsayısına G nin ***eksponenti*** denir. Aksi halde G nin sonsuz eksponentli olduğu söylenir. Sonlu bir G grubunun eksponentinin G nin elemanlarının mertebelerinin en küçük ortak katı olduğu gösterilebilir. Ayrıca, bir G grubunun exponentinin G nin mertebesinin bir böleni olacağı açıktır.

Teorem 1.2.6. G değişmeli bir grup olsun. Bu taktirde G nin devirli olabilmesi için gerek ve yeter koşul $|G| = \exp(G)$ olmasıdır.

Tanım 1.2.10. Asal eksponentli bir değişmeli gruba bir ***elementer abelyen*** grup denir.

Mertebesi p^n ($p \in IP$ asal) olan bir G elementer abelyen grubu, mertebesi p olan n tane devirli grubun bir direkt çarpımı şeklindedir. Özellikle her $g \in G$ için $g^p = e$ dir. Böylece G, mertebesi p^n olan bir elementer abelyen grup ise

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p}_{n-\text{tane}} = (\mathbb{Z}_p)^n$$

dir.

Tanım 1.2.11. Bir G grubunun $R_j(x_i)$ $(j \in J)$ bağıntılarını sağlayan X_i $(i \in I)$ elemanları tarafından üretildiğini farz edelim (burada I ve J indis kümeleri ve $R_j(X_i)$, X_i üreteçlerinin sonlu çoklukta pozitif veya negatif kuvvetlerin bir çarpımıdır) $R_j(X_i) = 1$ bağıntılarına G için ***belirleyici bağıntılar*** denir. Eğer G deki her bağıntı sadece grup aksiyomlarını kullanarak belirleyici bağıntılar tarafından elde edilirse bu durumda G ye ***bir sunuma sahiptir*** denir ve bu durum

$$G = < X_i \ (i \in I) \mid R_j(X_i) = 1 \ (j \in J) >$$

ile gösterilir. Eğer I sonlu ise G ye ***sonlu üretilenlidir*** denir.

Tanım 1.2.12. Bir sonlu G grubunun her S üretici kümesi için S deki üreteçler cinsinden G yi ifade eden bir grafik vardır. Grupların bu şekildeki gösterimine ***Cayley grafiği*** denir.

Bir Cayley grafiği, grafiğin köşeleri (vertices) adı verilen, bir sonlu sayıda nokta ve köşeleri birleştiren yaylardan (her bir yay bir okla bir yöne sahiptir) oluşur.

Bir üretici S kümesi kullanılarak elde edilen bir G grubunun bir Cayley grafiğinde, G nin her bir elemanı için bir nokta ile gösterilen bir köşe vardır.

Ayrıca farklı yay tipleri için farklı renkler veya çoğu zamanda, kesiksiz çizgi, kesikli çizgi veya nokta ile farklı üreticileri gösterir:

Örneğin, $S = \{ a, b, c \}$ ise bu taktirde, ——→—— ile a yı, - - - →- - - ile b yi ve ·····→····· ile de c yi gösterebiliriz.

Bu durumda, bir Cayley grafiğinde x •——→—— • y nin anlamı $xa = y$ dir. G grup olduğundan $xa = y$ den, $x = ya^{-1}$ elde edilir ki bu da ters yönde hareketi gösterir.

Teorem 1.2.7. Eğer $G = <X_i \mid R_j(X_i), (i \in I, j \in J)>$ ve H da herhangi bir grup ise bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:

i) Bir $\theta : G \to H$ epimorfizmi vardır.

ii) $G/N \cong H$ ile bir $N \lhd G$ normal altgrubu vardır

iii) H, $R_j(x_i)$ $(\forall j \in J)$ bağıntılarını sağlayan x_i $(i \in I)$ elemanları tarafından üretilir.

Tanım 1.2.13. G bir grup ve üreteçlerin kümesi de X olsun. Eğer üreteçler arasında belirleyici bir bağıntı mevcut değilse G grubuna ***free (serbest) grup*** denir. X in kardinalitesine G nin ***rankı*** denir. Bir serbest grubun her altgrubu da yine bir serbest gruptur. Ayrıca, $\mathbb{Z}$ in serbest grup olduğu açıktır.

BÖLÜM 2

YÜZEYLERİN SINIFLANDIRMASI VE HURWİTZ TEOREMİ

Bu kısımda bir yüzeyin temel grubunun tanımını ve bazı ilgili teoremler verilerek, kompakt yüzeylerin sınıflandırılması özetle verilmiştir .

Herhangi bir X topolojik uzayı ve herhangi bir $x_0 \in X$ noktası için X in temel grubu diyeceğimiz ve $\Pi(X, x_0)$ ile göstereceğimiz bir grup tanımlayacağız (aslında, x_0 noktasının seçimi genellikle çok az önem taşır ve böylece sık sık notasyonda ihmal edilir). Bu grubu X deki kapalı yolların kullanımını içeren çok basit ve sezgisel bir yöntemle tanımlarız. Tanımdan bu grubun X in bir topolojiksel değişmezi olacağı açık olarak görülecektir. Yani; eğer iki uzay homeomorfik ise onların temel grupları izomorfiktir. Bu bize, iki uzayın homeomorfik olmadığının ispatlanması, onların temel gruplarının izomorfik olmadığının ispatlanmasıyla ispatlanabileceğini verir. Temel grup, sadece topolojik uzaylar hakkında bilgi vermekle kalmaz, aynı zamanda sürekli dönüşümlerin incelenmesinde de kullanılır. Göreceğimiz gibi, bir X uzayından bir Y uzayının içine herhangi bir sürekli dönüşüm, X in temel grubundan Y nin temel grubuna bir homomorfizmaya yükselir. Sürekli dönüşümlerin belirli topolojiksel özellikleri, elde edilen bu homomorfizmanın özellikleriyle açıklanabilir. Böylece, temel grupların bu elde edilen homomorfizmaları ile çalışılarak belirli sürekli dönüşümler ile ilgili problemler çözülebilir.

Yukarıda anlatılanları şu şekilde özetleyebiliriz: temel gruplar kullanılarak; uzaylar ve sürekli dönüşümler ile ilgili topolojiksel problemler çoğu zaman gruplar ve homomorfizmalar ile ilgili basit cebirsel problemlere indirgenebilir.

2.1. Bir Yüzeyin Temel Grubu

Tanım 2.1.1. X , bir topolojik uzay ve $I = [\ 0,1\ ]$ birim kapalı aralık olsun. X de bir α yolu I dan X içine sürekli bir dönüşümdür. α sürekli ve I kompakt ve bağlantılı olduğundan $\alpha(I)$ görüntüsü kompakt ve bağlantılıdır. Eğer $a = \alpha(0)$ ve $b = \alpha(1)$ ise α ya a dan b ye bir ***yoldur*** denir. $a = \alpha(0)$ a α yolunun ***başlangıç noktası*** ve $b = \alpha(1)$ e de α yolunun ***bitiş noktası*** denir.

Tanım 2.1.2. $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$, başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan (yani $\alpha(0) = \beta(0)$ ve $\alpha(1) = \beta(1)$) X de iki yol olsun. Eğer sürekli bir $F : I \times I \longrightarrow X$ dönüşümü her $s, t \in I$ için

$$F(t,0) = \alpha(t) \ , \quad F(t,1) = \beta(t)$$
$$F(0,s) = \alpha(0) = \beta(0) \ , \quad F(1,s) = \alpha(1) = \beta(1)$$

olacak şekilde mevcutsa α ve β ya X de ***denktir*** denir ve $\alpha \simeq \beta$ ile gösterilir. Bu durumda F dönüşümüne X de α dan β ya bir ***denklik dönüşümü*** adı verilir.

Her $s \in I$ için X de x_0 dan x_1 e $\gamma_s(t) = F(t,s)$ ile verilen bir γ_s yolu vardır. s, 0 dan 1 e artarken γ_s, X de α dan β ya uç noktaları x_0 ve x_1 de sabit tutarak α dan β ya sürekli olarak deform olur. Kısaca, X de bir yol diğer bir yola sürekli deform (bozulma) altında uç noktalar sabit kalmak üzere dönüştürülebiliyorsa bu iki yola ***denktir*** denir. Yukarıda tanımlanan $\simeq$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. α yollarının denklik sınıfları $[\alpha]$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. Eğer α ve β, X de iki yol öyle ki α nın bitiş noktası β nın başlangıç noktası ise α ve β nın $\alpha.\beta$ çarpımı,

$$(\alpha.\beta)t = \begin{cases} \alpha(2t) & , \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & , \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Lemma 2.1.1. $\alpha \simeq \alpha'$ ve $\beta \simeq \beta'$ ise bu taktirde $\alpha.\beta \simeq \alpha'.\beta'$

İspat. $\alpha \simeq \alpha'$ olduğunda $F_1 : I \times I \longrightarrow X$ denklik dönüşümü vardır ve $\beta \simeq \beta'$ olduğundan $F_2 : I \times I \longrightarrow X$ denklik dönüşümü vardır. Buna göre;

$$F_1(t,0) = \alpha(t) \ , \quad F_1(t,1) = \alpha'(t) \ ;$$
$$F_1(0,s) = \alpha(0) = \alpha'(0) \ , \quad F_1(1,s) = \alpha(1) = \alpha'(1)$$

ve

$$F_2(t,0)=\beta(t)\ ,\ F_2(t,1)=\beta'(t)\ ;$$
$$F_2(0,s)=\beta(0)=\beta'(0)\ ,\ F_2(1,s)=\beta(1)=\beta'(1)$$

dir. Şimdi

$$G: I\times I \longrightarrow X\ ;\quad G(t,s)=\begin{cases} F_1(2t,s) & ,\ 0\le t\le \frac{1}{2} \\ F_2(2t-1,s) & ,\ \frac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$

ile tanımlanan dönüşüm $\alpha.\beta$ ile $\alpha'.\beta'$ arasındaki istenen denklik dönüşümüdür.

Yolların çarpımı, yolların denklik sınıflarının bir çarpımını verir. Böylece yolların denklik sınıfları çarpımı

$$[\alpha].[\beta]=[\alpha\beta]$$

olarak tanımlanır.

Denklik sınıflarının çarpımı işlemi bir grup için gerekli olan aksiyomlara çok benzer aksiyomları sağlar. Bir grubun özelliklerinden farklı olan sadece, sınıfların herhangi ikilisi için $[\alpha].[\beta]$ çarpımının her zaman tanımlı olmamasıdır. Bu çarpım sadece $\alpha(1)=\beta(0)$ olduğu zaman tanımlıdır.

Lemma 2.1.2. Yolların denklik sınıfları üzerinde tanımlanan çarpma işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar.

1) Birleşme Özelliği : Eğer $[\alpha].([\beta].[\gamma])$ tanımlı ise $([\alpha].[\beta]).[\gamma]$ da tanımlıdır ve birbirine eşittirler.

2) Sağ ve Sol Birimler : $x\in X$ olsun. I nın tamamını x noktasına taşıyan $I\longrightarrow X$ sabit yolunu $\mathcal{E}_x$ ile gösterelim. Eğer α, X de x_0 dan x_1 e bir yol ise bu taktirde

$$[\alpha].[\mathcal{E}_{x_1}]=[\alpha]\quad \text{ve}\quad [\mathcal{E}_{x_0}].[\alpha]=[\alpha]$$

dır.

3) Ters : X de x_0 dan x_1 e α yolu verilsin ve α^{-1} de $\alpha^{-1}(t)=\alpha(1-t)$ ile tanımlanan yol olsun. Bu taktirde

$$[\alpha].[\alpha^{-1}]=[\varepsilon_{x_0}] \quad \text{ve} \quad [\alpha^{-1}].[\alpha]=[\varepsilon_{x_1}]$$

dir. $[\alpha^{-1}]$ sınıfına $[\alpha]$nın ***tersi*** denir.

Tanım 2.1.4. Bir α yolu için eğer $\alpha(0)=\alpha(1)=x_0$ ise α ya bir ***ilmek (loop)*** (veya bir ***kapalı yol***) denir. İlmeğe x_0 da taban olduğu söylenir.

Tanım 2.1.5. $\Pi(X,x_0)$ ile x_0 da taban olan ilmeklerin denklik sınıflarını gösterelim. $\Pi(X,x_0)$ da $[\alpha],[\beta]$ nın çarpımı

$$[\alpha][\beta]=[\alpha\beta]$$

olarak tanımlanır. Bu çarpım altında $\Pi(X,x_0)$ bir gruptur. Bu gruba x_0 taban noktasında X in ***temel grubu*** denir.

Örnek 2.1.1. S^1 , $\mathbb{R}^2$ Öklid uzayında birim çemberi göstersin (yani;

$S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$) ve

$$\alpha : I \longrightarrow S^1 \quad ; \quad \alpha(t)=(Cos2\pi t, Sin2\pi t) \quad 0\le t\le 1$$

ile tanımlanan çemberin çevresinde tam olarak bir kez dolanan kapalı yolu göstersin ve $[\alpha]$ da α nın denklik sınıfı olsun. Bu taktirde $\Pi(S^1,(1,0))$ temel grubu, $[\alpha]$ yol sınıfı ile üretilen bir sonsuz devirli gruptur, yani $\mathbb{Z}$ e izomorftur.

Tanım 2.1.6. X bir uzay olsun. Eğer X in herhangi iki noktası bir yol ile bağlanabiliyorsa X e ***yol bağlantılı (pathwise connected)*** denir. X in ***yol bileşenleri*** X in maksimal yol bağlantılı

alt kümeleridir. Eğer X in her noktası yol bağlantılı komşulukların bir temel ailesine sahipse X e ***lokal yol bağlantılıdır*** denir.

Teorem 2.1.1. Eğer X yol bağlantılı ve $x, y \in X$ herhangi iki nokta ise bu taktirde $\Pi(X,x)$ ve $\Pi(X,y)$ temel grupları izomorfiktir.

Böylece, eğer X yol bağlantılı ise bu taktirde $\Pi(X,x)$ grubu $x \in X$ in seçiminden bağımsızdır, böylece temel grubu kısaca $\Pi(X)$ ile gösteririz.

Şimdi ise sürekli bir dönüşümün temel grup üzerindeki etkisini inceleyelim.

X ve Y iki uzay, $f : X \longrightarrow Y$ sürekli bir dönüşüm ve x_0 da X de seçilen bir taban nokta ve $y_0 = f(x_0)$, Y de bir taban nokta olarak seçilsin. X de x_0 da taban olan herhangi bir α ilmeği için $f\alpha$ bileşke dönüşümü Y de y_0 da taban olan bir ilmektir. Üstelik, eğer α, β X de denk ilmekler ise bu taktirde $f\alpha$ ve $f\beta$ bileşke dönüşümleri Y de denk ilmeklerdir. Dolayısıyla bu şekildeki herhangi bir f dönüşümü için

$$f_*([\alpha]) = [f\alpha]$$

ile bir

$$f_* : \Pi(X,x_0) \longrightarrow \Pi(Y,y_0)$$

dönüşümü tanımlanabilir. Bu durumda f_* aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) $f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha])f_*([\beta])$

2) Eğer $X = Y$ ve f birim dönüşüm ise f_* da birim dönüşümdür.

3) Eğer $g : Y \longrightarrow Z$ de sürekli bir dönüşüm ise bu taktirde $(gf)_* = g_*f_*$ dır.

4) Herhangi bir $x \in X$ için $f_*[\alpha_x] = [\alpha_{f(x)}]$

5) $f_*[\alpha^{-1}] = (f_*[\alpha])^{-1}$

f_*ın bir homomorfizm olduğu açıktır ve f_*a f ile ***indüklenmiş homomorfizm*** (veya f ile elde edilen homomorfizm) adı verilir.

Not edelim ki, bu özellikler göz önüne alındığında bir $f: X \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümü, $f_*: \Pi(X,x) \longrightarrow \Pi(Y, f(x))$ homomorfizmini meydana getirir ve eğer f bir homeomorfizm ise (yani; $f: X \longrightarrow Y$ dönüşümü bire-bir, örten, f ve f^{-1} in her ikisi de süreklidir) bu taktirde f_* bir izomorfizmdir. Bu indüklenmiş homomorfizm, temel grubun incelenmesinde son derece önemli olacaktır.

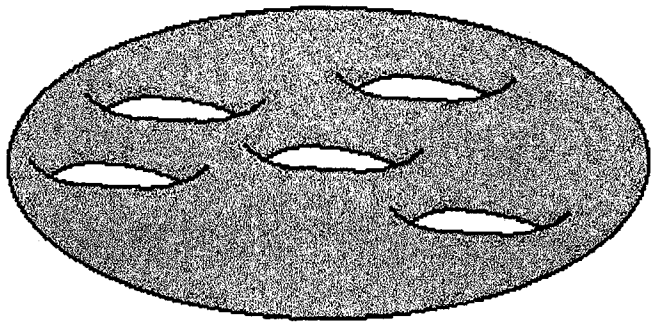
2.2. Yüzeylerin Sınıflandırılması

Şimdi kompakt yüzeylerin sınıflandırılmasına bakalım.

Tanım 2.2.1. Bir möbius şeridinin bir noktasından başlayarak merkez çemberi etrafında bir kez dolanırsa möbius şeridinin ters tarafında aynı noktaya ulaşır. Dolayısıyla bir möbius şeridini içeren yüzeylere ***yönlendirilemeyen yüzey***, möbius şeridini içermeyen torus gibi bir yüzeye de ***yönlendirilebilir yüzey*** denir.

Her kompakt, bağlantılı yönlendirilebilir yüzey, $g \geq 0$ olmak üzere g tane kulp takılmış bir küreye homeomorfiktir. Her kompakt, bağlantılı yönlendirilemeyen yüzey, $g \geq 1$ olmak üzere g tane cross-caps takılmış bir küreye homeomorfiktir. Böylece bir torus bir kulplu bir küredir. g ye yüzeyin ***genüsü*** denir.

Aşağıda genüsü 5 olan bir yüzey verilmiştir.

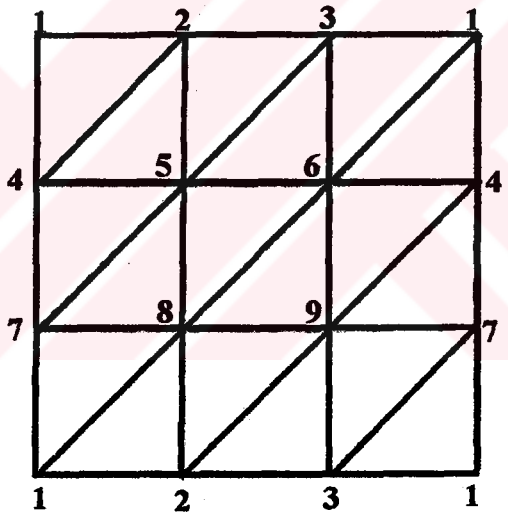


Şekil 2.2.1



Şimdi bir kompakt bağlantılı S yüzeyinin üçgenleştirilmesini ve buna bağlı olarak Euler karakteristiğini verelim:

Tanım 2.2.2. Bir S kompakt yüzeyinin bir üçgenleştirilmesi S i örten $\{T_1, T_2, ..., T_n\}$ kapalı alt kümelerinin bir sonlu ailesini ve $\varphi_i : T_i' \to T_i \quad i = 1, ..., n$ homeomorfizmlerinin bir ailesini içerir. Burada her bir T_i', $\mathbb{R}^2$ düzleminde bir üçgendir (Yani, üç farklı doğru ile sınırlı $\mathbb{R}^2$ nin bir kompakt alt kümesidir). T_i alt kümelerine üçgenler denir. φ_i dönüşümü altında T_i' üçgeninin köşelerini ve kenarlarının görüntüleri olan T_i nin alt kümelerine de sırasıyla köşeler ve kenarlar adı verilir. Son olarak, herhangi iki farklı üçgen T_i ve T_j nin ya ayrık (ortak bir tek köşeye sahip) veya ortak bir kenara sahip olması istenir.



