CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖRTÜ UZAYLARI VE DÜZGÜN ÖRTÜ UZAYLARININ SAYILMASI

121497

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Arş.Gör.Tuğba GÜROĞLU

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Cebir ve Sayılar Teorisi

121497

MANİSA - 2002

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖRTÜ UZAYLARI VE DÜZGÜN ÖRTÜ UZAYLARININ SAYILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Arş.Gör. Tuğba GÜROĞLU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 03 Eylül 2002

Tezin Savunulduğu Tarih : 19 Eylül 2002

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr.Mustafa KAZAZ
Diğer Jüri Üyeleri : Doç.Dr.H.Hüseyin UĞURLU
Yrd.Doç.Dr.Sinan ÇEVİK

MANİSA - 2002

ÖZET

Bu tezde, yüzeylerin düzgün örtülerinin teorisi cebirsel olarak incelendi, özellikle verilen sonlu bir G örtü grubu ile cinsi g olan kompakt, bağlantılı ve yönlendirilebilir (yönlendirilemeyen ve delikli) bir yüzeyin denk olmayan düzgün örtülerinin sayısını hesapladık. Düzgün örtü yüzeylerinin sınıflandırılması ile ilgili ana teorem [3,15,16,19], " cinsi g olan $r \geq 0$ delikli bir kompakt, bağlantılı, yönlendirilebilir (veya yönlendirilemeyen) $\sum_{g,r}$ (veya $\sum_{g,r}^{-}$) yüzeyinin $\Pi_{g,r}$ (veya $\Pi_{g,r}^{-}$) temel grubunun N normal alt gruplarının $\sum_{g,r}$ (veya $\sum_{g,r}^{-}$) nin düzgün örtülerinin denklik sınıfları ile bire bir eşlendiğini " ifade eder.

Bu teoreme göre, verilen sonlu bir G örtü grubu ile bir kompakt, bağlantılı yüzeyin düzgün örtülerinin sayısını belirleyen topolojik problem, bu eşleme altında bu yüzeyin temel grubunun normal alt gruplarının sayısını belirleyen cebirsel probleme indirgenir.

Amaç, yüzeylerin düzgün örtülerini incelemek ve bu cebirsel problemleri çözmek için Philip Hall'ün Möbius Inversion Formülünün cebirsel versiyonunu, gösterim teorisini ve karakter teoriyi kullanarak sonlu grup teorideki teknikleri uygulamaktır.

Abstract

In this thesis the theory of regular coverings of surfaces is algebraically investigated, in particular we determine the number of non-equivalent regular coverings of a compact, connetted orientable (non-orientable and punctured) surface of genus g with a given finite coverings groups G. The main theorem concerning classification of regular covering surfaces stated that [3,15,16,19,] " the normal subgroup N of the fundamental group $\prod_{g,r}$ (or $\prod_{g,r}^{-}$) of a compact, connected orientable (or non-orientable) surface $\sum_{g,r}$ (or $\sum_{g,r}^{-}$) of genus g with $r \geq 0$ punctures are in one-to-one correspondence with the equivalent classes of regular coverings of $\sum_{g,r}$ (or $\sum_{g,r}^{-}$) ".

By means of this theorem, the topological problem of determining the number of regular coverings of a compact, connected surface with a given finite covering group G is reduced completely to the algebraic problem of determining the number of normal subgroup of the fundamental group of this surface under this correspondence.

The aim is to apply techniques from finite group theory such as character theory, representation theory and Philip Hall's algebraic version of the Möbius Inversion Formula to solve this algebraic problem and to study regular coverings of surfaces.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşmasında, planlanmasında ve düzenli bir şekilde yürütülmesinde olumlu ve yapıcı eleştirileriyle bana yol gösteren, karşılaştığım güçlüklerde yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Yrd.Doç.Dr.Mustafa KAZAZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışma boyunca manevi desteklerini her zaman hissettiğim ve bugünlere gelmeme yardımcı olan aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

sayfa

Özet.....i
Abstract.....ii
Teşekkür.....iii
İçindekiler.....iv
Sembol Listesi.....v
Şekil Listesi.....vi
Çizelge Listesi.....vii

Giriş..... 1

I. BÖLÜM : Temel Kavramlar

1.1 Sonlu Grup Teoride Bazı Temel Kavramlar.....3
1.2 Bir Grubun Möbius Fonksiyonu.....9
1.3 Yüzeylerin Temel Grupları ve Yüzeylerin Sınıflandırılması.....13

II. BÖLÜM : Grup Karakterleri ile Denklemlerin Çözümlerinin Sayısının Bulunması

2.1 Sonlu Grup Gösterimleri.....24
2.2 Sonlu Grup Karakterleri.....32
2.3 Grup Karakterleri İle Denklemlerin Çözümlerinin Sayısının Bulunması..38

III. BÖLÜM : Örtü Uzayları ve Örtü Uzaylarının Sayılması

3.1 Örtü Uzaylarının Tanımı ve Bazı Örnekler.....68
3.2 Düzgün Örtü Uzayları ve Bölüm Uzayları.....89
3.3 Epimorfizmlerin ve Düzgün Yüzey Örtülerinin Sayılması.....98

Kaynaklar.....130
Özgeçmiş.....131

SEMBOL LİSTESİ

S^1 : Birim Çember

$\mathbb{R}^2$: Öklid Uzayı

$|G|$: G Grubunun Mertebesi

$\vartheta(x)$: x'in Yörüngesi

G_x : x'in Dengeleyeni

x^G : x'in Eşlenik Sınıfı

μ : Möbius Fonksiyonu

$\prod(X, x_0)$: x_0 Noktasındaki Temel Grup

g : Cins (genus)

K : Euler Karakteristiği

$\sum_g$: g Cinsli, Kompakt, Bağlantılı Yönlendirilebilir Yüzey

$\sum_g^-$: g Cinsli, Kompakt, Bağlantılı Yönlendirilemeyen Yüzey

ρ : Bir Grubun Gösterimi

χ : Bir Gösterimin Karakteri

$\sigma_g(G)$: Homomorfizmaların Sayısı

$\phi_g(G)$: Epimorfizmaların Sayısı

$n_g(G)$: Çekirdeklerin Sayısı

$Aut(G)$: G'nin Otomorfizmalarının Grubu

δ : Lebesque Sayısı

$[\alpha]$: Yol Sınıfı

$(\tilde{X}, p)$: Örtü Uzayı

$\tilde{\varphi}$: Taşınmış Yol

f_* : İndüklenmiş Homomorfizma

p_* : Temel Gruptan Temel Gruba İndüklenmiş Homomorfizma

Γ : Cayley Grafiği

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil Sayfa

Şekil 1.3.1....14
Şekil 1.3.2....17
Şekil 1.3.3....18
Şekil 1.3.4....18
Şekil 3.1.1....72
Şekil 3.3.1....104
Şekil 3.3.2....107
Şekil 3.3.3....110
Şekil 3.3.4....111
Şekil 3.3.5....114
Şekil 3.3.6....116
Şekil 3.3.7....119
Şekil 3.3.8....121