Şekil 2.2.2 Bir Torusun Üçgenleştirilmesi

Herhangi iki kompakt yüzeyin homeomorfik olup olmadığını belirlemek için Euler karakteristiği adı verilen bir nümerik değişmezi tanıtalım:

M , $\{T_1, T_2, ..., T_n\}$ üçgenleştirmesi ile bir kompakt yüzey olsun.

$v = M$ nin köşelerinin toplam sayısı

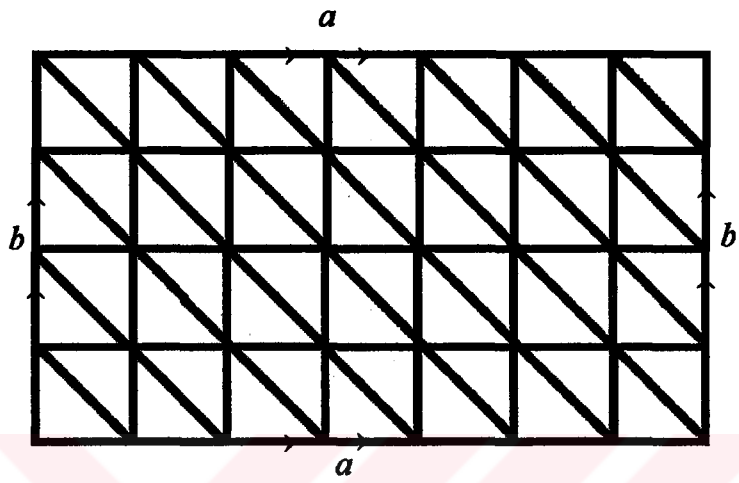
$e = M$ nin kenarlarının toplam sayısı

$t =$ üçgenlerin toplam sayısı (bu durumda, $t = n$)

Bu taktirde,

$$K(M) = v - e + t$$

ye M nin ***Euler karakteristiği*** denir.



Şekil 2.2.3 Bir Torusun Euler Karakteristiği

Bir kompakt yüzeyin genüsü ile Euler karakteristiği arasındaki bağıntı

$$g = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}K, & \text{yönlendirilebilir yüzey} \\ 2 - K, & \text{yönlendirilemeyen yüzey} \end{cases}$$

formülü ile verilir.

Tanım 2.2.3. S_1 ve S_2 ayrık iki yüzey olsun. $S_1 \# S_2$ ile gösterilen onların ***bağlantılı toplamı*** her bir yüzeyde bir küçük çembersel delik kesip, bu deliklerin sınırları boyunca bu iki yüzeyi yapıştırmakla elde edilir.

Teorem 2.2.1. S_1 ve S_2 kompakt yüzeyler olsunlar. S_1 ve S_2 nin Euler karakteristiği, onların

$$K(S_1 \# S_2) = K(S_1) + K(S_2) - 2$$

formülüyle verilen $S_1 \# S_2$ bağlantılı toplamlarıdır.

Aşağıdaki teorem kompakt, bağlantılı yüzeylerin temel gruplarını genelleştirir.

Teorem 2.2.2. S_1 ve S_2 kompakt bağlantılı yüzeyler olsun. Bu taktirde S_1 ve S_2 homeomorfiktir ancak ve ancak onlar aynı Euler karakteristiğine sahiptir ve her ikisi yönlendirilebilirdir veya her ikisi yönlendirilemezdir.

Teorem 2.2.3. Herhangi bir kapalı yüzey ya küreye, ya sonlu sayıda kulp (handle) takılmış küreye, ya da sonlu sayıda disklerin çıkartılarak möbius şeridinin takılması ile oluşan küreye homeomorfiktir.

Teorem 2.2.4. *i*) Eğer $\sum_g$, g genuslu kompakt, bağlantılı yönlendirilebilir bir yüzey ise bu taktirde $\sum_g$ nin Π_g temel grubu,

$$\Pi_g = < A_1, B_1, ..., A_g, B_g \mid [A_1, B_1] ... [A_g, B_g] = 1 >$$

ye izomorfiktir.

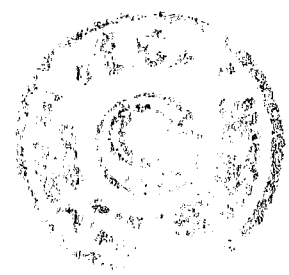
ii) Eğer $\sum_g^-$, g genuslu kompakt, bağlantılı yönlendirilemeyen bir yüzey ise bu taktirde $\sum_g^-$ nin Π_g^- temel grubu,

$$\Pi_g^- = < R_1, R_2, ..., R_g \mid R_1^2 ... R_g^2 = 1 >$$

ye izomorfiktir.

iii) Eğer $\sum_{g,r}$, $\sum_g$ den r noktasının çıkarılmasıyla elde edilen yüzey ise bu taktirde onun $\Pi_{g,r}$ temel grubu,

$$\Pi_{g,r} = < A_1, B_1, ..., A_g, B_g, X_1, ..., X_r \mid \mid [A_1, B_1] ... [A_g, B_g] X_1 ... X_r = 1 >$$



iv) Eğer $\sum_{g,r}^{-}$, $\sum_{g}^{-}$ den r noktasının çıkarılmasıyla elde edilen yüzey ise bu taktirde onun $\Pi_{g,r}^{-}$ temel grubu,

$$\Pi_{g,r}^{-} = < R_1,...,R_g, X_1,...,X_r \mid R_1^2 ... R_g^2 \, X_1 ... X_r = 1 >$$

e izomorfiktir.

Π_g, Π_g^{-} serbest gruplar değillerdir. Eğer $r > 0$ ise $\Pi_{g,r}$ ve $\Pi_{g,r}^{-}$ rankları $2g+r-1$ ve $g+r-1$ olan serbest gruplardır.

Teorem 2.2.5. İki uzay izomorfik ise onların temel grupları izomorfiktir.

2.3. Örtü Uzayları ve Hurwitz Teoremi

Teorem 2.3.1. X uzayından bir Y uzayının içine herhangi bir sürekli dönüşüm, X in temel grubundan Y nin temel grubuna bir homomorfizmaya yükselir.

Tanım 2.3.1. X bir topolojik uzay olsun. X in bir ***örtü uzayı*** aşağıdaki şartları sağlayan bir $\tilde{X}$ uzayı ve bir $p:\tilde{X} \to X$ sürekli dönüşüm çiftinden ibarettir: Her $x \in X$ noktası yol bağlantılı açık bir U komşuluğuna sahiptir öyle ki $p^{-1}(U)$ nun her bir yol bileşeni p ile topolojik olarak U üzerine resmedilir. Özellikle $p^{-1}(U)$ boştan farklı olduğu farz edilir. Yukarıda ifade edilen şartı sağlayan herhangi bir açık U komşuluğuna ***elementer komşuluk*** denir. p dönüşümüne de genelde bir ***izdüşüm*** (veya ***projeksiyon***) denir.

Uyarı. $(\tilde{X}, p)$ bir X uzayının bir örtü uzayı olsun. Eğer $\tilde{\alpha} : I \to \tilde{X}$, $\tilde{X}$ da bir yol ise bu taktirde $p \circ \tilde{\alpha} : I \to X$, X de bir yoldur. Çünkü, iki sürekli dönüşümün bileşkesi süreklidir.

Teorem 2.3.2. $(\tilde{X}, p)$ bir X uzayının bir örtü uzayı ve Y bir yol bağlantılı uzay olsun. $f , g : Y \to \tilde{X}$, $p \circ f = p \circ g$ olacak şekilde herhangi iki sürekli dönüşüm ile verilen

$$M = \{\, y \in Y \mid f(y) = g(y) \}$$

kümesi ya boştur ya da Y dir.

Teorem 2.3.3. $(\tilde{X}, p)$ bir X uzayının bir örtü uzayı ve $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ olmak üzere $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ olsun. Bu taktirde x_0 başlangıç noktasıyla herhangi bir $\alpha : I \to X$ yolu için

$$p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$$

olacak şekilde $\tilde{x}_0$ başlangıç noktasıyla bir tek $\tilde{\alpha} : I \to \tilde{X}$ yolu vardır.

Bu $\tilde{\alpha}$ yoluna α yolunun ***yükseltilmişi*** denir.

Teorem 2.3.4. $(\tilde{X}, p)$, X in bir örtü uzayı ise bu taktirde, her $x \in X$ için $p^{-1}(x)$ kümeleri aynı kardinalite sayısına sahiptir.

Tanım 2.3.2. $x \in X$ için $p^{-1}(x)$ cümlelerinin bu ortak kardinalite sayısı $(\tilde{X}, p)$ ***örtü uzayının yapraklarının (tabakalarının) sayısı*** olarak adlandırılır. $n = \left| p^{-1}(x) \right|$ olmak üzere $(\tilde{X}, p)$ ye X in ***n-yapraklı (n-tabakalı) örtüsü*** denir. Eğer $(\tilde{X}, p)$, bir X yüzeyinin bir n-yapraklı örtüsü ise bu taktirde $\tilde{X}$ ve X in Euler karakteristikleri arasında

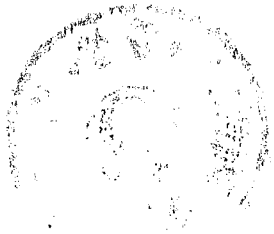
$$K(\tilde{X}) = n\ K(X)$$

formülü vardır.

Tanım 2.3.3. Kapalı bir yüzeyin (yönlendirilebilir veya yönlendirilemeyen) temel grubuna (sırasıyla, yönlendirilebilir veya yönlendirilemeyen) bir ***örtü grubu*** denir.

Tanım 2.3.4. $(\tilde{X}_1, p_1)$ ve $(\tilde{X}_2, p_2)$ bir X uzayının bir örtü uzayı olsun. $(\tilde{X}_1, p_1)$ den $(\tilde{X}_2, p_2)$ nin içine, $\forall\ \tilde{x} \in \tilde{X}_1$ için

$$p_1(\tilde{x}) = p_2 \circ \phi(\tilde{x})$$



eşitliğini sağlayan bir

$$\phi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$$

sürekli dönüşümüne bir ***homomorfizm*** denir.

Tanım 2.3.5. $(\tilde{X}_1, p_1)$ den $(\tilde{X}_2, p_2)$ e bir φ homomorfizmine bir ***izomorfizm*** denir ancak ve ancak $(\tilde{X}_2, p_2)$ den $(\tilde{X}_1, p_1)$ in içerisine bir ψ homomorfizmi $\psi\varphi$ ve $\varphi\psi$ bileşkelerinin her ikisi de idantik dönüşüm olacak şekilde mevcuttur. İki örtü uzayı arasında bir izomorfizm varsa bu iki örtü uzayına ***izomorfiktir*** (veya ***denktir***) denir. Bir otomorfizma, bir örtü uzayından kendi üzerine bir izomorfizmdir.

Aşağıdaki teorem yönlendirilebilir bir yüzeyin örtü yüzeylerinin yine yönlendirilebilir fakat yönlendirilemeyen yüzeylerin örtü yüzeylerinin yönlendirilebilir veya yönlendirilemeyen olabileceğini verir.

Teorem 2.3.5. $G = \Pi(X)$, kapalı bir X yüzeyinin temel grubu ve H da G nin sonlu indeksli bir alt grubu olsun. Bu taktirde H bir örtü grubuna izomorfiktir. Eğer $\sum_g$, g genuslu bir yönlendirilebilir yüzey ise bu taktirde H , genusu

$$[\, G : H \,](g-1)+1$$

olan yönlendirilebilir bir yüzeyin temel grubuna izomorfiktir.

Eğer $\sum_g^-$, g genuslu bir yönlendirilemeyen bir yüzey ise bu taktirde H , genusu

$$[\, G : H \,](g-2)+2$$

olan yönlendirilemeyen bir yüzeyin temel grubuna veya genusu $\frac{1}{2}[\, G : H \,](g-2)+1$ olan yönlendirilebilir bir yüzeyin temel grubuna izomorfiktir.

Son olarak, eğer $G = \Pi_g^-$, g genuslu yönlendirilemeyen bir $\sum_g^-$ yüzeyinin temel grubu ise bu taktirde G, 2 indeksli bir altgrup içerir. Bu altgrup $g-1$ genuslu yönlendirilebilir bir $\sum_{g-1}$ yüzeyinin temel grubu Π_{g-1} e izomorfiktir.

Tanım 2.3.6. ***Temel bölge*** düzlemin öyle bir alt kümesidir ki grup düzlemde gösterdiği tüm özellikleri bu küme üzerinde gösterir. Bir bakıma bu kümeye düzlemin grup için küçük bir kopyasıdır diyebiliriz.

Örtü uzaylarının özellikle önemli bir sınıfı $p_*(\Pi(\tilde{X},\tilde{x}))$ nın $\Pi(X,x)$de bir normal altgrup olması durumuna karşılık gelir. Bu durum, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ noktasının seçiminden bağımsızdır. Böyle bir örtü uzayına ***düzgün (regüler) örtü uzayı*** diyeceğiz.

Tanım 2.3.7. X in bir $(\tilde{X},p)$ örtü uzayına ***düzgündür (regülerdir)*** denir ancak ve ancak $p_*(\Pi(\tilde{X},\tilde{x}))$, $\Pi(X,x)$ in bir normal alt grubudur.

Teorem 2.3.6. Bir G grubunun kendi üzerine bir izomorfizmasına bir ***otomorfizma*** denir. G nin bütün otomorfizmalarının kümesi $Aut(G)$ ile gösterilir ve $Aut(G)$ dönüşümlerin bileşkesi işlemi altında bir gruptur.

Teorem 2.3.7. $(\tilde{X},p)$, X in bir düzgün örtü uzayı ve $Aut(\tilde{X},p)$ de örtü dönüşümlerinin grubu olsun. Bu taktirde herhangi bir $x \in X$ ve herhangi bir $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ için

$$Aut(\tilde{X},p) \cong \Pi(X,x) / p_*\Pi(\tilde{X},\tilde{x})$$

dır.

$(\tilde{X},p)$, X in bir örtü uzayı olsun. p bir açık dönüşüm olduğundan X, p ile elde edilen bölüm topolojisine sahiptir. Böylece, belirli noktaları tanımlanan bir metot ile X in $\tilde{X}$ dan elde edildiğine dikkat edilebilir: Herhangi bir $x \in X$ noktası için $p^{-1}(x)$ kümesinin bütün noktaları tek bir nokta olarak tanımlanır. Hatırlatalım ki, $Aut(\tilde{X},p)$ otomorfizm grubu,

$p^{-1}(x)$ kümesinin noktalarını kendileri arasında yer değiştirir. Genellikle, $\tilde{X} / Aut(\tilde{X}, p)$ bölüm uzayının doğal olarak X e homeomorfik olması doğru değildir. Çünkü farklı $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$ noktaları mevcut olabilir öyle ki $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ olacak şekilde $\varphi \in Aut(\tilde{X}, p)$ otomorfizmi bulunamayabilir. Diğer bir deyişle, $Aut(\tilde{X}, p)$ otomorfizm grubunun $p^{-1}(x)$ üzerinde geçişli bir etki olmasına gerek yoktur.

Lemma 2.3.1. $(\tilde{X}, p)$, X in bir örtü uzayı olsun. $Aut(\tilde{X}, p)$ otomorfizm grubu $x \in X$ için $p^{-1}(x)$ üzerinde geçişli olarak etkir ancak ve ancak $(\tilde{X}, p)$, X in bir düzgün örtü uzayıdır.

Sonuç 2.3.1. $(\tilde{X}, p)$, X in bir evrensel örtü uzayı olsun. Bu taktirde $Aut(\tilde{X}, p)$, $\Pi(X)$ e izomorftur ve $\Pi(X, x)$ grubunun mertebesi $(\tilde{X}, p)$ örtü uzayının yapraklarının sayısına eşittir.

Eğer, $(\tilde{X}, P)$, X in bir düzgün örtü uzayı ise bu taktirde X doğal olarak $\tilde{X} / Aut(\tilde{X}, p)$ bölüm uzayına homeomorfiktir. Bu bizi aşağıdaki doğal soruya götürür:

Y bir topolojik uzay ve G, Y nin homeomorfizmlerinin bir grubu olsun. $p : Y \longrightarrow Y / G$, Y den onun bölüm grubu üzerine olan doğal dönüşümü göstersin. Hangi şartlar altında (Y, p), $Aut(Y, p) = G$ olmak üzere Y / G nin düzgün örtü uzayı olur? İlk olarak, sağlanması gereken bazı gerekli şartların olduğu açıktır. Örneğin; $(\tilde{X}, p)$, X in bir düzgün örtü uzayı ise bu taktirde $Aut(\tilde{X}, p)$, $\tilde{X}$ üzerinde sabit noktasız etki eder. $Aut(\tilde{X}, p)$ grubunun etkisi altında herhangi bir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ noktasının yörüngesi de, (yani; $\{ \varphi(\tilde{x}) : \varphi \in Aut(\tilde{X}, p) \}$ noktalarının kümesi) $\tilde{X}$ nın bir ayrık kapalı alt cümlesidir. Aslında, aşağıdaki daha kuvvetli şart sağlanır: Her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ noktası bir U komşuluğuna sahiptir öyle ki $\varphi \in Aut(\tilde{X}, p)$ olmak üzere $\varphi(U)$ kümeleri ikili tarzda ayrıktırlar (U yu, X deki uygun bir elementer komşuluğun ters görüntüsünün bir bileşeni olarak seçebiliriz). Bu şartı sağlayan homeomorfizmlerinin bir grubuna ***has (properly) süreksizdir*** denir. Not edelim ki, homeomorfizmlerin has süreksiz grubu sabit-nokta serbesttir. Bu gerekli şartlar, yeter şartı da meydana getirir.

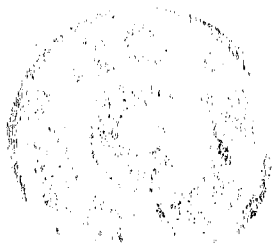
Önerme 2.3.1. Y bağlantılı, lokal yol bağlantılı bir topolojik uzay ve G, Y nin homeomorfizmlerin has süreksiz bir grubu olsun. $p: Y \longrightarrow Y/G$, Y den Y nin bölüm uzayına doğal izdüşümü göstersin. Bu taktirde, (Y,p) , Y/G nin bir düzgün örtü uzayıdır ve $G = Aut(Y,p)$ dir.

Örnek 2.3.1. $Y = \mathbb{R}$ reel doğru ve herhangi bir n tamsayısı için $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü $\varphi_n(x) = x+n$ şeklinde tanımlayalım. $G = \{ \varphi_n : n \in \mathbb{Z} \}$ olsun. Bu taktirde, G, $\mathbb{R}$ nin homeomorfizmlerinin bir has süreksiz grubudur. Gerçekten, herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ için U yu $\left(x-\frac{1}{3}, x+\frac{1}{3} \right)$ açık aralığı olarak alırsak bu taktirde $\varphi_n(U)$ komşulukları ikişer tarzda ayrıktırlar. Böylece, önerme 2.3.1 ile $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}/G$ bölüm uzayının bir düzgün örtü uzayıdır. Bölüm uzaylarındaki belirli teoremlere göre, $\mathbb{R}/G$ ($[0,1]$ aralığının iki uç noktasını aynı nokta olarak tanımlamakla elde edilen) $[0,1]$ kapalı birim aralığının bölüm uzayına homeomorfiktir. Böylece $\mathbb{R}/G$ bir çemberdir. Bir çemberin evrensel örtü uzayının reel doğru ve otomorfizmlerin grubunun sonsuz devirli olduğunu bir kez daha ispatladık.

Örnek 2.3.2. $Y = S^n$, $(n+1)$ boyutlu Öklid uzayında birim $n-$küresi ve $T: S^n \longrightarrow S^n$ $x \in S^n$ için $T(x) = -x$ şeklinde tanımlı karşıt dönüşümü olsun. Açık olarak, T^2 birim dönüşümdür. Böylece, T 2 nci mertebeden devirli olan S^n nin homeomorfizmlerinin bir G grubunu üretir. G nin homeomorfizmlerin bir has süreksiz grubu olduğu açıktır. Buradan, S^n bir $n-$boyutlu reel projektif uzay olan S^n/G nin örtü uzayıdır. S^n basit bağlantılı olduğundan, o bir evrensel örtü uzayıdır ve bir $n-$boyutlu reel projektif uzayın temel grubu, mertebesi 2 olan bir gruptur.

Teorem 2.3.8 (Hurwitz Teoremi). Sonlu bir G grubunun $\sum_g / G \approx \sum_h$ ile $\sum_g$ üzerine etki etmesi için gerek ve yeter şartın $d = |G|$ ve $n_i = |C_i|$ olmak üzere, G nin

$$\prod_{i=1}^{h} [\, a_i, b_i \,] \prod_{i=1}^{k} c_i = 1 \qquad (2.3.1)$$



ve

$$2-2g=d\left(2-2h-\sum_{i=1}^{h}\left(1-\frac{1}{n_i}\right)\right), \qquad (2.3.2)$$

olacak şekilde

$$a_1, b_1, \ldots, a_h, b_h, c_1, \ldots, c_k$$

üreteçlerine sahiptir. Burada $[\,a,b\,]$ de $a^{-1}b^{-1}ab$ komütatörünü gösterir ve $c_1, \ldots, c_k$ lar $\sum_g$ üzerinde G nin düzgün olmayan k farklı yörüngelerindeki noktaların dengeleyicilerini üretirler.

BÖLÜM 3

SONLU GRUPLAR VE YÜZEYLERE ETKİLERİ

3.1. Yüzeylerin Simetrileri

Bu bölümde, G mertebesi $d = |G| = \prod_p p^{n_p}$ ve eksponenti $e = \exp G = \prod_p p^{e_p}$ (p asal) olan bir sonlu grup olacaktır. Böylece G nin bir G_p Sylow p-altgrubunun mertebesi p^{n_p} ve eksponenti p^{e_p} dir. Doğal sayılar kümesini $\mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$ olarak alacağız.

$\sum_g$, g genüslü kompakt, bağlantılı ve yönlendirilebilir bir yüzey olsun. $\sum_g$ üzerinde sonlu G gruplarının faithful ve yönü koruyan etkileri göz önüne alınacaktır. Diğer bir ifadeyle, G, $\sum_g$ nin yönü koruyan self-homeomorfizmlerinin grubu olarak, $\sum_g$ üzerinde faithful etkiye sahip olacak şekilde g değerlerinin kümesi göz önüne alınmıştır. Bu kümeyi $\zeta(G)$ ile gösterelim. Yani,

$$\zeta(G) = \{ g \in \mathbb{N} \mid G, \sum_g \text{ üzerine faithful etkir} \}$$

dir. Bu durumda G ye $\sum_g$ üzerinde etkir veya G ye $\sum_g$ nin bir simetri grubudur diyeceğiz.

Ayrıca bu bölümde sıkça kullanacağımız bazı notasyonları tanımlayalım:

Tanım 3.1.

$n' := \frac{d}{n}$; d yi bölen herbir n için,

$\Gamma := \{ n > 1 \mid G$ mertebesi n olan bir elemana sahiptir $\}$,

$\Delta := \{ n \in \Gamma \mid n$ bir asal kuvvettir. $\}$,

$M_1 := \text{ebob} \{ (n-1)n' \mid n \in \Gamma \}$,

$M_2 := \text{ebob} \{ (n-1)n' \mid n \in \Delta \}$,

$$\Pi := \{\, p \mid p,\ d \text{ yi bölen bir asal sayı} \,\},$$

$$\Pi - 1 := \{\, p-1 \mid p \in \Pi \,\}$$

$$M := \frac{d}{e} \text{ ebob } (\,\Pi - 1\,)$$

olarak tanımlanır (d/e nin ebob$(\,\Pi - 1\,)$ ile aralarında asal olan bir tamsayı olduğunu not edelim).

Tanım 3.2. T bir sonlu 2-grup ve $g \in T$ olsun. Eğer g nin mertebesi, $|\,g\,| = \exp T$ ise g ye ***uzun eleman*** ve $|\,g\,| < \exp T$ ise g ye ***kısa eleman*** denir.

Tanım 3.3. T nin kısa elemanlarının cümlesini T^{σ} ile gösterelim. Eğer T^{σ}, T de 2-indeksli bir altgrup ise T ye ***dengelidir (balanced)*** denir.

Tanım 3.4. G bir sonlu grup olsun. Eğer G nin G_2 Sylow 2-altgrupları dengeli ise G ye ***dengelidir*** denir.

Lemma 3.1. Trivial olmayan bir T 2-grubu dengelidir ancak ve ancak

$$\prod_{k=1}^{m} g_k = 1 \quad (\,g_k \in T\,) \tag{3.1}$$

formundaki her bağıntı g_k uzun elemanlarının bir çift sayısını içerir.

İspat.

$\Rightarrow: T \to T/T^{\sigma} \cong \mathbb{Z}_2$ epimorfizmi (3.1) e uygulanır.

$$(T, .) \to T/T^{\sigma} \cong (\mathbb{Z}_2, +)$$

$$\alpha: T \to T/T^{\sigma} \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\alpha(g) \to gT^{\sigma} = \begin{cases} T^{\sigma} & , \ g \text{ kısa ise} \\ gT^{\sigma} & , \ g \text{ uzun ise} \end{cases}$$

$$\alpha(\prod_{k=1}^{m} g_k) = \alpha(1) = 0$$

g_k ların l tanesi uzun, k tanesi kısa eleman olsun. Burada

$$\underbrace{\alpha(g_1)+...+\alpha(g_l)}_{\text{uzun}} + \underbrace{\alpha(g_{l+1})+...+\alpha(g_m)}_{\text{kısa}}$$

$$1.l + 0.k = 0$$

$1.l = 0 \Leftrightarrow l$ çift ise sağlanır. Yani uzun elemanların sayısı çifttir.

$\Leftarrow: \phi : T \to \mathbb{Z}_2$

$$\phi(g) = \begin{cases} 0, & g \text{ kısa ise} \\ 1, & g \text{ uzun ise} \end{cases}$$

olan bir dönüşüm tanımlanır ve ϕ nin $\ker \phi = T^{\sigma}$ çekirdeği ile bir epimofizm olduğu ispat edilir. □

Uyarı 3.3. T^{σ} için bir form vermeden 2 indeksli bir altgrubunu üretmek mümkündür. Örneğin mertebesi 32 ve eksponenti 4 olan $T = C_4 \times D_4$ grubunu göz önüne alalım. Bu taktirde T^{σ}, $C_2 \times D_4$ grubunu üretir ancak bu uzun elemanlar içerir.

$$D_4 = < a, b \mid a^4 = 1, b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1} >$$

$$= \{ 1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b \}$$

$$C_4 = \{ e, c, c^2, c^3 \}, \quad C_2 = \{ e, c^2 \}$$

$$C_4 \times D_4 = \{ (e,1),(e,a),(e,a^2),(e,a^3),(e,b),(e,ab),(e,a^2b),(e,a^3b)$$
$$(c,1),(c,a),(c,a^2),(c,a^3),(c,b),(c,ab),(c,a^2b),(c,a^3b),$$
$$(c^2,1),(c^2,a),(c^2,a^2),(c^2,a^3),(c^2,b),(c^2,ab),(c^2,a^2b),$$
$$(c^2,a^3b),(c^3,1),(c^3,a),(c^3,a^2),(c^3,a^3),(c^3,b),(c^3,ab),$$
$$(c^3,a^2b),(c^3,a^3b) \}$$

$$C_2 \times D_4 = \{ (e,1),(e,a),(e,a^2),(e,a^3),(e,b),(e,ab),(e,a^2b),$$
$$(e,a^3b),(c^2,1),(c^2,a),(c^2,a^2),(c^2,a^3),(c^2,b),$$
$$(c^2,ab),(c^2,a^2b),(c^2,a^3b) \}$$

$< T^\sigma > = C_2 \times D_4$ dır. Gerçekten, (c^2,a), (c^2,a^3), (e,a), (e,a^3) elemanlarının da bu grupta olduğunu görelim.

$$(c^2,a^2b)(c^2,a^3b) = (c^4,a^2ba^3b) = (e,a^3)$$

$$(c^2,a^2b)(c^2,ab) = (c^4,a^2bab) = (e,a)$$

$$(e,a^2b)(c^2,a^3b) = (c^2,a^2ba^3b) = (c^2,a^3)$$

$$(e,a^2b)(c^2,ab) = (c^2,a^2bab) = (c^2,a)$$

elde edilir. Bu (c^2,a), (c^2,a^3), (e,a) ve (e,a^3) elemanları uzun elemanlardır. Zira mertebeleri 4 dür.

$$T^\sigma = \{ (e,1),(e,a^2),(e,b),(e,a^2b),(c^2,1),(c^2,a^2),$$
$$(c^2,b),(c^2,a^2b),(e,a^3b),(e,ab),(c^2,ab),(c^2,a^3b) \}$$

dır.

Sonlu 2-gruplar arasında, trivial olmayan devirli gruplar dengelidir, fakat dihedral gruplar ve rank > 1 olan elementer değişmeli gruplar dengeli değildirler. Devirli olmayan

dengeli 2-gruplar mevcuttur: örneğin, eğer T_1 ve T_2 2-gruplar, T_1 dengeli ve $\exp T_1 > \exp T_2$ ise, bu taktirde $T_1 \times T_2$ dengelidir. Bir örnek verecek olursak, $T_1 = C_4$ ve $T_2 = C_2 \times C_2$ olsun. Bu durumda $\exp T_1 = 4$ ve $\exp T_2 = 2$ dir. $T = C_4 \times C_2 \times C_2$ çarpım grubu dengelidir:

$|T| = 16 = 2^4$ olduğundan T bir 2-gruptur. Bu durumda,

$$T^{\sigma} \cong C_2 \times C_2 \times C_2$$

olup $[T : T^{\sigma}] = 2$ dir. Böylece T dengelidir.

Tanım 3.5. G bir grup olsun. Bu taktirde,

$$J = J(G) := \begin{cases} M \text{ , eğer } G \text{ dengeli ise} \\ \frac{1}{2}M, \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$K = K(G) := \begin{cases} \frac{d}{e} \text{ , eğer } G_2 \text{ dengeli ve aşikar ise,} \\ \frac{d}{2e} \text{ , diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.6. m in n i böldüğünü göstermek için $m \mid n$ ve p bir asal sayı olmak üzere n i bölen p nin en yüksek p^f kuvvetini göstermek için $p^f \parallel n$ yazacağız.

Tanım 3.7. A ve B kümeler olsun. $A \subseteq B$ ve $B - A$ farkı sonlu ise bu durumu belirtmek için $A \subsetneq B$ yazacağız.



Kulkarni [9], sadece $g \geq 2$ için $\zeta(G)$ nin belirlenmesinde, G nin mertebesi $d = |G|$, G nin eksponenti $e = \exp G$ ve G nin bir Sylow 2-altgrubu G_2 nin yapısına bağlı olarak Teorem 2.3.8. i sağlayan pozitif bir K tamsayısının varlığını gösterdi.

Fakat, Jones [6], aslında bu kümeden $g = 0$ ve $g = 1$ değerlerini çıkarmaya gerek olmadığını ispatlamıştır.

Jones [6], her bir $h \in \mathbb{N}$ için,

$$\zeta_h(G) = \{ g \mid G, \sum_g / G \cong \sum_h \text{ olacak şekilde } \sum_g \text{ üzerine etkir.} \}$$

cümlelerini göz önüne almıştır. Yine sadece d, e ve G_2 ye bağlı ve Teorem 3.1. yi sağlayan bir J tamsayısının varlığı gösterilmiştir. Böylece, $\zeta(G) = \bigcup_{h \geq 0} \zeta_h(G)$ olduğu Teorem 3.1 ve Teorem 3.3 den elde edilir.

Her ne kadar J ve K sadece d, e ve G_2 ye bağlı olsa da $\zeta(G)$ ve $\zeta_h(G)$ cümleleri G nin ek özelliklerine bağlı olabilir. Örneğin, $G = C_{2p}$ ve D_p ($p > 2$ asal sayılar için) devirli ve dihedral gruplarının her ikisi için $d = e = 2p$ ve $G_2 \cong C_2$ olsa da, örneklerde $\zeta(G)$ ve $\zeta_h(G)$ cümlelerinin bu iki grup için genel olarak farklı olduklarını göreceğiz.

Ayrıca, G grubu $\sum_g$ üzerinde serbest etkiye sahip olacak şekildeki $g \in \mathbb{N}$ genüslerinin $\mathcal{F}(G)$ kümesini göz önüne almakta ilginçtir. Yani,

$$\mathcal{F}(G) = \{ g \in \mathbb{N} \mid G, \sum_g \text{ üzerinde serbest etkir} \}.$$

Bu durumda, $\sum_g \to \sum_g / G$ örtüsü dallanmamıştır. Bu durumda da her G grubu için Teorem 3.4 ü sağlayan bir $g_0 \equiv 1 \pmod{d}$ nin varlığını ispatlamak kolaydır.



Tanım 3.8. G nin, $g \geq 0$ genüslü bir $\sum_g$ kompakt, bağlantılı, yönlendirilebilir yüzeyi üzerine bir etkisi, yönü koruyan $\sum_g \to \sum_g$ self-homeomorfizmlerinin bir grubu olarak G nin bir faithful gösterimidir.

$$\zeta(G) = \left\{ g \in \mathbb{N} \,\middle|\, G, \sum_g \text{ üzerine etkir} \right\}$$

olsun. Eğer G, $\sum_g$ üzerine etkiyorsa, bu taktirde bir $h \in \mathbb{N}$ için $\sum_g / G \approx \sum_h$ dır, böylece

$$\zeta_h(G) = \left\{ g \in \mathbb{N} \,\middle|\, \sum_g / G \cong \sum_h \text{ ile } G \text{ grubu } \sum_g \text{ üzerine etkir} \right\}$$

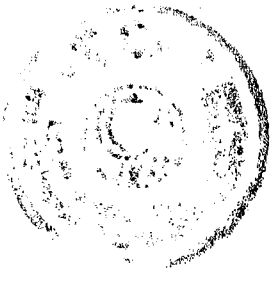
olmak üzere $\zeta(G) = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \zeta_h(G)$ dir.

Uyarı 3.4. M tektir ancak ve ancak G_2 trivialden farklıdır ve devirlidir. Bu durumda G dengelidir; böylece J daima bir tamsayıdır ve aynı şekilde K da daima bir tamsayıdır.

Lemma 3.2. $M_1 = M_2 = M$.

İspat. M_1, M_2 ve M in hepsinin her bir p asal sayısı için aynı p^f kuvvetlerine bölündüğünü göstermek yeterlidir.

(i) $p \in \Pi$ olsun. Eğer herhangi bir $n \in \Gamma$ alırsak, bu taktirde $\exists\, g \in G$ öyle ki $|g| = n$ dir. Böylece $n \mid e$ ve $p^{n_p} \mid d$ dir. Buradan $p^{n_p - e_p} \mid d/n = n'$ ve dolayısıyla $p^{n_p - e_p} \mid n'(n-1)$ dir. Eğer $n = p^{e_p} (\in \Gamma)$ alırsak, bu taktirde $p^{n_p - e_p} \parallel n'(n-1)$ dir; böylece $p^{n_p - e_p} \parallel M_1$ dir. Benzer bir yolla $p^{n_p - e_p} \parallel M_2$ yi verir. $p \in \Pi$ olduğundan, p ile ebob $(\Pi - 1)$ aralarında asaldır, böylece $p^{n_p - e_p} \parallel M$ dir.



(ii) $p \notin \Pi$ olsun. Bu taktirde d, e ve $n' (n \in \Gamma)$ nın hepsi p ile aralarında asaldır, böylece

$$p^f \mid M_1 \Leftrightarrow p^f \mid \text{ebob}\,(\Gamma - 1),$$
$$p^f \mid M_2 \Leftrightarrow p^f \mid \text{ebob}\,(\Delta - 1),$$
$$p^f \mid M \Leftrightarrow p^f \mid \text{ebob}\,(\Pi - 1)$$

dir. Δ nın elemanları sadece $q \in \Pi$ asal sayılarının $q, q^2, ..., q^{e_q}$ kuvvetleridir ve ebob $\{q-1, q^2-1, ...\} = q-1$ dır, böylece ebob $(\Delta - 1) =$ ebob $(\Pi - 1)$ dir. Şimdi Γ, Δ yı içerir ve Γ nın her elemanı Δ nın elemanlarının bir çarpımıdır, böylece herbir $n \in \Gamma$ sayısı $\equiv 1 \pmod{p^f}$ dir ancak ve ancak herbir $n \in \Delta$ sayısı $\equiv 1 \pmod{p^f}$ dir. Böylece p nin aynı p^f kuvvetleri $\Gamma - 1$, $\Delta - 1$, ve $\Pi - 1$ in en büyük ortak bölenini böler. □

Hurwitz Teoreminde, $c_1, ..., c_k$ noktalarını uygun şekilde seçerek (yani üreteçlerle uygun eşleniklerin yerini değiştirerek) (2.3.1) deki c_i çarpanlarını istenilen herhangi bir sırada düzenleyebiliriz. Eğer x_n, mertebesi n olan c_i üreteçlerinin sayısını gösterirse, bu taktirde Hurwitz Teoremini aşağıdaki gibi tekrar düzenleyebiliriz:

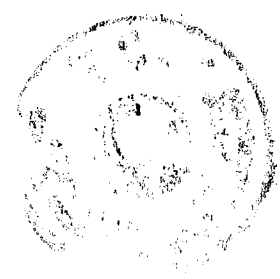
$g \in \zeta_h(G)$ dir ancak ve ancak G, aşağıdaki şartları sağlayan a_i, b_i $(1 \le i \le h)$ ve $c_{i,n}$ $(1 \le i \le x_n, n \in \Gamma)$ elemanlarına sahiptir;

(i) a_i, b_i ve $c_{i,n}$ elemanları G yi üretir,

(ii) $c_{i,n}$ elemanların bir sıralaması için, $\prod_{i=1}^{h} [a_i, b_i] \prod_{i,n} c_{i,n} = 1$ dir,

(iii) Herbir $c_{i,n}$ nin mertebesi, n $(1 \le i \le x_n)$ dir,

(iv) $2(g-1) - 2d(h-1) = \sum_{n \in \Gamma} (n-1) n' x_n$ dir.