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

ÇİZELGE LİSTESİ

Tablo Sayfa

Tablo 2.3.1.....50

Tablo 3.3.1.....106

Tablo 3.3.2.....108

Tablo 3.3.3.....113

Tablo 3.3.4.....115

Tablo 3.3.5.....118

Tablo 3.3.6.....120

GİRİŞ

Bu çalışmada, verilen bir sonlu G örtü grubu ile bir kompakt, bağlantılı yüzeyin düzgün örtülerinin sayısının bulunması problemi incelenmiştir. Sonlu grup teoriden karakter teorik teknikler ve Möbius Ters Çevirme formülünün P.Hall'un grup teorik genelleştirmesi birlikte kullanılarak yüzeylerin örtülerinin sayısı çalışılmıştır.

Birinci bölümde, sonlu grup teori, bir grubun alt grupları latisi üzerinde Möbius Fonksiyonu ve P.Hall'un metodu, bir yüzeyin temel grubu ve kompakt yüzeylerin sınıflandırılması ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde, sonlu grup gösterimleri ve karakterleri verilerek, karakter teorik tekniklerin sonlu bir G grubunda bir denklemin çözümlerinin sayısının bulunmasında nasıl kullanılacağı tartışılmıştır. [11] de Jones, bu teknikleri kullanarak cinsi g olan bir kompakt, bağlantılı, yönlendirilebilir $\sum_g$ yüzeyinin $\prod_g$ temel grubunun belirleyici bağıntısına karşılık gelen denklemin sonlu bir G grubunda çözümlerin $\sigma_g(G)$ sayısını veren formülü vermiştir. Benzer formüller, $\sum_g^-$ (yönlendirilemeyen), $\sum_{g,r}$ ($r>0$ delikli yönlendirilebilir) ve $\sum_{g,r}^-$ ($r>0$ delikli yönlendirilemeyen) yüzeylerine karşılık gelen temel gruplar için de verilmiştir. Bu $\sigma_g(G)$ çözümlerinin sayısı $\prod_g$ den G ye homomorfilerin $\sigma_g(G)=\left|Hom(\prod_g,G)\right|$ sayısını verir. Bu sayı bir çok sonlu G grubu için bulunmuştur.

Üçüncü bölümde ise, genel örtü uzayları teorisi incelenmiş ve bir çok örtü uzayı örneği verilmiştir. Özellikle, örtü uzaylarının önemli bir sınıfını oluşturan düzgün örtü uzayları ele alınmıştır. $\prod_g$ nin N normal alt grupları ile $\sum_g$ nin düzgün dallanmamış örtülerinin denklik sınıfları arasında bire bir karşılık getirme vardır. Bu normal alt gruplar, $\prod_g$ den G ye epimorfilerin çekirdeklerine karşılık gelir. Möbius Ters Çevirme Formülünün P.Hall cebirsel versiyonu kullanılarak, homomorfilerin $\sigma_g(G)$ sayısından epimorfilerin $\phi_g(G)=\left|Epi(\prod_g,G)\right|$ sayısı elde edilmiştir. Diğer taraftan herhangi iki $\theta_1,\theta_2\in Epi(\prod_g,G)$ epimorfisi aynı $N\lhd\prod_g$ çekirdeğine sahiptir ancak ve ancak G'nin bir α otomorfisi için $\theta_2=\theta_1\alpha$ dır. Böylece farklı çekirdeklerin

$n_g(G) = \left| \{ N \lhd \Pi_g \mid \Pi_g / N \cong G \} \right|$ sayısı, $Epi(\Pi_g, G)$ kümesi üzerinde bileşke ile etki eden G'nin $Aut(G)$ otomorfizm grubunun yörüngelerinin $\left| Epi(\Pi_g, G) / Aut(G) \right|$ sayısına eşittir. $Aut(G)$, epimorfileri sabit noktasız değiştirdiğinden her yörüngenin uzunluğu $\left| Aut(G) \right|$ dir, böylece $n_g(G) = \dfrac{\phi_g(G)}{\left| Aut(G) \right|}$ elde edilir. Yukarıdaki yöntem diğer yüzeyler içinde verilir. Bu yöntem bir çok sonlu G grubuna uygulanmıştır. Bu teknikler [10] da yansımasız NEC (Non-Euclidean Crystallographic Groups) grupların normal alt grupların veya denk olarak sınırsız $2-$boyutlu orbifoldların düzgün örtülerinin sayılmasına genişletilebilir.

I. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışma ile ilgili temel kavramlar özet olarak üç kısımda verilmiştir.

1.1 Sonlu Grup Teoride Bazı Temel Kavramlar

Bu kısımda, gösterim teorisinin ve karakter teorinin yanı sıra bir yüzeyin ve onun örtü yüzeyinin temel gruplarının incelenmesinde karşımıza çıkan bazı sonlu grup teorik kavramlar verilmiştir.

Tanım 1.1.1 : Bir $G \neq \varnothing$ kümesinde tanımlanmış bir $(a,b) \mapsto ab$ ikili işlemi aşağıdaki şartları gerçekliyorsa, G'ye bir ***grup*** denir.

1) Her $a,b,c \in G$ için

$$(ab)c = a(bc)$$

verilir.

2) Her $a \in G$ için

$$ea = ae = a$$

olacak şekilde bir $e \in G$ elemanı vardır. e elemanına G'nin ***birim elemanı*** denir.

3) Her $a \in G$ elemanına karşılık

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e$$

olacak şekilde bir $a^{-1} \in G$ elemanı vardır. a^{-1} elemanına a'nın ***tersi*** denir.

Sonlu sayıda elemanı bulunan bir gruba ***sonlu grup***, sonlu olmayan gruba da ***sonsuz grup*** denir. Bir G grubunun eleman sayısına onun ***mertebesi*** denir ve $|G|$ ile gösterilir.

G bir grup olsun. Her $a,b \in G$ ikilisi için $ab = ba$ ise G'ye ***değişmeli*** veya ***abel***

grubu denir.

Tanım 1.1.2 : G bir grup ve $\varnothing \neq H \subseteq G$ bir alt küme olsun. H, G'de tanımlanan ikili işleme göre bizzat bir grup ise H'a G'nin bir ***alt grubu*** denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.3 : G bir grup ve $\varnothing \neq A \subseteq G$ olsun. G grubunun A'yı içeren bütün alt gruplarının ailesinin arakesitini $< A >$ ile gösterelim. Bu taktirde $< A >$, G'nin bir alt grubudur. Bu alt grup A'yı içeren en küçük alt gruptur ve A tarafından üretilen alt grup olarak adlandırılır. Eğer $A = \{ x \}$ şeklinde bir elemanlı bir küme ise bu taktirde $< A >$ yerine $< x >$ yazılır. $< x >$'e G'nin bir ***devirli alt grubu*** denir. Eğer G grubunun kendisi bir x elemanı tarafından üretiliyorsa G'ye bir ***devirli grup*** denir.