Elemanların böyle bir kümesine $(h; x)$ simgeli G için bir Hurwitz cümlesi denir, burada x, $n \mapsto x_n$ fonksiyonudur.

(2.3.1) denklemi yada denk olarak (iv) eşitliği Riemann-Hurwitz formülü olarak bilinir. Onun çözümlerini çalışmak için, Φ pozitif tamsayıların sonlu bir cümlesi olmak üzere,

$$\mathbb{N}\,\Phi = \left\{ \sum_{m \in \phi} x_m\, m \,\middle|\, x_m \in \mathbb{N} \right\}$$

formundaki $\mathbb{N}$ in toplamlı alt yarı gruplarını göz önüne almamız gerekecektir.

$$\mathbb{N}\,\Phi \subsetneq \mathbb{N}\ ebob(\Phi) \tag{3.2}$$

olduğu iyi bilinir. (3.2) ün basit bir genişlemesi, eğer her bir $m \in \Phi$ için $k_m \in \mathbb{N}$ ise, bu taktirde

$$\left\{ \sum_{m \in \phi} x_m\, m \,\middle|\, x_m \in \mathbb{N},\, x_m \geq k_m \right\} \subseteq \mathbb{N}\ ebob(\Phi) \tag{3.3}$$

olduğunu iddia eder.

Teorem 3.1. $\zeta_h(G)$ kümesi, $g \equiv d(h-1)+1 \pmod{J}$ kongrüansını sağlayan sonlu sayıda hariç bütün negatif olmayan tamsayılardan oluşur.

İspat. Eğer

$$\mathcal{F}_h(G) = \mathbb{N}\,J + d(h-1)+1$$

olarak tanımlarsak, bu taktirde aşağıdaki biraz daha güçlü sonucu ispatlamak yeterlidir:

Teorem 3.2. $\zeta_h(G) \subsetneq \mathcal{F}_h(G)$ dir.



İspat. (1) ilk olarak $\zeta_h(G) \subseteq \mathcal{F}_h(G)$ olduğunu gösterelim. Eğer $g \in \zeta_h(G)$ ise bu taktirde G, Riemann-Hurwitz formülü

$$2(g-1) - 2d(h-1) = \sum_{n \in \Gamma} (n-1) n' x_n \tag{3.4}$$

nü sağlayan bir Hurwitz kümesine sahiptir, burada $x_n (\in \mathbb{N})$ n nci mertebeden dengeleyicilerle G nin yörüngelerinin sayısıdır.

Lemma 3.1 den (3.4) deki $(n-1)n'$ $(n \in \Gamma)$ katsayılarının en büyük ortak böleni M dir, böylece $\sum (n-1) n' x_n \in \mathbb{N} M$ dir, diyelim ki

$$\sum_{n \in \Gamma} (n-1) n' x_n = t M \quad (t \in \mathbb{N}) \tag{3.5}$$

dır.

Eğer G dengeli değilse bu taktirde $M = 2J$ dir, böylece (3.4) ve (3.5) istenildiği gibi $g \in \mathcal{F}_h(G)$ yi verir. Böylece G nin dengeli olduğunu kabul edelim, böylece $J = M$ dir. Şimdi $\sum_g$ üzerinde G nin bir G_2 Sylow 2- altgrubunun etkisi için Riemann-Hurwitz formülü,

$$2(g-1) - 2^{\nu+1}(\gamma-1) = \sum_{i=1}^{\varepsilon} (2^i - 1) 2^{\nu-i} z_i \tag{3.6}$$

dir, burada notasyon uygunluğu için $\nu = n_2$ ve $\varepsilon = e_2$ (böylece $|G_2| = 2^\nu$ ve $\exp G_2 = 2^\varepsilon$). Bununla birlikte γ, $\sum_g / G_2$ nin genüsü ve z_i mertebesi 2^i $(1 \le i \le \varepsilon)$ olan dengeleyicilerle G_2-yörüngelerinin sayısıdır. G_2 dengeli olduğundan, G_2 için (2.3.1) bağıntısına Lemma 3.1 i uygulayarak Z_ε nin çift olması gerektiğini görürüz, böylece (3.6) den $g \equiv 1 \pmod{2^{\nu-\varepsilon}}$ dir. Açık olarak, $d \equiv 0 \pmod{2^{\nu-\varepsilon}}$ dir, böylece (3.4) den $2^{\nu-\varepsilon+1} \mid \sum (n-1) n' x_n = t M$ elde edilir. G dengeli olduğundan, d çifttir ve böylece

ebob $(\Pi - 1) = 1$ dir. Böylece M nin tanımından $2^{\nu-\varepsilon} \| M$ dir, böylece t çifttir ve bu nedenle (3.4) istenildiği gibi, $g - 1 - d(h-1) = \frac{1}{2} t\, M \in \mathbb{N}\, M = \mathbb{N}\, J$ yi verir.

(2) Şimdi yeteri kadar büyük her $g \in \mathcal{F}_h(G)$ tamsayısının $\zeta_h(G)$ de olduğunu gösterelim. Hurwitz Teoremindeki (i) den (iv) ye kadar olan şartların sağlayan G nin bir Hurwitz cümlesine sahip olduğunu gösteririz. Aslında bu şartların $c_{i,n}$ üreteçlerinin her birinin asal-kuvvet mertebeden olması ilave kısıtlamasıyla sağlandığını göstermek yeterlidir, yani, $n \in \Delta$ dır, böylece (iv),

$$(iv)' \quad 2(g-1) - 2d(h-1) = \sum_{n \in \Delta} (n-1)\, n' x_n$$

ile yer değiştirir.

(Elbette (i), (ii), (iii), $(iv)'$ şartlarını sağlayan bu g ler $\zeta_h(G)$ nin bir özalt cümlesini oluşturabilir.)

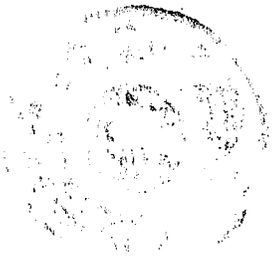
İlk olarak $i = 1, \ldots, h$ için $a_i = b_i = 1$ tanımlansın. Şimdi (iii), $(iv)'$ ve

$(i)'$ $c_{i,n}$ elemanları G yi üretir,

$(ii)'$ $c_{i,n}$ üreteçlerinin bir sırası için $\prod_{i,n} c_{i,n} = 1$ şartlarını sağlayan $c_{i,n} \in G\left(1 \le i \le x_n,\, n \in \Delta\right)$ elemanlarını bulmalıyız.

(3.3) ve Lemma 3.2 den, herhangi $k_n \in \mathbb{N}(n \in \Delta)$ sabitleri verildiğinde, M nin her yeteri kadar büyük katı, $x_n \ge k_n$ tamsayıları ile $\sum_{n \in \Delta} (n-1)\, n'\, x_n$ formuna sahiptir, böylece yeteri derecede büyük her bir

$$g \in \mathcal{F}_h(G) = \mathbb{N} + d(h-1) + 1 \subseteq \mathbb{N}\, \frac{1}{2} M + d(h-1) + 1\,,\ x_n \ge k_n$$



tamsayısı $(iv)'$ şartını sağlar. Şimdi G, elemanları $n \in \Delta$ asal-kuvvet mertebeden olan bir üreteci cümleye sahiptir, böylece her bir k_n i yeteri derecede büyük seçerek, bu üreteçlerin hepsi (böylece $(i)'$ sağlanır) inversleri ile birlikte $c_{i,n}$ elemanları arasına katabiliriz, $(ii)'$ çarpımında ortadan kalkacak şekilde bitişik çiftlere göre düzenlenir.

$(iv)'$ de x_n in değerine bağlı olarak, mertebesi n olan $c_{i,n}$ elemanlarından daha fazla tanımlamaya ihtiyacımız olabilir. İlk olarak n in tek olduğunu kabul edelim ve u, G de mertebesi n olan herhangi bir eleman olsun. Eğer $c_{i,n}$ elemanlarının bir çift sayısı gerekiyorsa $(ii)'$ de ihmal edilen u ve u^{-1} bitişik çiftlerini kullanabiliriz: Bir tek sayı için (k_n i yeterince büyük alarak en az 3 olduğunu kabul edebiliriz). Yine $(ii)'$ de ihmal edilebilen u, u^{-1}, $u, \ldots, u^{-1}$, u, u, u^{-2} (n tek olduğundan mertebesi n olan) elemanları kullanabiliriz.

Şimdi Δ da 2 nin kuvvetlerini göz önüne alalım. G_2 nin mertebesini $r = 2^v = 2^{n_2}$ ve eksponentini $s = 2^{\varepsilon} = 2^{e_2}$ olarak tanımlayalım. İlk olarak G nin dengeli olduğunu kabul edelim ve böylece $J = M$ dir. M yi bölen r/s ile $g \in \mathcal{F}_h(G) = \mathbb{N}M + d(h-1) + 1$ olduğundan $2r/s$ nin $(iv)'$ nin sol tarafını böldüğünü görürüz. $(iv)'$ nin sağ tarafındaki her bir $(n-1)n'$ $(n \in \Delta, n \neq s)$ katsayısı, $n = s$ durumuna karşılık gelen tek istisnai durum hariç, $2r/s$ ile bölünür ki bu durumda $r/s = 2^{v-\varepsilon} \parallel (s-1)s'$ dir. Bu $(iv)'$ nün seçilen çözümünde x_s çift olmak zorundadır.

Δ daki her bir $n = 2^j < s$ için, n nci mertebeden bir $u \in G_2$ elemanı seçelim. Eğer x_n çift ise, bu taktirde daha önceki gibi, geriye kalan $c_{i,n}$ elemanlarını (bir çift sayı için gerekli olan) elemanlarını $u, u^{-1}, \ldots, u, u^{-1}$ olarak tanımlayabiliriz. Eğer x_n tek ise, bu taktirde G_2 dengeli ve u kısa olduğundan $v, w, \in G_2$ uzun elemanları için $u = vw$ yazabiliriz; geriye

kalan $c_{i,n}$ elemanlarını $u, u^{-1}, ..., u^{-1}, u$ olarak tanımlarız ve s nci mertebeden $c_{i,s}$ elemanlarının ikisini w^{-1} ve v^{-1} olarak tanımlarız öyle ki kısaltması ile $(ii)'$ deki çarpanlar ile $u; u^{-1} \ldots u^{-1}\, u = u$ elemanı $w^{-1}\, v^{-1} = u^{-1}$ ile sadeleşecek şekilde düzenlenir. k_s i yeterince büyük seçerek, x_n tek olmak üzere her bir $n = 2^j < s$ için $c_{i,s} = w^{-1}, v^{-1}$ şeklinde bir ikili bulabiliriz. x_s çift olduğundan ve şu ana kadar s nci mertebeden seçilen $c_{i,s}$ elemanlar ikililer olduğundan, geriye tanımlanacak bir çift sayı kalır ve daha önceden yaptığımız gibi bunları ikişerli ters çiftler olarak alınz ki hepsi $(ii)'$ de sadeleşir. Böylece $(ii)'$ sağlanır.

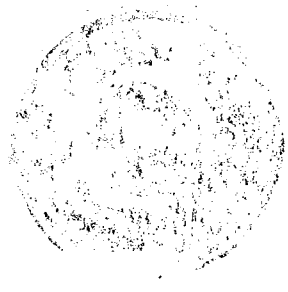
Şimdi G nin dengeli olmadığını kabul edelim. Eğer x_s çift ise bu taktirde s nci mertebeden bir sabit devirli altgruptan (böylece dengeli olur) gereken u, v, w elemanlarını seçerek dengeli durumdaki gibi ilerleyebiliriz. Böylece x_s in tek olduğunu kabul edelim. G_2 dengeli olmadığından Lemma 3.1 u_k uzun terimlerinin bir tek sayısını içeren bir

$$\prod_{k=1}^{m} u_k = 1 \quad (u_k \in G_2) \tag{3.7}$$

bağıntısı vardır. $k_n \left(n = 2^j \leq s\right)$ sabitlerini yeterince büyük alarak, (3.7) den $(ii)'$ de sadeleşen $c_{i,n}$ elemanlarının arasına $u, ..., u_m$ elemanlarını da dahil edebiliriz. Bu bizi tanımlamak için $c_{i,s}$ terimlerinin bir çift sayısı ile karşı karşıya bırakır, böylece x_s in çift olduğu durumdaki gibi ilerleyebiliriz. □

Teorem 3.3. $\zeta(G)$ kümesi, $g \equiv 1 \pmod{K}$ kongrüansını sağlayan sonlu sayıda negatif olmayanlar hariç bütün negatif olmayan tamsayılardan oluşur.

İspat. J ve d nin tanımlarından,



$$\text{ebob}\left(J,d\right)=\begin{cases}\dfrac{d}{e}, & G_2 \text{ dengeli veya trivial ise}\\ \dfrac{d}{2e}, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$=K \tag{3.8}$$

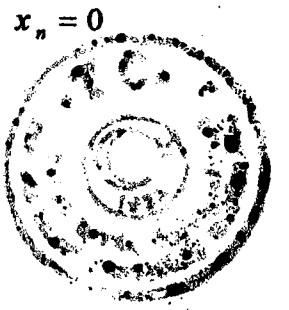
olduğunu görürüz. Eğer $H=J/K$ olarak tanımlarsak, bu taktirde her $h\geq 0$ için $\mathcal{F}_{H+h}(G)\subseteq \mathcal{F}_h(G)$ dir ve böylece $\underset{h\geq 0}{\cup}\mathcal{F}_h(G)$ sadece sonlu sayıdaki $\mathcal{F}_h(G)$ cümlelerinin birleşimidir. Teorem 3.2 ile her h için $\zeta_h(G)\subsetneq \mathcal{F}_h(G)$ olmak üzere $\zeta(G)=\underset{h\geq 0}{\cup}\zeta_h(G)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\zeta(G)&\subsetneq \underset{h\geq 0}{\cup}\mathcal{F}_h(G)\\ &=\underset{h\geq 0}{\cup}\left(\mathbb{N}J+d\left(h-1\right)+1\right)\\ &=\mathbb{N}J+Nd-d+1\\ &\subsetneq \mathbb{N}K-d+1\end{aligned}$$

elde edilir. (Bu son adım (3.2) ve (3.8) dan elde edilir.) $K\mid d$ olduğundan, bu Teorem 3.3 ü ispatlar. □

Teorem 3.4. $\mathcal{F}(G)=g_0+d\mathbb{N}$ (Böylece $\mathcal{F}(G)$ kümesi $g\equiv 1\left(\bmod d\right)$ kongrüansını sağlayan sonlu sayıda hariç bütün sayılardan oluşur).

İspat. G, $\sum_g$ üzerinde serbest (yani sabit-noktasız) etki etmek üzere veya denk olarak G ile elde edilen $\sum_g\to\sum_h$ düzgün örtüsü dallanmamış olmak üzere $g\in\mathbb{N}$ lerin $\mathcal{F}(G)\subsetneq\zeta(G)$ kümesini göz önüne almak ilginçtir. Bu (3.4) deki her $n\in\Gamma$ için $x_n=0$ durumuna karşılık gelir, öyle ki g ve h direkt olarak,



$$g = d(h-1)+1 \tag{3.9}$$

ile bağlantılıdır; böylece $g \in \mathcal{F}(G)$ genüslarına karşılık gelen h ın değerlerinin $\mathcal{H}(G)$ cümlesini belirlemek yeterlidir. Hurwitz Teoreminden, $h \in \mathcal{H}(G)$ dir ancak ve ancak G nin,

$$\prod_{i=1}^{h} [a_i, b_i] = 1 \tag{3.10}$$

yi sağlayan $a_1, b_1, ..., a_h, b_h$ üreteçleri vardır. Şimdi bir h için G nin kesinlikle böyle bir üreteç cümlesi vardır: $a_1, b_1, ..., a_r, b_r$ yi $2r$ tane üreteçlerinin herhangi bir cümlesi olarak alabiliriz, $i = 1,..., r$ için $a_{r+1} = b_{r+1-i}$ ve $b_{r+1} = a_{r+1-i}$ olarak tanımlayalım ve $h = 2r$ yazalım, böylece her bir $[a_{r+i}, b_{r+i}] = [b_{r+1-i}, a_{r+1-i}] = [a_{r+1-i}, b_{r+1-i}]^{-1}$ komütatörü (3.10) deki $[a_{r+1-i}, b_{r+1-i}]$ ile sadeleşir. Böylece $\mathcal{H}(G)$ boş değildir ve bununla beraber eğer $h \in \mathcal{H}(G)$ ise bu taktirde $h+1 \in \mathcal{H}(G)$ dir. Çünkü (3.10) u sağlayan bir üreteç cümleye bir $a_{h+1}, b_{h+1} \in G$ değişmeli çiftini basitçe ekleyebiliriz. Bu bir $h_0 \in \mathcal{H}(G)$ minimum değeri için $\left(h_0 \le 2\left[\!\left[\frac{1}{2} \operatorname{rank} G\right]\!\right] \text{ ile}\right)$, $\mathcal{H}(G) = h_0 + \mathbb{N}$ i ispatlar ve böylece $g_0 = d(h_0 - 1) + 1 \equiv 1 \pmod{d}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(G) &= d\ (\mathcal{H}(G) - 1) + 1 \\ &= d\left(h_0 + \mathbb{N} - 1\right) + 1 \\ &= g_0 + d\mathbb{N} \end{aligned}$$

dir. □



3.2. Örnekler

Aşağıdaki örneklerde birkaç basit durumda $\zeta(G)$, $\zeta_h(G)$ ve $\mathcal{F}(G)$ kümelerini vererek daha önce verilen sonuçları göstereceğiz. Yöntem G nin

$$|c_{i,n}| = n \quad \text{ve} \quad \prod_i [\, a_i, b_i \,] \prod_{i,n} c_{i,n} = 1 \tag{3.11}$$

koşullarını sağlayan bir $a_i, b_i (1 \le i \le h)$ ve $c_{i,n} (1 \le i \le x_n)$ Hurwitz kümesine sahip olacak şekilde h ve $x_n (n \in \Gamma)$ değerlerini belirlemektir. Buradan g nin değerleri,

$$g = \frac{1}{2} \sum_{n \in \Gamma} (n-1)\, n'\, x_n + d(h-1) + 1 \tag{3.12}$$

formundaki Riemann-Hurwitz formülü ile verilir, bu durumda $g \in \mathcal{F}(G)$ ler her $n \in \Gamma$ için $x_n = 0$ durumlarına karşılık gelir.

Her bir G için, bir diyagram $(g, h) \in \mathbb{N}^2$ ikililerini gösterir, öyle ki beyaz noktalar $\sum_g \to \sum_h$ dallanmamış örtüleri göstermek üzere (yani, $g \in \mathcal{F}(G)$) $g \in \zeta_h(G)$ dir. Böylece $\zeta(G)$ ve $\mathcal{F}(G)$ bütün noktaları yada beyaz noktaları g-ekseni üzerine izdüşürmekle görülebilir.

Örnek 3.1. $G = C_2 = \langle a \mid a^2 = 1 \rangle = \{1, a\}$ grubunu göz önüne alalım.

Bu grup, $d = e = 2$ ile dengelidir, böylece $J = M = \frac{d}{e}\,\text{ebob}(\Pi - 1) = 1$ ve $K = \frac{d}{e} = 1$ dir. Böylece Teorem 3.3 ile $\zeta(C_2)$ kümesi sonlu sayıda hariç bütün negatif olmayan $g \equiv 1 \pmod{K}$; yani $\zeta(C_2) \subsetneq \mathbb{N}$ dir. Teorem 3.2 den ise

$$\zeta_h(G) \subsetneq \mathcal{F}_h(G) = NJ + d(h-1) + 1$$
$$\subsetneq \mathbb{N} + 2(h-1) + 1 = \mathbb{N} + 2h - 1$$

dir.