$G = < x >$ bir devirli grup olsun. Bu taktirde

$$G = < x > = \{ x^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

olduğunu göstermek kolaydır. Ayrıca $G = < x >$ devirli grubu daima değişmelidir.

Teorem 1.1.1 : Eğer $G = <g>$ devirli bir grup ise bu taktirde G'nin her alt grubu da devirlidir. Üstelik, eğer G mertebesi n olan sonlu bir grup ise bu taktirde n'nin her pozitif m böleni için mertebesi m olan tek bir alt grubu vardır. Bu alt grup $<g^{n/m}>$ dir. Bunlar G'nin bütün alt gruplarıdır [16].

Tanım 1.1.4 : G bir grup, $H \leq G$ ve $g \in G$ olsun. Bu taktirde

$$Hg = \{ hg \mid h \in H \}$$

kümesine H'ın G'de bir ***sağ-yan sınıfı*** denir. H'ın G'deki bütün sağ-yan sınıflarının kolleksiyonu G / H ile gösterilir:

$$G / H = \{ Hg \mid g \in G \}.$$

H'ın G'deki herhangi iki sağ yan-sınıfı aynı sayıda elemana sahiptir. Ayrıca farklı sağ-yan sınıflar ayrık olduğundan

$$|G| = |G/H|.|H|$$

elde edilir, böylece $|H|$, $|G|$'yi böler. $|G/H|$'a H'ın G'deki ***indeksi*** denir.

Tanım 1.1.5 : G bir grup ve N'de G'nin bir alt grubu olsun. Eğer her $g \in G$ için $Ng = gN$ ise N'ye G'nin ***normal alt grubu*** denir ve N'nin G'nin normal alt grubu olduğunu göstermek için $N \lhd G$ yazılır.

Tanım 1.1.6 : N, G'nin bir normal alt grubu olsun. $NgNh = Ngh$ çarpımı ile G/N bir gruptur. Bu gruba N ile G'nin ***bölüm*** (faktör) ***grubu*** denir.

Tanım 1.1.7 : G_1 ve G_2 iki grup ve $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ bir dönüşüm olsun. Her $g_1, g_2 \in G_1$ için

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\,\varphi(g_2)$$

ise φ'ye G_1'den G_2'ye bir ***homomorfizm*** denir.

$\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ bir homomorfi olsun. Bu taktirde $\varphi^{-1}(e_{G_2}) = \{\, g \in G_1 \mid \varphi(g) = e_{G_2} \,\}$ kümesi G_1'in bir alt grubudur. Buna φ homomorfisinin ***çekirdeği*** denir ve $Çek\,\varphi$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.8 : Örten bir φ homomorfisine bir ***epimorfizm*** ve 1-1 bir φ homomorfisine de bir ***monomorfizm*** denir. Örten ve 1-1 bir φ homomorfisine bir ***izomorfizm*** denir. Eğer G_1 ve G_2 grupları arasında bir izomorfizma varsa bu gruplara ***izomorfiktir*** denir ve $G_1 \cong G_2$ yazılır. Bir G grubunun kendi üzerine bir izomorfizmasına bir ***otomorfizma*** denir. G'nin bütün otomorfizmalarının kümesi $Aut(G)$ ile gösterilir. $Aut(G)$ bileşke işlemi altında bir gruptur.

Teorem 1.1.2 : $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ bir örten homomorfizma olsun. Bu taktirde

i) $Çek\varphi = N \lhd G_1$

ii) $G_1 / N \cong G_2$ [16].

Teorem 1.1.3 (Karşılık Getirme Teoremi) : N, G'nin bir normal alt grubu ve S^* da $G^* = G / N$ nin bir alt grubu olsun. Bu taktirde

i) $S^* = S / N$ olacak şekilde bir tek $N \subset S \subset G$ alt grubu vardır.

ii) Eğer S^*, G^* ın bir normal alt grubu ise bu taktirde S'de G'de normaldir.

iii) $\left| G^* : S^* \right| = \left| G : S \right|$

iv) Eğer T^*, S^* da normal ise bu taktirde T, S'de normaldir ve $S^* / T^* \cong S / T$ dir [16].

Tanım 1.1.9 : G bir grup ve $x, y \in G$ olsun.

$$y = g^{-1} x g$$

olacak şekilde bir $g \in G$ elemanı varsa y, x'e ***eşleniktir*** denir.

G'de x'e eşlenik olan bütün elemanların kümesi

$$x^G = \{ g^{-1} x g : g \in G \}$$

ile verilir ve buna G'de x'in ***eşlenik sınıfı*** denir.

Teorem 1.1.4 : Her grup eşlenik sınıfların bir birleşimidir ve farklı eşlenik sınıfları ayrıktır [16].

Tanım 1.1.10 : G bir grup ve X bir küme olsun. X üzerinde G'nin bir etkisi $(g, x) \mapsto gx$ ile tanımlanan ve aşağıdaki şartları sağlayan bir $G \times X \longrightarrow X$ dönüşümüdür:

i) Her $x \in X$ için $ex = x$

ii) Her $x \in X$ ve her $g, h \in G$ için $(gh)x = g(hx)$

Bu şartlar altında X kümesine bir $G-$***küme*** adı verilir. Eğer X üzerinde G'nin bir etkisi varsa, bu durumda G'ye X üzerinde ***etkir*** denir.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Tanım 1.1.11 : Eğer G, X üzerinde etkir ve $x \in X$ ise bu taktirde x'in ***yörüngesi*** (orbit)

$$\vartheta(x) = \{ gx \mid g \in G \} \subset X$$

kümesidir.

x'in ***dengeleyeni*** (stabilizer) ise,

$$G_x = \{ g \in G \mid gx = x \} \subset G$$

alt grubudur.

Eğer her $x, y \in X$ ikilisi için

$$gx = y$$

olacak şekilde bir $g \in G$ varsa, G grubuna X üzerinde ***geçişmeli*** (transitively) ***olarak etkir*** denir. Bu durumda $\vartheta(x) = X$ dir.

Tanım 1.1.12 : G bir grup ve $x, y \in G$ olsun. x ve y'nin komütatörü ile $[x,y] = x^{-1} y^{-1} xy$ anlaşılır. Komütatörlerin kümesi ile üretilen alt grup komütatörlerin bütün sonlu çarpımlarını içerir. Bu alt gruba ***komütatör grubu*** denir ve G' ile gösterilir.