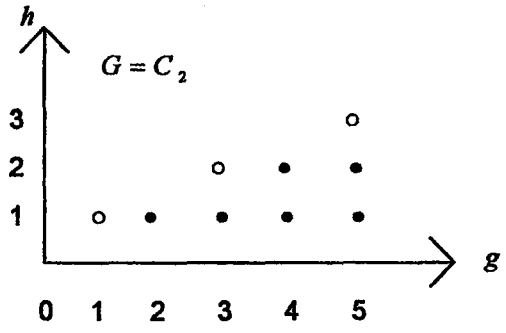
Bu durumda $\Gamma = \{2\}$ olduğundan, (3.12),

$$g = \frac{1}{2}\sum_{n\in\Gamma}(n-1)\,n'\,x_n + d\,(h-1)+1$$

$$= \frac{1}{2}(2-1)\frac{2}{2}x_2 + 2(h-1)+1$$

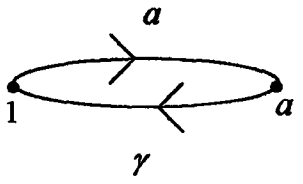
$$= \frac{1}{2}x_2 + 2h - 1 \qquad (3.13)$$

haline gelir. Şimdi $|\,c_{i,2}\,| = 2$ ve (3.11) i sağlayan $a_i, b_i\left(1 \le i \le h\right)$ ve $c_{i,2}\left(1 \le i \le x_2\right)$ üreteçlerini seçebilmemiz için gerek ve yeter şart x_2 nin çift olmasıdır, eğer $h = 0$ ise $x_2 \ge 2$ dir. Bunu (3.13) e uygulayarak, her $h \ge 1$ için $\zeta_o\left(C_2\right) = \mathbb{N}$ ve $\zeta_h\left(C_2\right) = \mathbb{N} + 2h - 1$ olduğunu görürüz, böylece $\zeta\left(C_2\right) = \cup_h\ \zeta_h\left(C_2\right) = \mathbb{N}$ dir. (3.13) de $x_2 = 0$ yazarsak, böylece $h \ge 1$ olur, $\mathcal{F}\left(C_2\right) = 2\mathbb{N} + 1$ olduğunu görürüz. Yani Teorem 3.4 de $g_0 = 1$ dir. Bu sonuçlar Şekil 3.1 de gösterilmiştir. Böylece $\mathcal{F}\left(C_2\right) = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ dir.



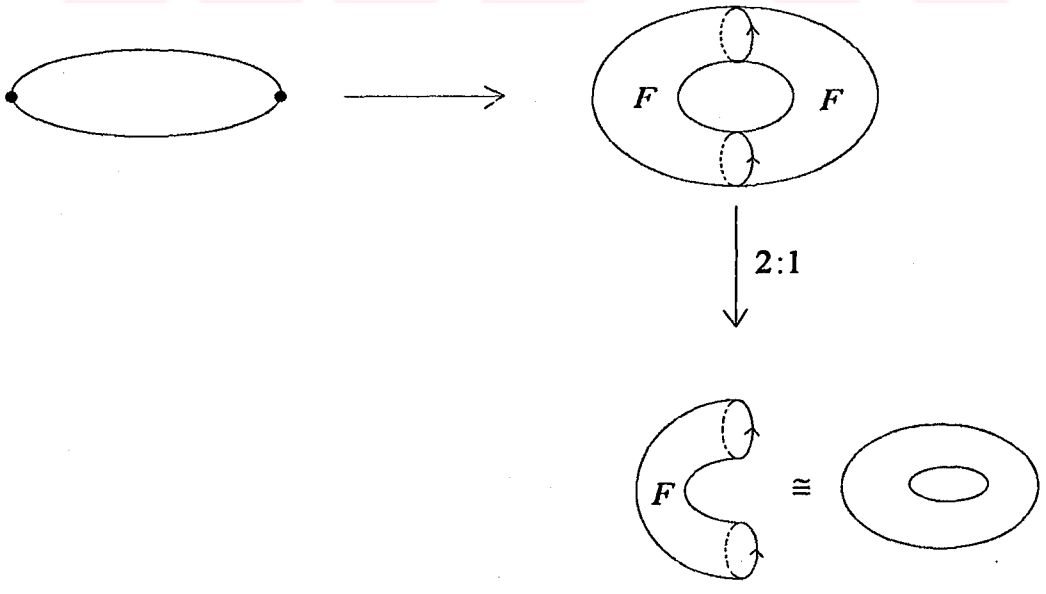
Şekil 3.1

$\mathcal{F}(G)$ kümesini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz. G nin g üreteçlerinin bir kümesine göre γ Cayley grafiğini göz önüne alalım. $\tilde{\sum}$, γ üzerinde G nin doğal etkisinden elde edilen G nin etkisiyle, γ nın bir kapalı tüp komşuluğunun sınırı olsun. Böylece G, $\tilde{\sum}$ üzerinde serbest etkir. Şimdi, $G = < a > = \{ 1, a \}$ devirli grubunun Cayley grafiğini alalım (Şekil 3.2).



Şekil 3.2

$\tilde{\sum}$ ile γ nin kapalı tüp komşuluğunun sınırını gösterelim. Bu taktirde G bu $\tilde{\sum} = \sum_1$ (torus) yüzeyi üzerinde serbest etkir. F de bu yüzey üzerinde sınır eğrileri tanımlanmış G için bir temel bölge olsun. Bu taktirde elde edilen bölüm uzayı $\tilde{\sum} / G$ nın genüsü 1 dir, yani bölüm uzayı yine bir torustur. Böylece $\sum_1$ torusunun, yine $\sum_1$ torusu ile 2-yapraklı düzgün dallanmamış örtüsü elde edilmiş olur.

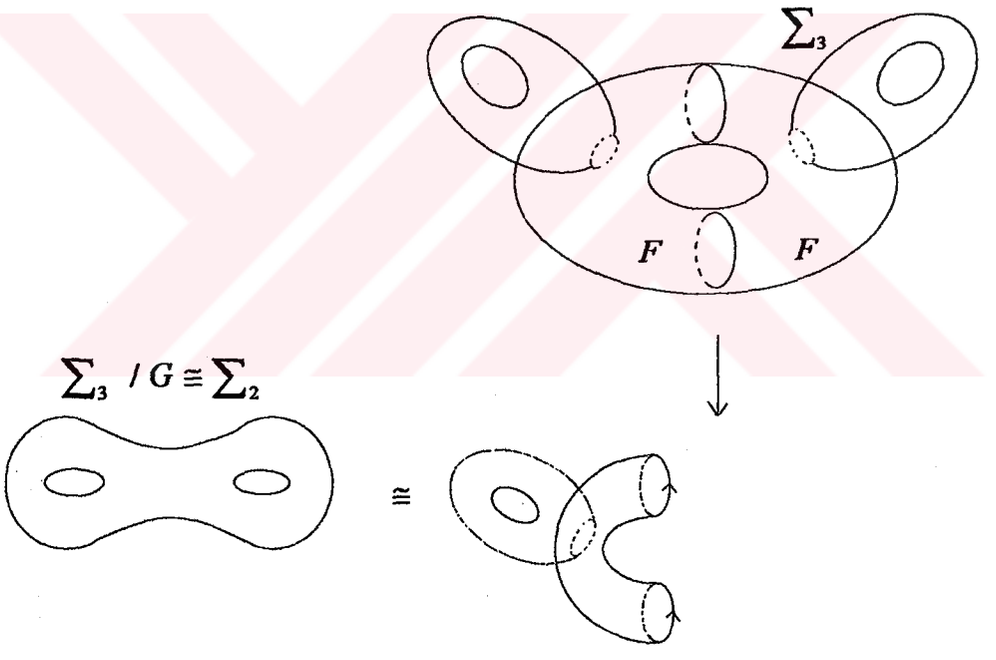


Şekil 3.3

Şimdi, $g=3$ ve $h=2$ olsun. Yine $G=C_2$ nin γ Cayley grafiğinden elde edilen serbest etkiyi göz önüne alalım. Şimdi, $\sum_1$ torusuna yine $\sum_1$ torusunun 2 kopyasını her biri F temel bölgesi üzerinde olacak şekilde eklersek, $\sum_1 \# \sum_1 \# \sum_1 \cong \sum_3$ elde edilir (Burada # sembolü, iki yüzeyin bağlantılı toplamını gösterir). Bu taktirde G nin etkisi $\sum_3$ üzerinde bir serbest etkiye genişler. Bu etkiye göre bölüm uzayı

$$\sum_3 / G \cong \sum_2$$

dır.

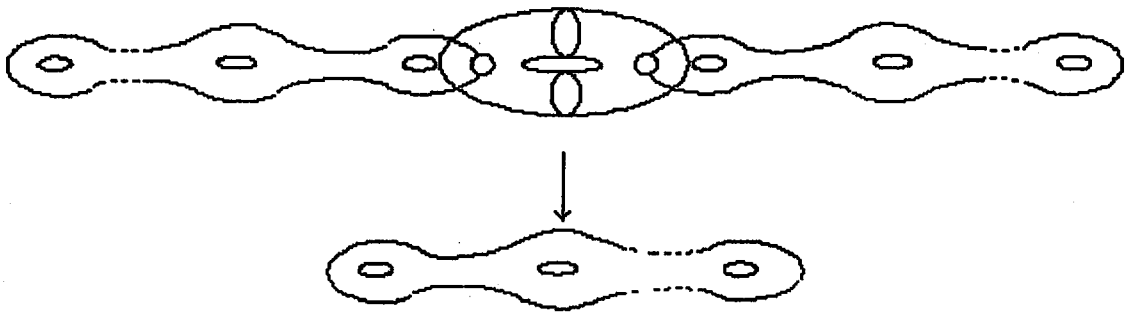


Şekil 3.4

Benzer şekilde, $g=1+2(h-1)$ ve h olsun. Bu durumda $\sum_1$ torusuna $\sum_{h-1}$ yüzeyinin 2 kopyasını her biri F temel bölgesi üzerinde olacak şekilde eklersek

$$\sum_{h-1} \# \sum_{h-1} \# \sum_1 \cong \sum_{1+2(h-1)}$$

elde edilir. Böylece G bu yeni yüzey üzerinde etkir öyle ki $\sum_g / G \cong \sum_h$ dır.



Şekil 3.5

Örnek 3.2. $G = C_3 = < a \mid a^3 = 1 >$ olsun. Bu grup $d = e = 3$ ile dengeli değildir. Böylece $M = \frac{d}{e}$ ebob$(\Pi - 1) = 2$. $J = \frac{1}{2}2 = 1$ ve $K = 1$ dir. Böylece Teorem 3.3, $\zeta(C_3) \subsetneq \mathbb{N}$ olduğunu verir ve Teorem 3.2 den

$$\zeta_h(C_3) \subsetneq \frac{1}{2}(2)\mathbb{N} + 3(h-1) + 1 = \mathbb{N} + 3h - 2$$

dir. Şimdi, $\Gamma = \{3\}$ olduğundan, (3.12)

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2}\sum_{n\in\Gamma}(n-1)\,n'\,x_n + d(h-1) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(3-1)\,x_3 + 3(h-1) + 1 \\ &= \frac{1}{2}\,2\,x_3 + 3h - 3 + 1 \\ &= x_3 + 3h - 2 \end{aligned} \qquad (3.14)$$

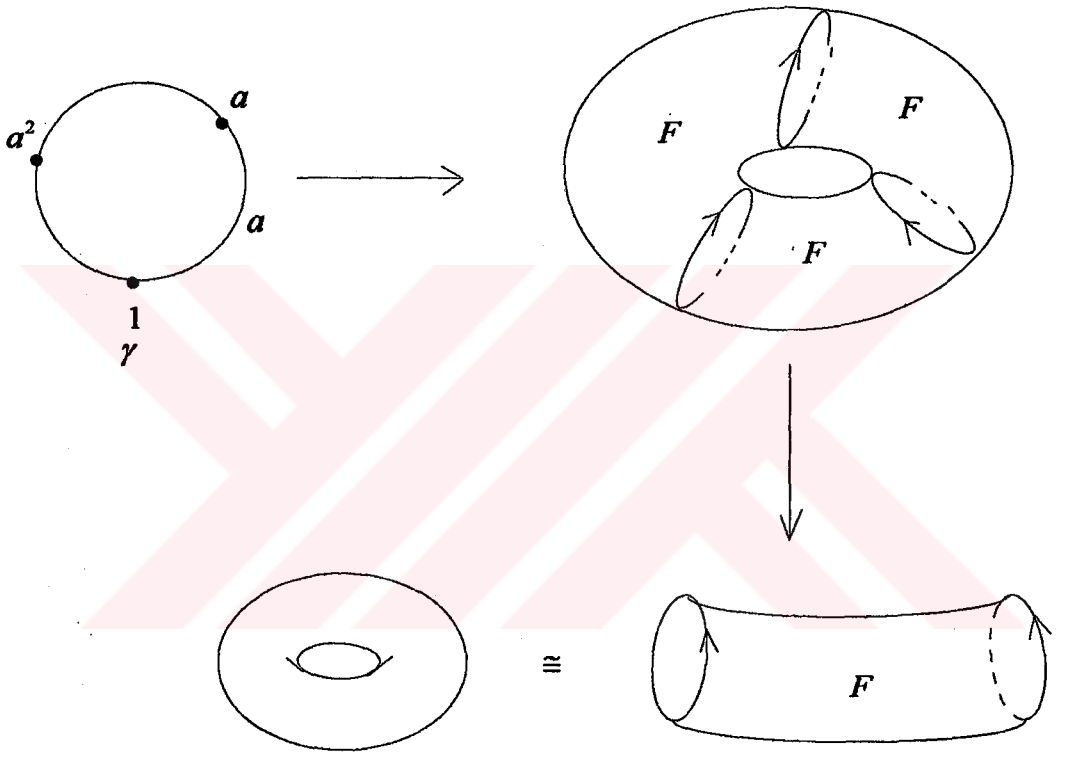
dır. Eğer $h = 0$ ise bu taktirde herhangi bir $x_3 \geq 2$ alabiliriz, böylece $\zeta_o(C_3) = \mathbb{N}$ dir. Eğer $h \geq 1$ ise bu taktirde herhangi bir $x_3 \neq 1$ alabiliriz, böylece

$\zeta_h(C_3) = \{3h-2\} \cup \{\mathbb{N}+3h\}$ dır.

(3.14) de $x_3 = 0$ koyarsak (böylece $h \geq 1$),

$$g = x_3 + 3h - 2 = 3h - 2 = 3(h-1)+1 \in 3\mathbb{N}+1$$

olur. Böylece $\mathcal{F}\left(C_3\right) = 1+3\mathbb{N} = \{1,4,7,10,\ldots\}$ dır. $G = C_3$ ün γ Cayley grafiğini alalım. Bu taktirde G , γ üzerinde serbest etkir.



Şekil 3.6

Böylece $g = 1$ ve $h = 1$ durumunu elde ederiz, yani

$$\sum_1 / G \cong \sum_1$$

dır.

Şimdi, $\sum_1$ torusuna $\sum_1$ in 3 kopyasını her biri bir temel bölge üzerine gelecek şekilde eklersek,

$$3\sum_1 \# \sum_1 \cong \sum_4 \cong \tilde{\sum}$$

olur. Bu durumda G bu $\tilde{\sum}$ üzerine etkir öyle ki $\tilde{\sum} / G \cong \sum_2$ olur. Yani $h = 2$ ve $g = 4$ dür.

Benzer şekilde, $\sum_1$, torusuna $\sum_{h-1}$ in 3-kopyasını her biri temel bölge üzerine gelecek şekilde eklersek,

$$3\sum_{h-1} \# \sum_1 \cong \sum_{1+3(h-1)}$$

olur. Bu durumda G, $\sum_{1+3(h-1)}$ üzerine etkir öyle ki

$$\sum_{1+3(h-1)} / G \cong \sum_h$$

olur.

Bunu aşağıdaki örnekle genelleyelim.

Örnek 3.3. $G = C_p = \langle a \mid a^p = 1 \rangle = \{1, a, a^2, \ldots, a^{p-1}\}$ ($p > 2$ asal) olsun. Bu grup $d = e = p$ ile dengeli değildir, böylece $J = \frac{1}{2}(p-1)$ ve $K = 1$ dir. Böylece Teorem 3.2 ve 3.3, $\zeta(C_p) \subseteq \mathbb{N}$ ve $\zeta_h(C_p) \subseteq \frac{1}{2}(p-1)\mathbb{N} + p(h-1) + 1$ olduğunu verir.