$x \in G'$ olsun. $x = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ yazalım. Bu taktirde $g^{-1} x g = \prod_{i=1}^{n} [\, g^{-1} a_i g \,,\, g^{-1} b_i g \,]$ dir ve böylece $g^{-1} x g \in G'$ olur. Bu ise G''nün G'nin bir normal alt grubu olduğunu söyler. Şimdi G / G' bölüm grubunu göz önüne alalım. Bu taktirde bu bölüm grubu değişmelidir. Gerçekten $[a\,,\,b] \in G'$ olduğundan $[a\,,\,b]G' = G'$ dır ve böylece

$$xG'\,yG' = xyG' = xy[y\,,\,x]G' = yxG' = yG'\,xG'$$

olur.

Teorem 1.1.5 : Eğer $N \lhd G$ ise bu taktirde G/N değişmelidir ancak ve ancak $G' \leq N$ dir [16].

Bir G grubunun $R_j(X_i)$ $(j \in J)$ bağıntılarını sağlayan X_i $(i \in I)$ elemanları tarafından üretildiğini farz edelim (burada I ve J indis kümeleri ve $R_j(X_i)$, X_i üreteçleri ile bir kelimedir, yani $R_j(X_i)$, X_i üreteçlerinin sonlu çoklukta (pozitif veya negatif) kuvvetlerin bir çarpımıdır). $R_j(X_i) = 1$ bağıntılarına G için ***belirleyici bağıntılar*** (defining relations) denir. Eğer G deki her bağıntı sadece grup aksiyomlarını kullanarak belirleyici bağıntılar tarafından elde edilirse bu durumda G'ye bir sunuma sahip olduğu söylenir ve bu durum

$$G = < X_i \ \ (i \in I) \mid R_j(X_i) = 1 \ \ (j \in J) >$$

ile gösterilir. Eğer I sonlu ise G'ye ***sonlu üretenlidir*** denir.

G bir grup ve üreteçlerin kümesi de X olsun. Eğer üreteçler arasında belirleyici bir bağıntı mevcut değil ise G grubuna ***serbesttir*** (free) denir. Örneğin; $\mathbb{Z}$ bir serbest gruptur. X'in kardinalitesine de G'nin ***rankı*** denir. Bir serbest grubun her alt grubunun da yine bir serbest grup olduğu açıktır [9].

Teorem 1.1.6 : Eğer $G = < X_i \mid R_j(X_i),\ (i \in I, j \in J) >$ ve H'da herhangi bir grup ise bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:

i) Bir $\theta : G \longrightarrow H$ epimorfizmi vardır.

ii) $G/N \cong H$ ile bir $N \lhd G$ normal alt grubu vardır

iii) $H, R_j(x_i)$ $(\forall j \in J)$ bağıntılarını sağlayan x_i $(i \in I)$ elemanları tarafından üretilir [12].

Tanım 1.1.13 : G bir grup ve p bir asal sayı olsun. Eğer G'nin mertebesi p'nin bir kuvveti şeklinde ise G'ye bir ***p-grup*** denir.

Bir G grubunun bir H alt grubunun mertebesi bir p asal sayısının kuvveti şeklinde ise H'a G'nin bir ***p-alt grubu*** denir.

Şimdi $|G| = p^n m$, $(p,m) = 1$ olsun. G'nin bir H alt grubunun mertebesi tam olarak p^n ise bu taktirde H'a G'nin bir ***Sylow p-alt grubu*** denir.

Teorem 1.1.7 : G sonlu bir grup olsun. Bu taktirde,

i) G bir Sylow p-alt grubuna sahiptir.

ii) Herhangi iki Sylow p-alt grup G'de eşleniktir.

iii) G'nin her p-alt grubu G'nin bir Sylow p-alt grubunda içerilir [4].

1.2 Bir Grubun Möbius Fonksiyonu

Bu kısımda, sayılar teorisinden iyi bilinen $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde verilen Möbius Fonksiyonu, sonlu bir grubun alt gruplarının latisi üzerine taşınmıştır. Ayrıca $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde verilen Möbius İnversion Formülünün karşılığı verilmiştir. Son olarak da, 1936 da P.Hall [5] tarafından verilen ve yakın zamana kadar önemi anlaşılamayan ve daha sonra adına Philip Hall metodu denilen bir metot açıklanmıştır. Bu metot, sonlu üretilenli bir gruptan sonlu bir gruba olan bütün homomorfilerin sayısından epimorfilerin sayısını bulmak için kullanılır.

Tanım 1.2.1 : $n \in \mathbb{Z}^+$ için Möbius μ Fonksiyonu,

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & , \ n = 1 \\ (-1)^l & , \ n = p_1 p_2 \ldots p_l \quad (p_1,\ldots,p_l \ farklı \ asallar) \\ 0 & , \ diğer \ durumda \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Eğer $n > 1$ ise bu taktirde tanımda

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0$$

bağıntısı elde edilir.

Teorem 1.2.1 (Möbius İnversion Formülü) : Her pozitif n tamsayısı için

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

olsun. Bu taktirde

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F(n/d)$$

dir [7].

Şimdi bir G grubunun alt grup latisi üzerinde Möbius fonksiyonunu tanımlayalım.

Tanım 1.2.2 : G sonlu üretilenli bir grup ve $S = \{ H \mid H \leq G \text{ ve } |G:H| < \infty \}$ olsun. Bu taktirde G'nin alt grup latisi ile ilgili $\mu : S \longrightarrow \mathbb{Z}$ Möbius fonksiyonu

$$\sum_{H \geq K} \mu(H) = \delta_{K,G} = \begin{cases} 1 & , \quad K = G \\ 0 & , \quad K < G \end{cases}$$

veya denk olarak, $\mu(G) = 1$ ve eğer $K \neq G$ ise bu taktirde $\mu(K) = -\sum_{H > K} \mu(H)$ olarak tanımlanır.

Örneğin; $G = \mathbb{Z}$ toplamlı grubu olsun. Bu taktirde her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $K = <n> \leq \mathbb{Z}$ dir. Böylece

$$\mu(K) = \mu(n) = \begin{cases} 1 & , \quad n = 1 \\ (-1)^t & , \quad n = p_1 p_2 \ldots p_t \quad (p_1, \ldots, p_t \text{ farklı asallar}) \\ 0 & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases}$$

yani; μ tamsayılar üzerindeki Möbius fonksiyonu ile çakışır.

Möbius fonksiyonu ile ilgili aşağıda verilen teoremler P.Hall'ün [5] makalesinde bulunur.

Teorem 1.2.2 : Eğer H, G'nin maksimal alt gruplarının bir arakesiti değil ise bu taktirde $\mu(H) = 0$ dır.