$\Gamma = \{p\}$ olduğundan, (3.12)

$$g = \frac{1}{2}(p-1)\,x_p + p(h-1) + 1$$

$$= \frac{1}{2}p x_p - p - \frac{1}{2}x_p + 1 + ph$$

$$= \frac{1}{2}(p-1)(x_p - 2) + ph \qquad (3.15)$$

haline gelir. Eğer $h = 0$ ise, herhangi bir $x_p \geq 2$ alabiliriz, böylece $\zeta_0(C_p) = \frac{1}{2}(p-1)\mathbb{N}$ dir. Eğer $h \geq 1$ ise, herhangi bir $x_p \neq 1$ alabiliriz, böylece

$$\zeta_h(C_p) = \{ph - p + 1\} \cup \left(\frac{1}{2}(p-1)\mathbb{N} + ph\right)$$

dır. Buradan

$$\zeta(C_p) = \Big\{ 0,1\,\frac{p-1}{2},\ p-1,\ p,\ p+1,\ \frac{3p-3}{2},\ \frac{3p-1}{2},\ 2p-2,\ 2p-1,$$

$$2p,\ 2p+1,\ \frac{5p-5}{2},\ \frac{5p-3}{2},\ \frac{5p-1}{2},\ 3p-3,\ 3p-2,\ 3p-1,\ 3p,\ 3p+1,$$

$$\frac{7p-7}{2},\ \frac{7p-5}{2},\ \frac{7p-3}{2},\ \frac{7p-1}{2},\ 4p-4,\ 4p-3,\ 4p-2,\ 4p-1,\ 4p,\ 4p+1,$$

$$\frac{9p-9}{2},\ldots,\ \frac{9p-1}{2},\ 5p-5,\ldots,\ 5p+1,\ \frac{11p-11}{2},\ldots,\ \frac{11p-1}{2},\ 6p-6,\ldots,\ 6p+1,$$

$$\frac{13p-13}{2},\ldots,\ \frac{13p-1}{2},\ 7p-7,\ldots,\ 7p+1,$$

$$\vdots$$

$$\frac{(p-2)p-1}{2},\ldots \Big\}$$

kümesi $\mathbb{N}$ in $\frac{1}{4}(p-3)^2$ eleman hariç bütün elemanları içerir. Bu $\frac{1}{4}(p-3)^2$ elaman ise şunlardır:

$$\underbrace{2,3,\ldots,\frac{p-1}{2}-1=\frac{p-3}{2}}_{\frac{p-5}{2}\text{ tane}},\ \underbrace{\frac{p+1}{2},\frac{p+3}{2},\ldots,p-2}_{\frac{p-3}{2}\text{ tane}},$$

$$\underbrace{p+2,\ p+3,\ldots,\frac{3p-5}{2}}_{\frac{p-7}{2}\text{ tane}},\ \underbrace{\frac{3p+1}{2},\frac{3p+3}{2},\ldots,2p-3}_{\frac{p-5}{2}\text{ tane}},$$

$$\underbrace{2p+2,2p+3,\ldots,\frac{5p-7}{2}}_{\frac{p-9}{2}\text{ tane}},\ \underbrace{\frac{5p+1}{2},\frac{5p+3}{2},\ldots,3p-4}_{\frac{p-7}{2}\text{ tane}},$$

$$\underbrace{3p+2,3p+3,\ldots,\frac{7p-9}{2}}_{\frac{p+1}{2}\text{ tane}},\ \underbrace{\frac{7p+11}{2},\ldots,4p-5}_{\frac{p-9}{2}\text{ tane}},$$

$$\underbrace{4p+2,4p+3,\ldots,\frac{9p-11}{2}}_{\frac{p-13}{2}\text{ tane}},\ \underbrace{\frac{9p+1}{2},\frac{9p+3}{2},\ldots,5p-6}_{\frac{p-11}{2}\text{ tane}}$$

Bunların sayısı basit bir hesaplamayla bulunur:

$$2.\frac{p-5}{2}+2.\frac{p-3}{2}+2.\frac{p-7}{2}+2.\frac{p-9}{2}+2.\frac{p-11}{2}+\ldots+2.\frac{p-(p-2)}{2}-\frac{p-3}{2}$$

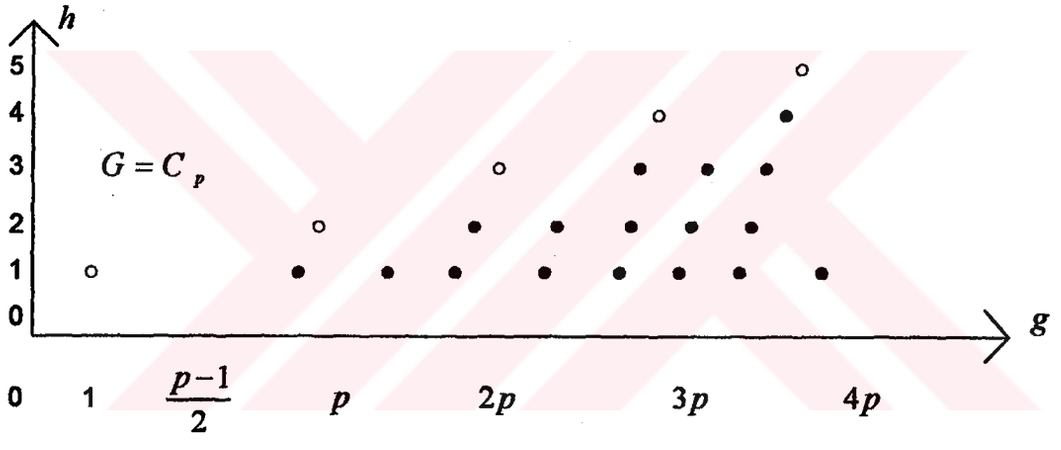
$$=2\left\{\frac{p-3}{2}+\frac{p-5}{2}+\frac{p-7}{2}+\frac{p-9}{2}+\ldots+1\right\}-\frac{p-3}{2}$$

$$=2.\left\{\frac{\frac{p-3}{2}.(\frac{p-3}{2}+1)}{2}\right\}-\frac{p-3}{2}=\left(\frac{p-3}{2}\right)^2+\frac{p-3}{2}-\frac{p-3}{2}=\frac{1}{4}(p-3)^2$$

(3.15) de $x_p = 0$ yazarsak (böylece $h \geq 1$), $\mathcal{F}(C_p) = p\mathbb{N}+1$ olduğunu görürüz, böylece $g_0 = 1$ dir. Dolayısıyla

$$\mathcal{F}(C_p) = p\mathbb{N}+1 = \{1, 1+p, 1+2p, 1+3p, \ldots\}$$

dir.



Şekil 3.7

Örnek 3.2 ye benzer olarak, $\mathcal{F}(C_p)$ kümesini C_p nin γ Cayley grafiği yardımıyla üretebiliriz.

Örnek 3.4. $G = D_p = \langle x, y \mid x^p = y^2 = (xy)^p = 1 \rangle = \{1, x, \ldots, x^{p-1}, y, xy, x^2y, \ldots, x^{p-1}y\}$ ($p>2$ asal) mertebesi $2p$ olan dihedral grup olsun. Bu grup $d = e = 2p$ ile dengelidir, böylece $J = K = 1$ dir ve Teorem 3.2 ve 3.3, $\zeta(D_p) \subseteq \mathbb{N}$ ve $\zeta_h(D_p) \subseteq \mathbb{N} + 2p(h-1)+1$ i verir.

$\Gamma = \{2, p\}$ olduğundan (3.12) ile

$$g = \frac{1}{2}\sum_{n\in\Gamma}(n-1)n' x_p + d(h-1) + 1$$

$$g = \frac{1}{2}[\,(2-1)\frac{2p}{2}x_2 + 2p(h-1)+1(p-1)\frac{2p}{p}x_p + 2p(h-1)+1\,]$$

$$= px_2 + 2p(h-1)+1+(p-1)x_p$$

$$= \frac{1}{2}px_2 + (p-1)x_p + 2p(h-1) + 1 \qquad (3.16)$$

elde edilir. (3.11) i sağlamak için x_2 çift olmalıdır. Eğer $h = 0$ ise, bu taktirde G yi üretmek için $x_2 \geq 2$ olmalıdır ve eğer $x_2 = 2$ ise, bu taktirde (3.11) $x_p \geq 1$ i gerektirir; bu şartlar yeterlidir, böylece

$$\zeta_o(D_p) = \{0, 1, p-1, p, p+1, 2p-2, 2p-1, 2p, 2p+1, 3p-3, \ldots\}$$

Eğer $h = 1$ ise karşılık gelen koşullar $x_2 \geq 0$ ve eğer $x_2 = 0$ ise $x_p \geq 1$, böylece

$$\zeta_1(D_p) = \zeta_0(D_p) + p$$

dir. Eğer $h > 1$ ise, her x_2 , $x_p \geq 0$ alabiliriz, böylece

$$\zeta_h(D_p) = (\zeta_1(D_p) \cup \{1\}) + 2p(h-1)$$

dir. $\zeta_0(D_p) \supseteq \zeta_1(D_p) \supseteq \zeta_2(D_p) \supseteq \ldots$ olduğundan, $\mathbb{N}$ in $\frac{1}{2}(p-3)(p-2)$ elemanı hariç bütün elemanları içeren $\zeta(D_p) = \zeta_0(D_p)$ yi elde ederiz. Bu $\frac{1}{2}(p-3)(p-2)$ eleman şunlardır:

$$\underbrace{2,3,\ldots,p-2}_{p-3\ tane},\ \underbrace{p+2,p+3,\ldots,2p-3}_{p-4\ tane},\ \underbrace{2p+2,2p+3,\ldots,3p-4}_{p-5\ tane},$$

$$\underbrace{\ldots}_{p-6\ tane},\ \ldots,\ \underbrace{\ldots}_{4\ tane},\ \underbrace{\ldots}_{3\ tane},\ \underbrace{\ldots}_{2\ tane},\ \underbrace{\ldots}_{1\ tane}$$

Böylece toplam,

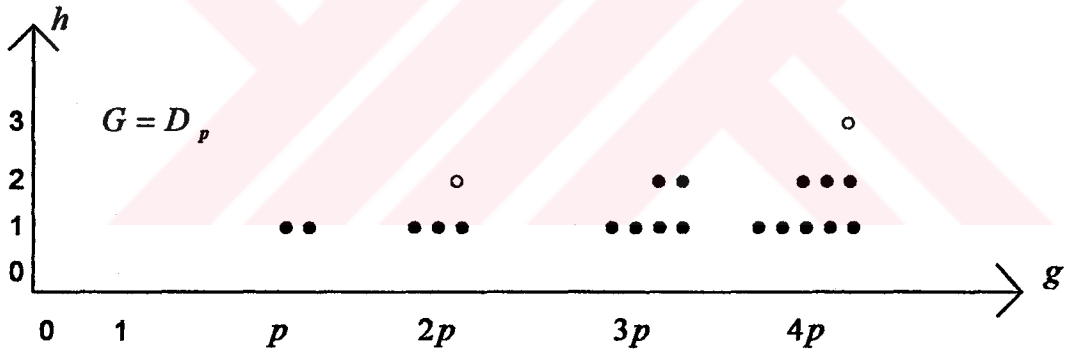
$$1+2+3+...+(p-4)+(p-3)=\frac{(p-3)(p-2)}{2}$$

dir.

Eğer $x_2 = x_p = 0$ ise, bu taktirde $h \geq 2$ dir, böylece

$$\mathcal{F}(D_p) = 2p\mathbb{N} + 2p + 1$$

$g_0 = 2p+1$ i verir.

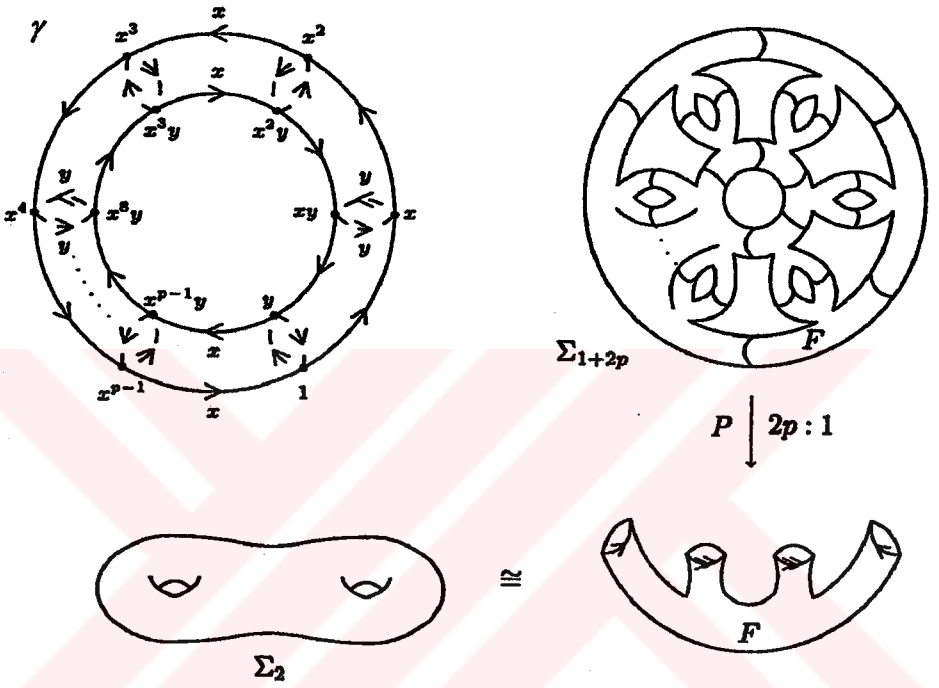


Şekil 3.8

$C_2, C_p \leq D_p$ olduğundan, $\zeta(D_p) \subseteq \zeta(C_2) \cap \zeta(C_p)$ ve $\mathcal{F}(D_p) \subseteq \mathcal{F}(C_2) \cap \mathcal{F}(C_p)$ olacağını not edelim.

Şimdi yukandaki örneklerdeki gibi $\mathcal{F}(D_p)$ kümesini G nin Cayley grafiğinden nasıl elde ettiğimizi görelim: D_p ($p > 2$ asal) nin dihedral grubunun γ Cayley grafiğini göz önüne alalım. Bu taktirde D_p, γ üzerinde etkir. $\tilde{\sum}$, γ nın bir kapalı tüp komşuluğunun sınırı

olsun. Bu taktirde, $\tilde{\sum}$, genüsü $1+2p$ olan bir yüzeydir. F , sınır eğrileri tanımlı G için temel bölge olsun. Bu taktirde $\sum_2$ nin bir $2p$-tabakalı düzgün dallanmış örtüsünü elde ederiz. (Şekil 3.9)



Şekil 3.9

Şimdi, $\sum_{1+2p}$ ye $\sum_1$ in $2p$- kopyasını her biri bir F temel bölgesi üzerine eklersek,

$$2p\sum_1 \# \sum_{1+2p} \cong \sum_{1+4p} = \tilde{\sum}$$

elde edilir. Böylece $G = D_p$, $\tilde{\sum}$ üzerine serbest etkir öyle ki $\tilde{\sum} / G \cong \sum_3$ tür. Benzer şekilde, $\sum_{1+2p}$ ye $\sum_{h-2}$ nin $2p$- kopyasını her biri bir F temel bölgesi üzerine eklenirse,

$$2p\sum_{h-2} \# \sum_{1+2p} \cong \sum_{1+2p(h-1)} = \tilde{\sum}$$

elde edilir. Bu durumda G, $\tilde{\sum} = \sum_{1+2p(h-1)}$ üzerine serbest etkir öyle ki $\tilde{\sum} / G \cong \sum_h$ dır.

Örnek 3.5. $G = C_{2p}$ ($p > 2$ asal sayı) olsun. Bu grup $d = e = 2p$ ile dengelidir, böylece $J = K = 1$ dir ve Teorem 3.2 ve 3.3 $\zeta\,(C_{2p}) \subsetneq \mathbb{N}$ ve $\zeta_h(C_{2p}) \subsetneq \mathbb{N} + 2p\,(h-1)+1$ i verir.

Bu durumda, $\Gamma = \{\, 2,\, p\,,\, 2p \,\}$ dir, böylece (3.12)

$$g = \frac{1}{2}\,p\,x_2 + (\,p-1\,)\,x_p + (\,p-\frac{1}{2}\,)\,x_{2p} + 2p\,(\,h-1\,)+1 \qquad (3.17)$$

halini alır. Böylece bu üç x_n değeri ile (yani x_2, x_p ve x_{2p} değerleri) $\zeta_h(C_{2p})$ nin hesaplanması önceki örneklerden daha zordur. Eğer $h = 0$ ise, C_{2p} yi üretmek için $c_{i,n}$ elemanlarını seçebilmemiz için gerek ve yeter şart $x_{2p} \geq 1$ ya da x_2 , x_p nin her ikisi birden ≥ 1 olmasıdır ve (3.11) bağıntısının sağlanması için gerek ve yeter şart $x_2 + x_{2p}$ nin çift ve $x_p + x_{2p} \neq 1$ olmasıdır. $x_{2p} = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots$ durumlarının göz önüne alınmasıyla sonunda,

$$\zeta_0(C_{2p}) = \left\{0\,,\,\frac{p-1}{2}\,,\;p-1\,,\,p\,,\,\frac{3p-3}{2}\,,\,\frac{3p-1}{2}\,,\,2p-2\,,\,2p-1\,,\,2p,\,\frac{5p-5}{2}\,,\ldots\right\}$$

bulunur. Eğer $h = 1$ ise, herhangi x_2 , x_p , $x_{2p} \geq 0$ ile C_{2p} nin üretilebilmesi ve (3.11) in sağlanması için gerek ve yeter şart $x_2 + x_{2p}$ nin çift ve $x_p + x_{2p} \neq 1$ olmasıdır; bu

$$\zeta_1(C_{2p}) = \left\{1, p+1, 2p-1, 2p, 2p+1, \frac{5p-1}{2},\right.$$
$$\left. 3p-2, 3p-1, 3p, 3p+1, \frac{7p-3}{2}, \frac{7p-1}{2}, 4p-3, \ldots\right\}$$

yi verir. Eğer $h>1$ ise, x_2 , x_p ve x_{2p} üzerine aynı şartlarla uygulanır, (bunun bir genelleştirmesi için Lemma 3.3 de verilir), böylece
$\zeta_h(C_{2p}) = \zeta_1(C_{2p}) + 2p(h-1) \subseteq \zeta_1(C_{2p})$ elde edilir ve böylece,

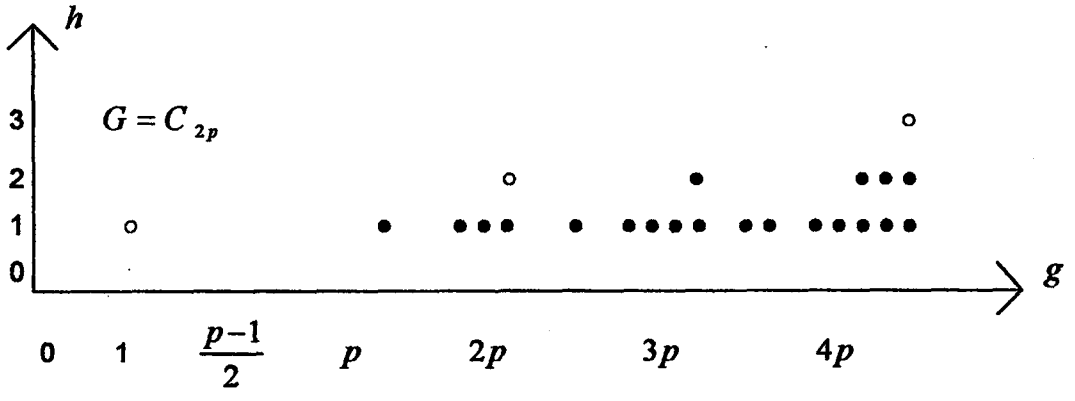
$$\zeta(C_{2p}) = \zeta_0(C_{2p}) \cup \zeta_1(C_{2p})$$
$$= \{0, 1, \frac{p-1}{2}, p-1, p, p+1, \frac{3p-3}{2}, \frac{3p-1}{2},$$
$$2p-2, 2p-1, 2p, 2p+1, \frac{5p-5}{2}, \dots\}$$

dir. Eğer $x_2 = x_p = x_{2p} = 0$ yazarsak, herhangi bir $h \geq 1$ alabiliriz, böylece

$$\mathcal{F}(C_{2p}) = 2p\mathbb{N} + 1$$

$g_0 = 1$ i verir.

Not: D_p ve C_{2p} aynı mertebeye, aynı eksponente ve aynı Sylow 2-altgruplarına sahip, böylece $K(D_p) = K(C_{2p})$ ve $J(D_p) = J(C_{2p})$ olmasına rağmen, $\zeta(D_p) \neq \zeta(C_{2p})$ ($p=3$ olmadıkça) ve her $h \geq 0$ için $\zeta_h(D_p) \neq \zeta_h(C_{2p})$ dir.



Şekil 3.10

Örnek 3.7. $G = C_2 \times C_2$ olsun. $|G| = d = 2^2 = 4$ ve $e = \exp(G) = 2$. $G_2 = G$ olup G dengeli değildir. Böylece

$$M = \frac{d}{e}\, ebob\,(\Pi - 1) = \frac{4}{2}.1 = 2,$$

$$J = \frac{1}{2}M = 1, \qquad K = \frac{d}{2e} = \frac{4}{4} = 1$$

dir.

Böylece Teorem 3.2. den $\zeta\ (C_2 \times C_2) \subsetneq \mathbb{N}$ ve

$$\zeta_h\,(C_2 \times C_2) \subsetneq \mathbb{N} + 4\,(h-1) + 1 = \mathbb{N} + 4h - 3$$

dır.

$\Gamma = \{2\}$ olduğundan (3.12) den

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2}\sum_{n\in\Gamma}(n-1)n'x_n + d(h-1) + 1 \\ &= \frac{1}{2}.1.2.x_2 + 4(h-1) + 1 \\ &= x_2 + 4h - 3 \end{aligned}$$

bulunur.

Eğer $h = 0$ ise, bu taktirde $x_2 \geq 3$ olmalıdır, böylece

$$\zeta_0(C_2 \times C_2) = \mathbb{N}$$

dir.