Teorem 1.2.3 : i) Eğer H, G'nin bir maksimal alt grubu ise bu taktirde $\mu(H) = -1$ dir.
ii) Eğer $H \leq G$ bir maksimal alt grup değil fakat onu içeren farklı maksimal alt grupların arakesiti ise bu taktirde $\mu(H) = m-1$ dir. Burada m, H'ı içeren farklı maksimal alt grupların sayısıdır.

Teorem 1.2.4 : Eğer bir $\alpha \in Aut(G)$ için $\alpha(H_1) = \alpha(H_2)$ ise bu taktirde $\mu(H_1) = \mu(H_2)$ dir.

Möbius İnversion formülünü bir G grubuna uygulamak için G'nin alt grupları üzerinde tanımlı σ ve ϕ fonksiyonlarının herhangi bir ikilisi ile ilgileniriz öyle ki her $H \leq G$ ikilisi için

$$\sigma(G) = \sum_{H \leq G} \phi(H)$$

dır.

Şimdi Philip Hall'a ait olan ve P.Hall metodu diyeceğimiz metodu açıklayalım. Bu metot Γ sonlu üretilenli bir grup ve G'de bir sonlu grup olmak üzere, Γ'dan G'ye epimorfizmlerin $\phi_g(G)$ sayısını bulmak için bir metottur. Γ aşağıdaki sonlu bir sunuma sahip olsun:

$$\Gamma = < X_1, \ldots, X_g \mid R_1(X_i) = \ldots = R_n(X_i) = 1 \ , \ 1 \leq i \leq g >.$$

Γ'dan G'ye homomorfizmler aslında, $H \leq G$ olmak üzere Γ'dan H'a epimorfizmlerdir, böylece

$$Hom(\Gamma, G) = \dot{\bigcup}_{H \leq G} Epi(\Gamma, H)$$

ayrık bileşimindeki elemanları saymakla

$$\sigma_g(G) = \sum_{H \leq G} \phi_g(H)$$

elde ederiz. Burada $\sigma_g(G) = \left| Hom(\Gamma, G) \right|$ ve $\phi_g(H) = \left| Epi(\Gamma, H) \right|$ dır. Buradan Möbius İnversion formülü ile

$$\phi_g(G) = \sum_{H \leq G} \sigma_g(H)\mu(H) \qquad (1.2.1)$$

elde edilir. Gerçekten, (1.2.1) denkleminin sağ tarafına $\sigma_g(H) = \sum_{K \leq H} \phi_g(K)$ yazar ve toplamın sırasını değiştirirsek,

$$\begin{aligned} \sum_{H \leq G} \sigma_g(H)\mu(H) &= \sum_{H \leq G} \left(\sum_{K \leq H} \phi_g(K) \right) \mu(H) \\ &= \sum_{H \leq G} \left(\sum_{K \geq H} \phi_g(H)\mu(H) \right) \\ &= \sum_{H \leq G} \left(\phi_g(H) \sum_{K \geq H} \mu(K) \right) \end{aligned}$$

dır. Böylece $\phi_g(H)$'ın katsayısı olarak

$$\sum_{K \geq H} \mu(K)$$

elde ederiz. μ'nün tanımında $H = G$ hariç $\sum_{K \geq H} \mu(H)$ sıfırdır ve $H = G$ durumunda ise $\sum_{K \geq H} \mu(H) = 1$ dir. Böylece

$$\phi_g(G) = \sum_{H \leq G} \sigma_g(H)\mu(H)$$

elde ederiz. Bu formül bölüm 2.2'de karakter teori yardımıyla bulunacak olan homomorfilerin $\sigma_g(H)$ sayısından epimorfilerin sayısını bulmak için kullanılacaktır.

1.3 Yüzeylerin Temel Grupları ve Yüzeylerin Sınıflandırılması

Bu kısımda bir yüzeyin temel grubunun tanımını ve bazı ilgili teoremler verilerek, kompakt yüzeylerin sınıflandırılması özetle verilmiştir [1,15,19].

Herhangi bir X topolojik uzayı ve herhangi bir $x_0 \in X$ noktası için X'in temel grubu diyeceğimiz ve $\prod(X,x_0)$ ile göstereceğimiz bir grup tanımlayacağız (aslında, x_0 noktasının seçimi genellikle çok az önem taşır ve böylece sık sık notasyonda ihmal edilir). Bu grubu X'deki kapalı yolların kullanımını içeren çok basit ve sezgisel bir yöntemle tanımlarız. Tanımdan bu grubun X'in bir topolojiksel değişmezi olacağı açık olarak görülecektir. Yani; eğer iki uzay homeomorfik ise onların temel grupları izomorfiktir. Bu bize, iki uzayın homeomorfik olmadığının ispatlanması, onların temel gruplarının izomorfik olmadığının ispatlanmasıyla ispatlanabileceğini verir. Temel grup, sadece topolojik uzaylar hakkında bilgi vermekle kalmaz, aynı zamanda sürekli dönüşümlerin incelenmesinde de kullanılır. Göreceğimiz gibi, bir X uzayından bir Y uzayının içine herhangi bir sürekli dönüşüm, X'in temel grubundan Y'nin temel grubuna bir homomorfizmaya yükselir. Sürekli dönüşümlerin belirli topolojiksel özellikleri, elde edilen bu homomorfizmanın özellikleriyle açıklanabilir. Böylece, temel grupların bu elde edilen homomorfizmaları ile çalışılarak belirli sürekli dönüşümler ile ilgili iddiaları ispatlayabiliriz.

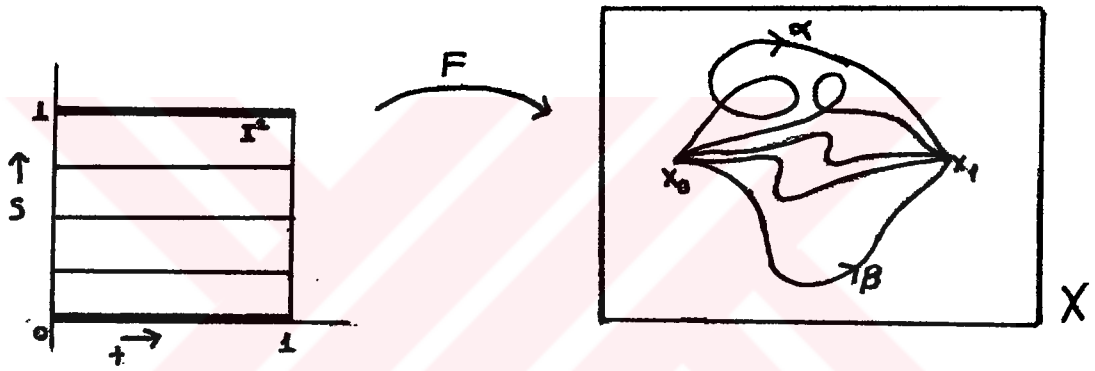
Yukarıda anlatılanları şu şekilde özetleyebiliriz: temel gruplar kullanılarak; uzaylar ve sürekli dönüşümler ile ilgili topolojiksel problemler çoğu zaman gruplar ve homomorfizmalar ile ilgili basit cebirsel problemlere indirgenebilir.