Eğer $h \geq 1$ ise

$$\zeta_h(C_2 \times C_2) = \mathbb{N} + 4h - 3$$

bulunur.

Böylece $\zeta_h(C_2 \times C_2) = \bigcup_h \zeta_h(C_2 \times C_2) = \mathbb{N}$.

Şimdi $x_2 = 0$ koyarsak, $h \geq 1$ olur, böylece

$\mathcal{F}(C_2 \times C_2) = 4\mathbb{N} + 1$ olur (Çünkü, $g = 4h-3 = 4(h-1)+1 \in 4\mathbb{N}+1$). Böylece

$\mathcal{F}(C_2 \times C_2) = \{ 1,5,9,13,... \}$ dır.

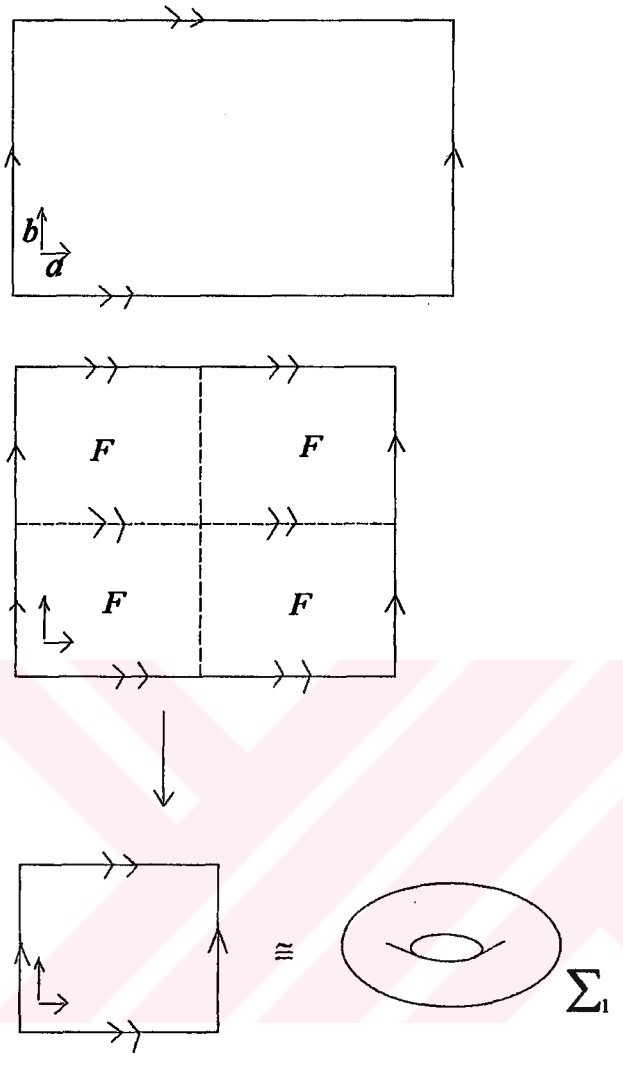
Şimdi bu kümeyi açıklayalım.

$$G = C_2 \times C_2 = < a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1 > = \{ 1, a, b, ab \}$$

olsun. Bu taktirde G, $\sum_1$ torusu (yönlendirilmiş bir kare) üzerine serbest etkir. Bu bir 4 kare verir. Bunların her biri $\sum_1$ üzerinde G için bir temel bölgedir. Böylece G, bir kare üzerinde serbest etkiye sahiptir öyle ki

$$\sum_1 / G \cong \sum_1$$

dır. Yani $h = 1$ ve $g = 1$ e karşılık gelir.



Şekil 3.11

Şimdi, $\sum_1$ karesine , $\sum_1$ in 4 kopyasını, her biri bir küçük kare üzerine gelecek şekilde eklersek elde edilen

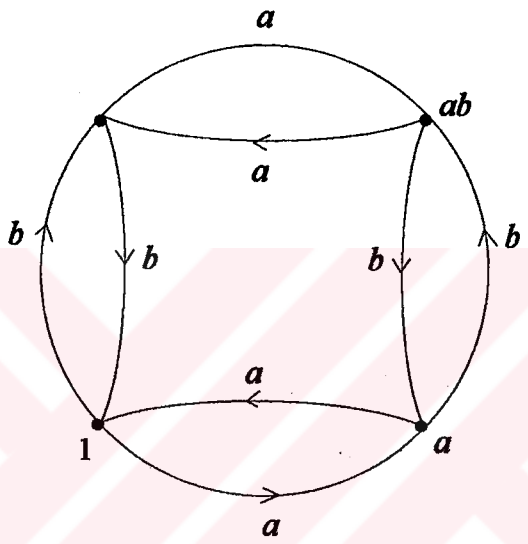
$$\tilde{\sum} \cong 4\sum_1 \ \# \sum_1 \cong \sum_5$$

yüzeyi G için γ Cayley grafiğinden elde edilen yüzeye denktir. G bu yüzey üzerinde serbest etkir öyle ki

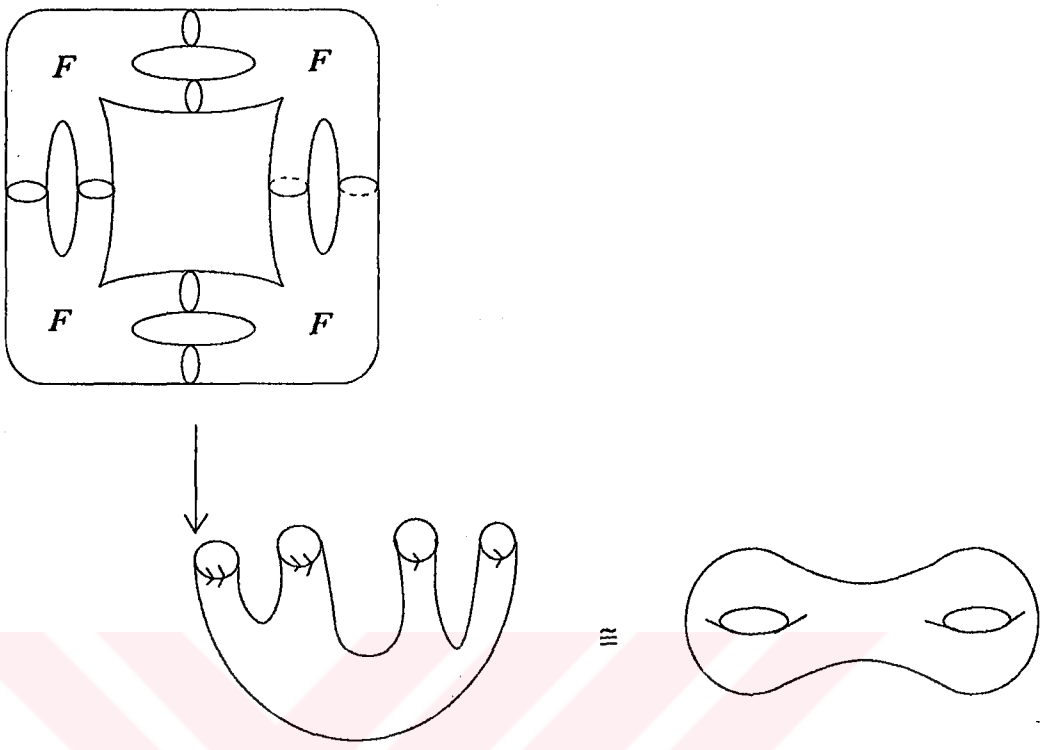
$$\sum_5 / G \cong \sum_2$$

dır.

G nin γ Cayley grafiği şekil 3.12 ile verilmektedir. Buradan genüsü 5 olan $\sum_5$ yüzeyi elde edilir. G bu yüzeyin üzerinde serbest etkiye sahiptir.



Şekil 3.12

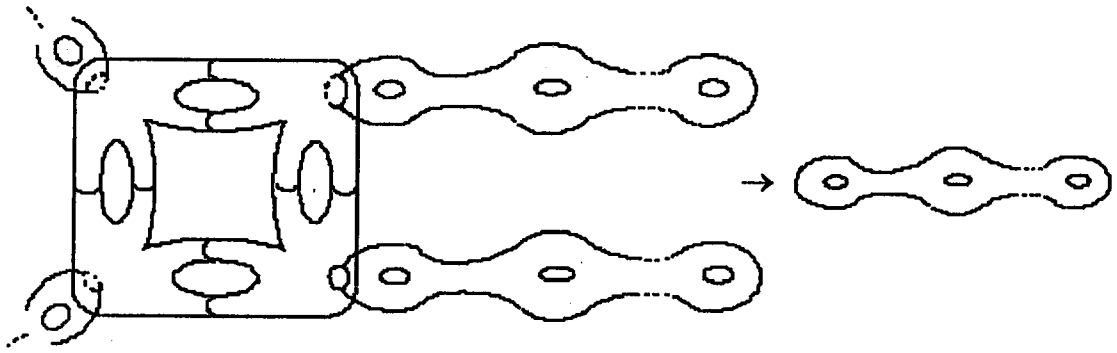


Şekil 3.13

Şimdi de, $\sum_5$ e $\sum_{h-2}$ in 4 kopyasını her biri bir temel bölge üzerine gelecek şekilde eklersek, G elde edilen

$$\tilde{\sum} \cong 4\sum_{h-2} \# \sum_5 \cong \sum_{1+4(h-1)}$$

yüzeyi üzerine serbest etkir öyle ki $\sum_{1+4(h-1)} \cong \sum_h$ olur.



Şekil 3.14

Örnek 3.8. $G = C_p \times C_p = < a,b \mid a^p = b^p = [a,b] = 1 >$ ($p > 2$ asal) olsun. Bu durumda $d = |G| = p^2, e = \exp(G) = p$ dir. Bu grup dengeli dengelidir. Böylece

$$\begin{aligned} \Pi &= \{\, p \mid p,\ d \text{ yi bölen bir asal} \,\} \\ &= \{\, p \,\} \end{aligned}$$

ve

$$\Pi - 1 = \{\, p-1 \,\}$$

dır.

$$\begin{aligned} M &= \frac{d}{e}\, ebob(\Pi - 1) \\ &= p(p-1) \end{aligned}$$

$$J = \frac{1}{2} M = \frac{p(p-1)}{2}$$

$$K=\begin{cases}\dfrac{d}{e}, & G_2 \text{ dengeli veya trivial}\\ \dfrac{d}{2e}, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$G_2 =$ trivial olduğunda, $K=\dfrac{d}{e}=\dfrac{p^2}{p}=p$ dir. Böylece Teorem 3.2 ve Teorem 3.2. ten

$$\zeta(G)\subsetneq \mathbb{N}p+1$$

ve

$$\zeta_h(G)\subsetneq \frac{1}{2}p(p-1)\,\mathbb{N}+p^2(h-1)+1$$

dir.

$\Gamma=\{p\}$ olduğunda

$$\begin{aligned} g&=\frac{1}{2}\sum_{n\in\Gamma}(n-1)n'x_n+d(h-1)+1\\ &=\frac{1}{2}(p-1)px_p+p^2(h-1)+1\\ &=\frac{1}{2}(p-1)(px_p-2(p+1))+p^2h\\ &=\frac{1}{2}(p-1)(p(x_p-2)-2)+p^2h \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $h=0$ ise bu taktirde $x_p\geq 3$ tür.

$$\zeta_0(G)=\frac{1}{2}(p-1)(p(\mathbb{N}+1)-2)$$

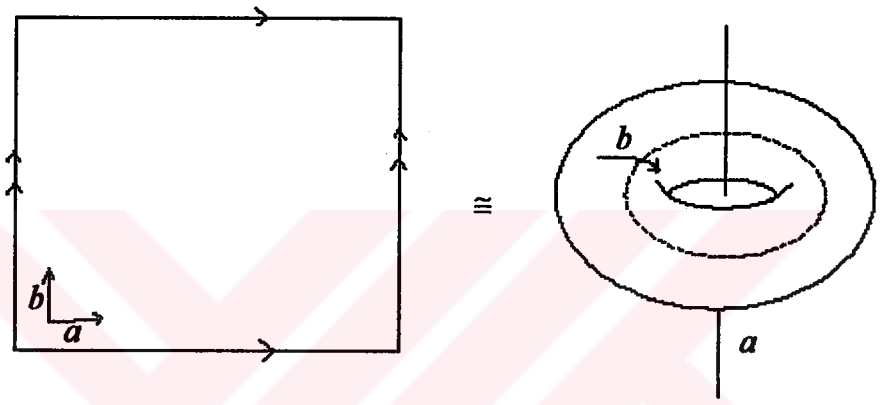
Eğer $h\geq 1$ ise $\zeta_h(G)=\{p^2h-p^2+1\}\cup\left(\frac{1}{2}(p-1)(p(\mathbb{N}+1)-2)+p^2h\right)$.

$x_p = 0$ koyalım, bu durumda $h \geq 1$ olup,

$$\mathcal{F}(C_p \times C_p) = 1 + p^2\mathbb{N} = \{1, 1+p^2, 1+2p^2, \ldots\}$$

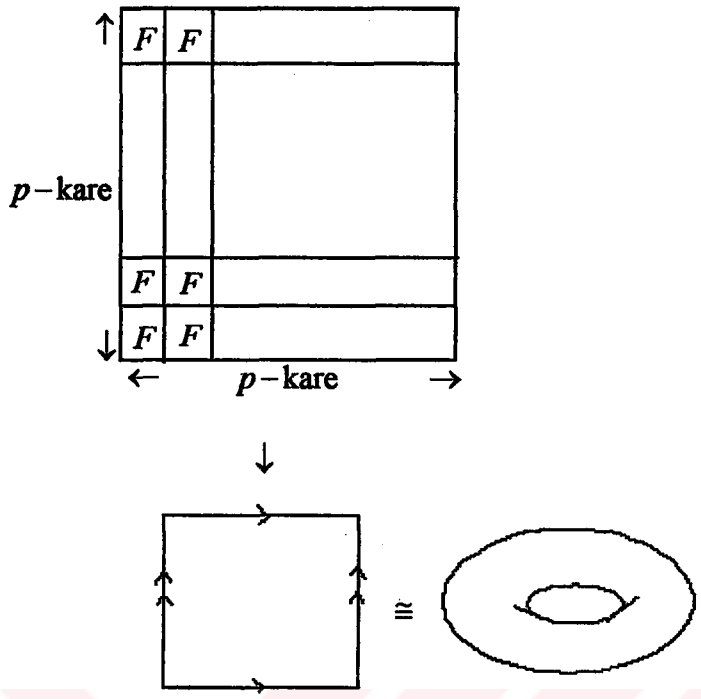
dır.

G, $\sum_1$ torusu (kare olarak alalım) üzerinde serbest etkir (Şekil 3.12).



Şekil 3.15

Bu bize p^2 tane kare verir. Bunların her biri $\sum_1$ üzerinde G için bir temel bölgedir.



Şekil 3.16

Şimdi $\sum_1$ e, p^2 tane $\sum_{h-1}$ in kopyasını her biri bir temel bölge üzerinde olacak şekilde eklersek

$$\tilde{\sum} \cong p^2 \sum_{h-1} \# \sum_1 \cong \sum_{1+p^2(h-1)}$$

olup, G bu $\tilde{\sum}$ üzerinde etkir öyle ki $\sum_{1+p^2(h-1)} / G \cong \sum_h$ dır.

Örnek 3.9. $G = A_4 = < x, y \mid x^3 = y^2 = (xy)^3 = 1 > = < x = (123), y = (12)(34) >$ olsun. Bu taktirde,

$$d = |G| = 12 = 2^2.3 \quad , \quad e = \exp(G) = 6$$

dır.

$$G_2 \cong V_4 \cong C_2 \times C_2 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

olup, $d=(G_2)=4$, $e(G_2)=2$ dir. Böylece G_2 dengeli değildir, dolayısıyla G dengeli değildir.

$\Pi=\{\ p\mid p$, 12 yi bölen bir asal $\}=\{\ 2,3\ \}$, ve dolayısıyla $\Pi-1=\{1,2\}$ dir.

$$M=\frac{d}{e}\ \text{ebob}\ (\Pi-1)=\frac{12}{6}.1=2,$$

$$J=J\ (A_4)=\frac{1}{2}M=\frac{1}{2}2=1,$$

$$K=K\ (A_4)=\frac{d}{2e}=\frac{12}{2.6}=1$$

dır. Böylece

$$\zeta_h\left(A_4\right)\subsetneq \mathbb{N}+12(h-1)+1=\mathbb{N}+12h-11$$

ve

$$\zeta(A_4)\subsetneq \mathbb{N}$$

dir.

$\Gamma=\{\ n>1\mid G$, n. mertebeden bir elemana sahiptir $\}=\{\ 2,3\}$ dır. Buradan

$$g=\frac{1}{2}\sum_{n\in\Gamma}(n-1)n'x_n+12(h-1)+1$$

den,

$$g=\frac{1}{2}6x_2+\frac{1}{2}2.4x_3+12(h-1)+1$$

$$g = 3x_2 + 4x_3 + 12(h-1) + 1$$

$$g = 3x_2 + 4x_3 + 12h - 11$$

bulunur.

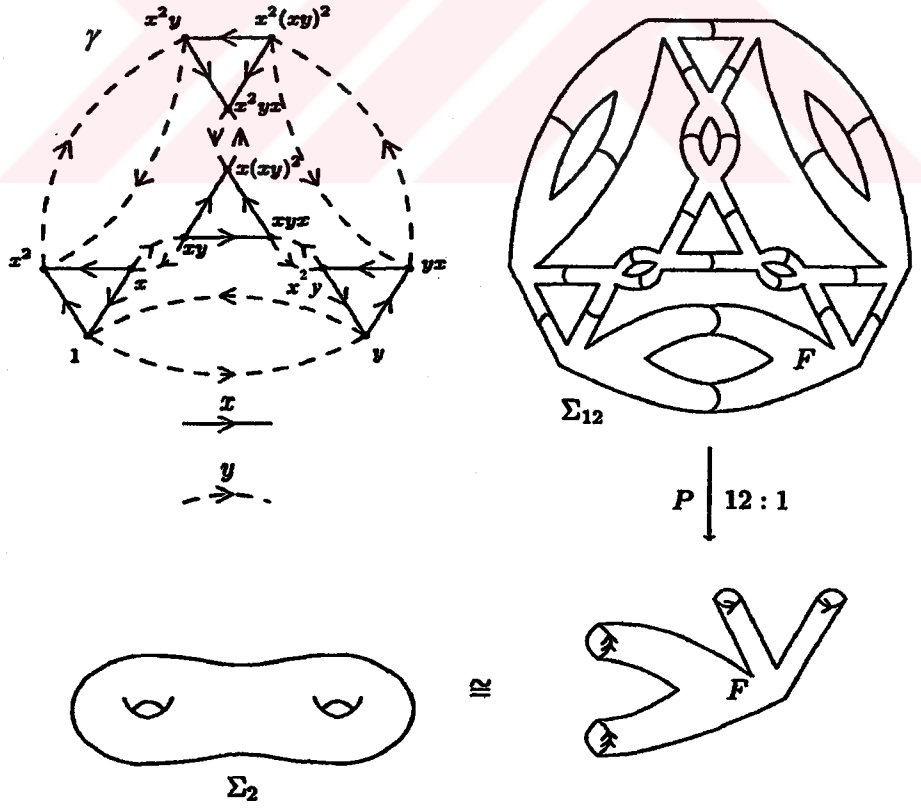
Şimdi, eğer $x_2 = x_3 = 0$ ise $h \geq 2$ dir. g_0 değerini bulmak için

$$g = 3x_2 + 4x_3 + 12h - 11$$

formülünden $h = 2$ yazılırsa $g_0 = 13$ olarak bulunur ve böylece

$$\mathcal{F}(A_4) = 13 + 12\mathbb{N}$$

dır. Yine, bu kümeyi A_4 ün Cayley grafiği yardımıyla elde edebiliriz.