Tanım 1.3.1 : X bir topolojik uzay ve $I=[0,1]$ birim kapalı aralık olsun. X'de bir α yolu I'dan X içine sürekli bir dönüşümdür. α sürekli ve I kompakt ve bağlantılı olduğundan $\alpha(I)$ görüntüsü kompakt ve bağlantılıdır. Eğer $a=\alpha(0)$ ve $b=\alpha(1)$ ise α'ya a'dan b'ye bir ***yoldur*** denir. $a=\alpha(0)$'a α yolunun ***başlangıç noktası*** ve $b=\alpha(1)$'de α'nın ***bitiş noktası*** denir.

Tanım 1.3.2 : $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$, başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan (yani $\alpha(0) = \beta(0)$ ve $\alpha(1) = \beta(1)$) X'de iki yol olsun. Eğer sürekli bir $F : I \times I \longrightarrow X$ dönüşümü her $s,t \in I$ için

$$F(t,0) = \alpha(t) \ , \quad F(t,1) = \beta(t)$$
$$F(0,s) = \alpha(0) = \beta(0) \ , \quad F(1,s) = \alpha(1) = \beta(1)$$

olacak şekilde mevcutsa α ve β'ya X'de ***denktir*** denir ve $\alpha \simeq \beta$ ile gösterilir. Bu durumda F dönüşümüne X'de α'dan β'ya bir ***denklik dönüşümü*** adı verilir.



Şekil 1.3.1

Böylece şekil 1.3.1 den de anlaşılacağı üzere, her $s \in I$ için X'de x_0'dan x_1'e $\gamma_s(t) = F(t,s)$ ile verilen bir γ_s yolu vardır. s, 0'dan 1'e artarken γ_s, X'de α'dan β'ya uç noktaları x_0 ve x_1'de sabit tutarak α'dan β'ya sürekli olarak deform olur. Kısaca, X'de bir yol diğer bir yola sürekli deform (bozulma) altında uç noktalar sabit kalmak üzere dönüştürülebiliyorsa bu iki yola ***denktir*** denir. Yukarıda tanımlanan $\simeq$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. α yollarının denklik sınıfları $[\alpha]$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.3 : Eğer α ve β, X'de iki yol öyle ki α'nın bitiş noktası β'nın başlangıç noktası ise α ve β'nın $\alpha.\beta$ çarpımı,

$$(\alpha.\beta)t = \begin{cases} \alpha(2t) & , \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & , \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Lemma 1.3.1 : $\alpha \simeq \alpha'$ ve $\beta \simeq \beta'$ ise bu taktirde $\alpha.\beta \simeq \alpha'.\beta'$ [15].

İspat : $\alpha \simeq \alpha'$ olduğunda $F_1 : I \times I \longrightarrow X$ denklik dönüşümü vardır ve $\beta \simeq \beta'$ olduğundan $F_2 : I \times I \longrightarrow X$ denklik dönüşümü vardır. Buna göre;

$$F_1(t,0) = \alpha(t) \ , \ F_1(t,1) = \alpha'(t) \ ;$$
$$F_1(0,s) = \alpha(0) = \alpha'(0) \ , \ F_1(1,s) = \alpha(1) = \alpha'(1)$$

ve

$$F_2(t,0) = \beta(t) \ , \ F_2(t,1) = \beta'(t) \ ;$$
$$F_2(0,s) = \beta(0) = \beta'(0) \ , \ F_2(1,s) = \beta(1) = \beta'(1)$$

dir. Şimdi

$$G : I \times I \longrightarrow X \ ; \quad G(t,s) = \begin{cases} F_1(2t,s) & , \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ F_2(2t-1,s) & , \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

ile tanımlanan dönüşüm $\alpha.\beta$ ile $\alpha'.\beta'$ arasındaki istenen denklik dönüşümüdür.

Yolların çarpımı, yolların denklik sınıflarının bir çarpımını verir. Böylece yolların denklik sınıfları çarpımı

$$[\alpha].[\beta] = [\alpha\beta]$$

olarak tanımlanır.

Denklik sınıflarının çarpımı işlemi bir grup için gerekli olan aksiyomlara çok benzer aksiyomları sağlar. Bir grubun özelliklerinden farklı olan sadece, sınıfların herhangi ikilisi için

$[\alpha].[\beta]$ çarpımının her zaman tanımlı olmamasıdır. Bu çarpım sadece $\alpha(1) = \beta(0)$ olduğu zaman tanımlıdır.

Lemma 1.3.2 : Yolların denklik sınıfları üzerinde tanımlanan çarpma işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar.

1) Birleşme Özelliği : Eğer $[\alpha].([\beta].[\gamma])$ tanımlı ise $([\alpha].[\beta]).[\gamma]$ da tanımlıdır ve birbirine eşittirler.

2) Sağ ve Sol Birimler : $x \in X$ olsun. I'nın tamamını x noktasına taşıyan $I \longrightarrow X$ sabit yolunu $\mathcal{E}_x$ ile gösterelim. Eğer α, X'de x_0'dan x_1'e bir yol ise bu taktirde

$$[\alpha].[\mathcal{E}_{x_1}] = [\alpha] \quad \text{ve} \quad [\mathcal{E}_{x_0}].[\alpha] = [\alpha]$$

dır.

3) Ters : X'de x_0'dan x_1'e α yolu verilsin ve α^{-1} de $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ ile tanımlanan yol olsun. Bu taktirde

$$[\alpha].[\alpha^{-1}] = [\mathcal{E}_{x_0}] \quad \text{ve} \quad [\alpha^{-1}].[\alpha] = [\mathcal{E}_{x_1}]$$

dir. $[\alpha^{-1}]$ sınıfına $[\alpha]$'nın ***tersi*** denir.

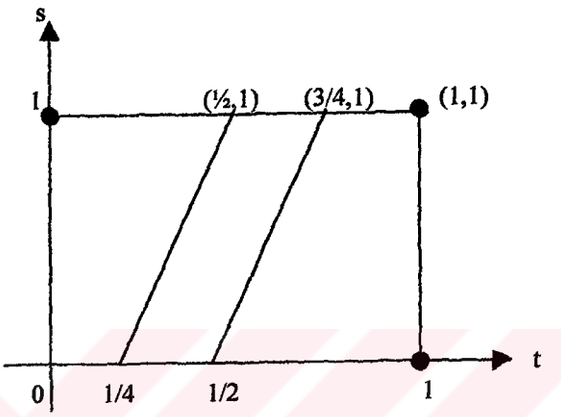
İspat : 1) Aşağıdaki ifadeyi ispatlamak yeterlidir.

f, g ve h yollarını f'nin bitiş noktası g'nin başlangıç noktası ve g'nin bitiş noktası da h'ın başlangıç noktası olacak şekilde alalım. Bu taktirde,

$$(f.g)h \sim f(g.h)$$

olur. Bunu ispatlamak için, aşağıdaki gibi tanımlanan $F : I \times I \longrightarrow X$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$F(t,s)=\begin{cases} f\left(\dfrac{4t}{1+s}\right) & , \quad 0 \le t \le \dfrac{s+1}{4} \\ g(4t-1-s) & , \quad \dfrac{s+1}{4} \le t \le \dfrac{s+2}{4} \\ h\left(1-\dfrac{4(1-t)}{2-s}\right) & , \quad \dfrac{s+2}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$



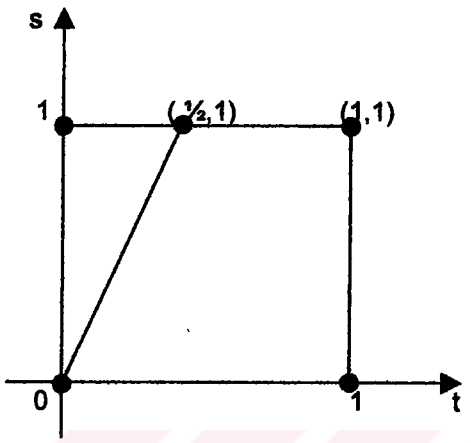
Şekil 1.3.2

Bu taktirde, F süreklidir. $F(t,0)=[(f.g)h]t$ ve $F(t,1)=[f.(g\,h)]t$ dir. F'nin tanımının ifadesi şekil 1.3.2'de verilir.

2) $e: I \longrightarrow X$, $e(I)=\{x\}$ olacak şekilde sabit bir dönüşüm ve $f: I \longrightarrow X$, α yol sınıfının bir temsilcisi olsun. İlk bağıntıyı ispatlamak için $ef \simeq f$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. $F: I \times I \longrightarrow X$ dönüşümü,

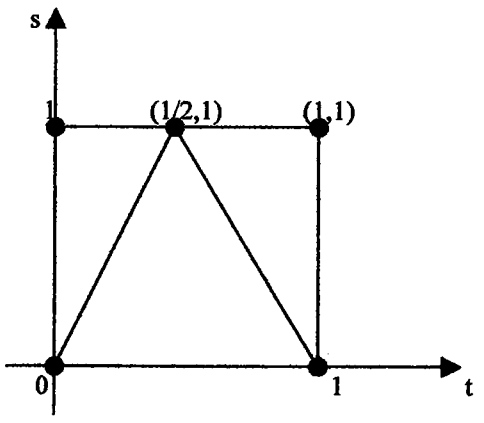
$$F(t,s)=\begin{cases} x & , \quad 0 \le t \le \dfrac{1}{2}s \\ f\left(\dfrac{2t-s}{2-s}\right) & , \quad \dfrac{1}{2}s \le t \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde istenildiği gibi $F(t,0) = f(t)$ ve $F(t,1) = (ef)t$ dir. F'nin tanımının açıklaması şekil 1.3.3'de gösterilmiştir. $\alpha . \xi_y = \alpha$ nın ispatı benzer şekilde yapılır.



Şekil 1.3.3

3) İlk eşitliği ispatlamak için, $f\overline{f} \simeq e$ olduğunu göstermek yeterlidir. Burada e, x noktasındaki sabit yoldur. Buradan, $F : I \times I \longrightarrow X$ fonksiyonu,



Şekil 1.3.4

$$F(t,s)=\begin{cases} f(2t) & , \quad 0\le t\le \frac{1}{2}s \\ f(s) & , \quad \frac{1}{2}s\le t\le 1-\frac{1}{2}s \\ f(2-2t) & , \quad 1-\frac{1}{2}s\le t\le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $F(t,0)=x$ ve $(f\bar{f})t=F(t,1)$ dir. Şekil 1.3.4, f fonksiyonunun seçimini açıklar. Basit bir benzetme ile $f\bar{f}$ yolunu, sabit e yoluna dönüştürebiliriz.

Tanım 1.3.4 : Bir α yolu için eğer $\alpha(0)=\alpha(1)=x_0$ ise α'ya bir ***ilmek*** (loop) denir. İlmeğe x_0'da taban olduğu söylenir.

Tanım 1.3.5 : $\prod(X,x_0)$ ile x_0'da taban olan ilmeklerin denklik sınıflarının kümesini gösterelim. $\prod(X,x_0)$'da $[\alpha],[\beta]$'nın çarpımının

$$[\alpha].[\beta]=[\alpha\beta]$$

olarak tanımlandığını biliyoruz. Bu çarpım altında $\prod(X,x_0)$ bir gruptur. Bu gruba x_0 taban noktasında X'in ***temel grubu*** adı verilir.

Teorem 1.3.1 : S^1, $\mathbb{R}^2$ Öklid uzayında birim çemberi göstersin (yani; $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$) ve

$$\alpha : I \longrightarrow S^1 \quad ; \quad \alpha(t)=(Cos2\pi t, Sin2\pi t) \qquad 0\le t\le 1$$

ile tanımlanan çemberin çevresinde tam olarak bir kez dolanan kapalı yolu göstersin ve $[\alpha]$ da α'nın denklik sınıfı olsun. Bu taktirde $\prod(S^1,(1,0))$ temel grubu, $[\alpha]$ yol sınıfı ile üretilen bir sonsuz devirli gruptur [15].

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Tanım 1.3.6 : X bir uzay olsun. Eğer X'in herhangi iki noktası bir yol ile bağlanabiliyorsa X'e ***yol bağlantılı*** (pathwise connected) denir. X'in yol bileşenleri X'in maksimal yol bağlantılı alt kümeleridir. Eğer X'in her noktası yol bağlantılı komşulukların bir temel ailesine sahipse X'e ***lokal yol bağlantılıdır*** denir.

Teorem 1.3.2 : Eğer X yol bağlantılı ve $x, y \in X$ herhangi iki nokta ise bu taktirde $\prod(X,x)$ ve $\prod(X,y)$ temel grupları izomorfiktir [15].

Böylece, eğer X yol bağlantılı ise bu taktirde $\prod(X,x)$ grubu $x \in X$'in seçiminden bağımsızdır, böylece temel grubu kısaca $\prod(X)$ ile gösteririz.

Şimdi ise sürekli bir dönüşümün temel grup üzerindeki etkisini inceleyelim.