Şekil 3.17

$G = A_4$ için γ Cayley grafiğini alalım. G, γ üzerinde etkir. Bu durumda $\tilde{\sum}$, genüsü 13 olan bir yüzeydir. $\tilde{\sum}$, γ nın bir kapalı tüp komşuluğunun sınırı olsun. F, bu yüzey üzerinde sınır eğrileri tanımlanmış G için bir temel bölge olsun. Her bir temel bölgeye genüsü $h-2$ olan $\sum_{h-2}$ eklersek genüsü $g = 1+12(h-2)$ olan yeni bir $\sum_{1+12(h-2)}$ yüzeyi elde ederiz. Böylece $\sum_2$ nin 12 yapraklı düzgün dallanmamış örtüsü elde edilir.

Örnek 3.10. $G = A_5 = < a,b \mid a^3 = b^2 = (ab)^5 = 1 >$ olsun. Bu durumda

$$d = |G| = 60 = 2^2.3.5,\ e = \exp(G) = [2,3,5] = 30$$

dur.

$d = |G_2| = 4$ ve $G_2 = \{ 1,(12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$ dir. $\exp(G_2) = 2$ ve $T^\sigma = \{1\}$ dir.

$\left| G_2 / T^\sigma \right| = 4$ olduğundan G_2 dengeli değildir. Dolayısıyla G dengeli değildir.

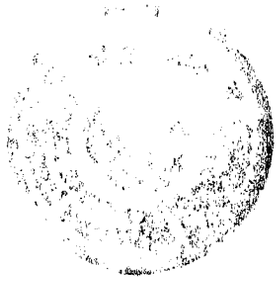
$\Pi = \{2,3,5\}$ ve $\Pi - 1 = \{1,2,4\}$ olduğundan,

$$M = \frac{d}{e}\text{ebob}\ (\Pi - 1) = \frac{60}{30}\text{ebob}(1,2,4) = 2,$$

$$J = J(A_5) = \frac{1}{2}M = 1,$$

$$K = K(A_5) = \frac{d}{2e} = 1$$

elde edilir.



$\Gamma = \{2,3,5\}$ olup,

$$g = \frac{1}{2}\sum_{n\in\Gamma}(n-1)n'x_n + d(h-1)+1$$

formülünden

$$g = \frac{1}{2}\left[30x_2 + 40x_3 + 48x_5\right] + 60(h-1)+1$$

$$g = 15x_2 + 20x_3 + 24x_5 + 60h - 59$$

elde edilir.

$\zeta(A_5)$, $g \equiv 1 \pmod 1$ kongrüansını sağlayan g lerden oluştuğuna göre $g = 1 + \mathbb{N}$ dir. Dolayısıyla,

$$\zeta(A_5) \subsetneq \mathbb{N}$$

dir.

$\zeta_h(A_5)$, $g \equiv d(h-1)+1 \pmod 1$ kongrüansını sağlayan g lerden oluştuğuna göre

$$\zeta_h(A_5) \subsetneq 60h - 59 + \mathbb{N}$$

elde edilir. Şimdi G nin serbest etkisine bakalım. $x_2, x_3, x_5 = 0$ için $h \geq 2$ olmalıdır. Bu durumda $h = 2$ için

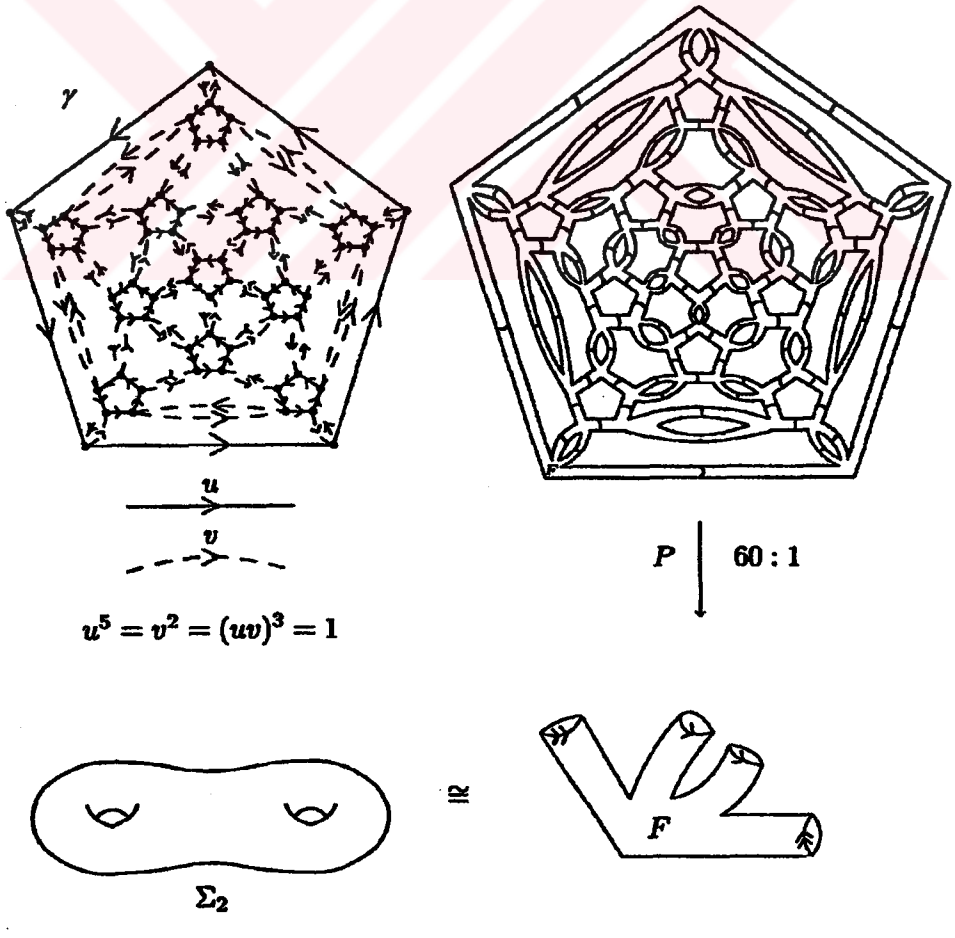
$$g_0 = 120 - 59 = 61$$

elde edilir. Böylece,

$$\mathcal{F}(A_5) = g_0 + d\mathbb{N} = 61+60\mathbb{N}$$

dır.

$G = A_5$ için γ Cayley grafiğini alalım. G, γ üzerinde etkir. $\tilde{\sum}$ γ nın kapalı tüp komşuluğunun sınırı olsun. F de bu yüzey üzerinde sınır eğrileri tanımlanmış temel bölgeyi göstersin. $\tilde{\sum}$ genüsü 61 olan bir yüzeydir ve G bu yüzey üzerinde etkir. $\sum_2$ nin 60 tabakalı düzgün dallanmamış örtüsü elde edilir. $\sum_{61}$ e her temel bölge üzerine bir tane olmak üzere $\sum_{h-2}$ nin 60 kopyasını eklersek bu taktirde $1+60(h-2)$ olan yeni bir $\sum_{1+60(h-2)}$ yüzeyi elde edilir.



Şekil 3.18

Örnek 3.11. $G = S_4 = < x, y \mid x^3 = y^2 = (xy)^4 = 1 > = < x = (123), y = (12) >$ grubunu göz önüne alalım.

$$d = |G| = 4! = 24 = 2^3.3,$$

$$e = \exp(S_4) = [2,3,4] = 12,$$

ve

$$|G_2| = 2^3 = 8$$

dır. $G_2 \cong D_4$ dir. D_4 dengeli olmadığından, G dengeli değildir.

$$|D_4| = 8 = < x, y \mid x^4 = y^2 = (xy)^2 = 1 >$$

$$D_4 = \{ 1, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y \}$$

dir.

$$e = \exp(D_4) = 4 \ , |G_2| = 8.$$

$$T^{\sigma} = \{ 1, x^2, y, xy, x^2y, x^3y \}$$

grup oluşturmaz.

$$\Pi = \{2,3\} \Rightarrow \Pi - 1 = \{ 1,2 \}$$

$$M = \frac{d}{e} \text{ebob } (\Pi - 1) = 2$$

$$J = \frac{1}{2} M = 1,$$

ve

$$K = \frac{d}{2e} = 1$$

dır.

$\Gamma = \{2,3,4\}$ olduğundan

$$g = \frac{1}{2}\sum_{n\in\Gamma}(n-1)n' x_n + d(h-1)+1$$

formülünden

$$g = \frac{1}{2}\left[12x_2 + 2.8x_3 + 3.6x_4\right] + 24(h-1)+1$$

$$g = 6x_2 + 8x_3 + 24x_4 + 24h - 23$$

elde edilir.

$\zeta(S_4)$, $g \equiv 1 \pmod 2$ kongrüansını sağlayan g lerden oluştuğundan $g = 1 + 2\mathbb{N}$ dir.
Dolayısıyla,

$$\zeta(S_4) \subsetneq \mathbb{N}$$

dir.

$\zeta_h(S_4)$, $g \equiv d(h-1)+1 \pmod 2$ kongrüansını sağlayan g lerden oluşacağından

$$\zeta_h(S_4) \subsetneq 24h - 23 + 2\mathbb{N}$$

dır.

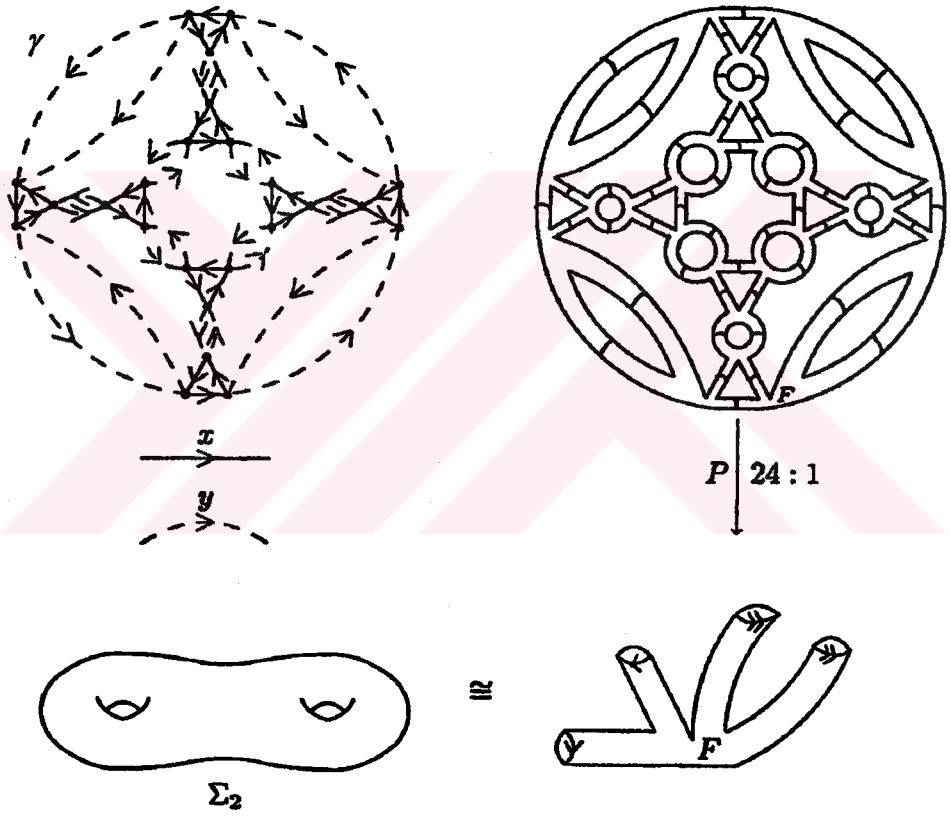
Şimdi, $x_2, x_3, x_4 = 0$ ise $h \geq 2$ olmalıdır. $h = 2$ için

$$g_0 = 48-23 = 25$$

bulunur. Buradan,

$$\mathcal{F}(S_4) = 25+24\mathbb{N}$$

elde edilir. Bu küme G nin Cayley grafiğinden elde edilebilir. Aşağıdaki şekil (şekil 3.19) bu durumu açıklar.



Şekil 3.19

$G = S_4$ için γ Cayley grafiğini alalım. G, γ üzerinde etkir. $\bar{\sum}$ genüsü 25 olan bir yüzeydir ve $\bar{\sum}$, γ nın bir kapalı tüp komşuluğunun sınırını göstersin. F de bu yüzey

üzerinde sınır eğrileri tanımlanmış temel bölge olsun. Her bir F temel bölgeye bir tane olmak üzere genüsü $h-2$ olan $\sum_{h-2}$ yüzeyini eklersek genüsü $g=1+24(h-2)$ olan $\sum_{1+24(h-2)}$ yüzeyini elde ederiz. Böylece $\sum_{1+24(h-1)} / S_4 \cong \sum_4$ dür.

3.9. Cümleler Arasındaki Bağıntılar: Teorem 3.1, $\zeta(G)$ ve $\mathcal{F}(G)$ de olduğu gibi her bir $\zeta_h(G)$ cümlesinin periyodik olduğunu gösterir. Verilen bir G grubu için $\zeta_h(G)$ cümleleri h parametresine göre periyodikliğin zayıf bir şeklini sergiler.

Lemma 3.3. Yeteri derecede büyük bütün h lar için

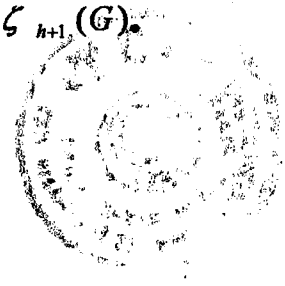
$$\zeta_{h+1}(G) = \zeta_h(G)+d$$

dir.

İspat. $h_1 \in \mathbb{N}$ elemanı vardır öyle ki eğer $h \geq h_1$ ise, bu taktirde G' komutatör (türev) grubunun her c elemanı, $a_1,b_1,\ldots,a_h,b_h$ G yi üretmek üzere $c=\prod_{i=1}^{h}[a_i,b_i]$ formundadır. Örneğin; $h_1=k+l$ alabiliriz, burada $k=\left[\!\left[\frac{1}{2}\operatorname{rank} G\right]\!\right]$ (böylece $a_1,b_1,\ldots,a_k,b_k$ elemanlarını G yi üretecek şekilde seçilebilir) ve l yeteri derecede büyük alabiliriz öyle ki G' nün her elemanı l komutatörlerinin bir çarpımıdır (böylece $a_{k+1},b_{k+1},\ldots,a_h,b_h$ elemanlarını $c=\Pi[a_i,b_i]$ yi sağlayacak şekilde seçebiliriz).

Buradan, eğer $h \geq h_1$ ise, bu taktirde G nin $(h;x)$ simgesi ile bir Hurwitz cümlesine sahip olması için gerek ve yeter şart $(h+1;x)$ simgeli bir Hurwitz cümlesinin olmasıdır: Gerçekten $a_{h+1}=b_{h+1}=1$ tanımlamakla genüsü artırabiliriz ve h komutatörlerinin bir çarpımı olarak $\prod_{i=1}^{h+1}[a_i,b_i]$ yeniden yazmakla da genüsü azaltabiliriz. x değişmeden kaldığından, bu dönüşümler d ile (2.3.2) deki g genüsünü, ya azaltır ya da artırır, böylece sonuç Hurwitz Teoreminden elde edilir.□

Uyarı 3.4. Aslında bu argümanın "artan" kısmı her $h \in \mathbb{N}$ için $\zeta_h(G)+d \subseteq \zeta_{h+1}(G)$ olduğunu gösterir.



Lemma 3.4. Eğer $n \in \Gamma$ ise, bu taktirde

$$\zeta_h(G)+(n-1)n' \subseteq \zeta_h(G)$$

dir.

İspat. G için bir Hurwitz cümlesine n nci mertebeden $c_{i,n}$ elemanlarının bir ekstra c, c^{-1} çiftini ekleyerek, $(n-1)n'$ ile değişmeyen h ve artan g ile başka bir Hurwitz cümlesi elde ederiz, buradan Hurwitz Teoremi sonucu verir.□

Sonuç 3.1. Eğer $n \in \Gamma$ ise, yeteri derecede büyük bütün h lar için,

$$\zeta_{h+n-1}(G) \subseteq \zeta_h(G)$$

dir.

İspat. Eğer Lemma 3.3 ve 3.4 sırasıyla $n-1$ ve n kez yinelenirse,

$$\zeta_{h+n-1}(G) = \zeta_h(G)+(n-1)d \subseteq \zeta_h(G)$$

yi elde ederiz.□

Sonuç 3.2. Eğer G nin mertebesi çift ise, bu taktirde yeteri derecede büyük bütün h lar için,

$$\zeta_{h+1}(G) \subseteq \zeta_h(G)$$

dir.□

Bu bölümdeki örnekler bu sonuçları gösterir: Örneğin, C_2, C_p ve C_{2p}, her $h \geq 1$ Lemma 3.3 ü sağlar (fakat $h = 0$ sağlamaz), bununla birlikte, D_p her $h \geq 2$ için onu sağlar (fakat $h \leq 1$ sağlamaz). Benzer şekilde, C_2 ve D_p her $h \geq 0$ için Sonuç 3.2 yi sağlar, bununla birlikte C_{2p} her $h \geq 1$ için onu sağlar (fakat $h = 0$ sağlamaz).

KAYNAKLAR

[1] M.A.Armstrong, Basic Topology, Springer – Verlag, New York, (1983).

[2] W.Fulton, Algebraic Topology, Springer – Verlag, New York, (1995), A First Course.

[3] D.Gorenstein, Finite Groups, *Chelsea Publishing Company*, New York, (1980), Second Edition.

[4] Fraleigh, A First Course in Algebra, *Addison-Wesley*, New York, Amsterdam (1999)

[5] P.Hall, The Eulerian Function of a Group, *Quarterely J.Math.*, Oxford 7 (1936), 134 - 151.

[6] G.A.Jones, Symmetries of Surfaces, *Math. Scond.*, to appear (1992).

[7] G.A.Jones and D.Singerman, Complex Functions, *Cambridge University Press,* (1987).

[8] M.Kazaz, Regular Coverings and Cayley Graph, to appear in.

[9] R.S. Kulkarni, Symmetries of Surfaces, to appear in (1986).

[10] W.S.Massey, A Basic Course in Algebraic Toplogy, *Springer – Verlag*, New York, (1991).

[11] J.J.Rotman, An Introduction to the Theory of Groups, *Springer – Verlag*, New York / Berlin, (1995), Fourth Edition.

[12] H.J.Zassenhause, The Theory of Groups, *Chelsea Publishing Company*, New York, (1958).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Derya DOĞAN

Doğum Yeri : Kayseri

Doğum Tarihi : 22.08.1979

Eğitimi

1990, İlkokul, Cemil Midilli İlkokulu, İzmir.

1993, Ortaokul, Emlak Bankası Orta Okulu, İzmir.

1996, Lise, Atakent Lisesi, İzmir.

2001, Lisans, Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Manisa.

Yürütülen Görevler : Aralık 2001'de Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başlayan Derya DOĞAN halen bu görevde çalışmaya devam etmektedir.