X ve Y iki uzay, $f : X \longrightarrow Y$ sürekli bir dönüşüm ve x_0'da X'de seçilen bir taban nokta ve $y_0 = f(x_0)$, Y'de bir taban nokta olarak seçilsin. X 'de x_0'da taban olan herhangi bir α ilmeği için $f\alpha$ bileşke dönüşümü Y'de y_0'da taban olan bir ilmektir. Üstelik, eğer α, β X'de denk ilmekler ise bu taktirde $f\alpha$ ve $f\beta$ bileşke dönüşümleri Y'de denk ilmeklerdir. Dolayısıyla bu şekildeki herhangi bir f dönüşümü için

$$f_*([\alpha]) = [f\alpha]$$

ile bir

$$f_* : \prod(X,x_0) \longrightarrow \prod(Y,y_0)$$

dönüşümü tanımlanabilir. Bu durumda f_* aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) $f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha])f_*([\beta])$

2) Eğer $X = Y$ ve f birim dönüşüm ise f_* da birim dönüşümdür.

3) Eğer $g : Y \longrightarrow Z$ de sürekli bir dönüşüm ise bu taktirde $(gf)_* = g_*f_*$ dır.

4) Herhangi bir $x \in X$ için $f_*[\alpha_x] = [\alpha_{f(x)}]$

5) $f_*[\alpha^{-1}] = (f_*[\alpha])^{-1}$

f_*'ın bir homomorfizm olduğu açıktır ve f_*'a f ile ***indüklenmiş homomorfizm*** (veya f ile elde edilen homomorfizm) adı verilir.

Not edelim ki, bu özellikler göz önüne alındığında bir $f : X \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümü, $f_* : \prod(X,x) \longrightarrow \prod(Y,f(x))$ homomorfizmini meydana getirir ve eğer f bir homeomorfizm ise (yani; $f : X \longrightarrow Y$ dönüşümü bire-bir, örten, f ve f^{-1} in her ikisi de süreklidir) bu taktirde f_* bir izomorfizmdir. Bu indüklenmiş homomorfizm, temel grubun incelenmesinde son derece önemli olacaktır.

Şimdi kompakt yüzeylerin sınıflandırılmasına bakalım.

Teorem 1.3.3 : Herhangi bir kapalı yüzey ya küreye, ya sonlu sayıda kulp (handle) takılmış küreye, ya da sonlu sayıda disklerin çıkartılarak möbius şeridinin takılması ile oluşan küreye homeomorfiktir [1].

Tanım 1.3.7 : Bir möbius şeridinin bir noktasından başlayarak merkez çemberi etrafında bir kez dolanılırsa möbius şeridinin ters tarafında aynı noktaya ulaşılır. Dolayısıyla bir möbius şeridini içeren yüzeylere ***yönlendirilemeyen yüzey***, möbius şeridini içermeyen torus gibi bir yüzeye de ***yönlendirilebilir yüzey*** denir.

Kompakt yüzeylerin sınıflandırılması iyi bilinir. Her kompakt, bağlantılı yönlendirilebilir yüzey, $g \geq 0$ olmak üzere g tane kulp takılmış bir küreye homeomorfiktir. Her kompakt, bağlantılı yönlendirilemeyen yüzey, $g \geq 1$ olmak üzere g tane cross-caps takılmış bir küreye homeomorfiktir. Böylece bir torus bir kulplu bir küredir, bir projektif düzlem bir cross-caplı bir küredir ve bir Klein şişesi iki cross-caplı bir küredir. g'ye yüzeyin ***cinsi*** (genus) denir. Bir kompakt, bağlantılı S yüzeyinin Euler karakteristiği $\mathcal{K}$,

$$\mathcal{K}(S) = \mathcal{K}(M) = V - E + F$$

ile tanımlanır. Burada M, S'nin V köşeli, E kenarlı ve F yüzeyli bir çok köşeli alt bölüntüsüdür. Bir kompakt yüzeyin $\mathcal{K}$ Euler karakteristiği ile g cinsi arasında aşağıdaki bağıntı sağlanır.

$$g = \begin{cases} 1-\frac{1}{2}K & , \quad \textit{yönlendirilebilir durumda} \\ 2-K & , \quad \textit{yönlendirilemeyen durumda} \end{cases}$$

Teorem 1.3.4 : S_1 ve S_2 kompakt bağlantılı yüzeyler olsun. Bu taktirde S_1 ve S_2 homeomorfiktir ancak ve ancak onlar aynı Euler karakteristiğine sahiptir ve her ikisi yönlendirilebilirdir veya her ikisi yönlendirilemezdir.

Aşağıdaki teorem kompakt, bağlantılı yüzeylerin temel gruplarını genelleştirir.

Teorem 1.3.5 : i) Eğer $\sum_g$ g cinsli kompakt, bağlantılı yönlendirilebilir bir yüzey ise bu taktirde $\sum_g$ nin $\prod_g$ temel grubu,

$$\prod_g = < A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g \mid [A_1, B_1] \ldots [A_g, B_g] = 1 >$$

ye izomorfiktir.

ii) Eğer $\sum_g^-$, g cinsli kompakt, bağlantılı, yönlendirilemeyen bir yüzey ise bu taktirde $\sum_g^-$ nin $\prod_g^-$ temel grubu,

$$\prod_g^- = < R_1, \ldots, R_g \mid R_1^2 \ldots R_g^2 = 1 >$$

ye izomorfiktir.

iii) Eğer $\sum_{g,r}$, $\sum_g$ 'den r noktasının çıkartılması ile elde edilen yüzey ise bu taktirde onun $\prod_{g,r}$ temel grubu,

$$\prod_{g,r} = < A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g, X_1, \ldots, X_r \mid [A_1, B_1] \ldots [A_g, B_g] X_1, \ldots, X_r = 1 >$$

ye izomorfiktir.

iv) Eğer $\sum_{g,r}^-$, $\sum_g^-$ den r noktasının çıkartılması ile elde edilen yüzey ise bu taktirde onun $\prod_{g,r}^-$ temel grubu,

$$\Pi^{-}_{g,r} = < R_1, \ldots, R_g, X_1, \ldots, X_r \mid R_1^2 \ldots R_g^2 X_1 \ldots X_r = 1 >$$

ye izomorfiktir.

Ayrıca Π_g ve Π^{-}_g nin serbest gruplar olmadığını not edelim. Bununla birlikte eğer $r > 0$ ise $\Pi_{g,r}$ ve $\Pi^{-}_{g,r}$ sırasıyla rankları $2g+r-1$ ve $g+r-1$ olan serbest gruplardır [9,19].

II. BÖLÜM

GRUP KARAKTERLERİ İLE DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SAYISININ BULUNMASI

En etkili karakter – teorik tekniklerden birisi sonlu bir G grubunda bir denklemin çözümlerinin sayısının bulunmasıdır. Bu bölümde bu teknik açıklanacaktır.

Üç kısımda hazırlanan bu bölümün birinci kısmında sonlu grup gösterimleri incelenmiştir [2,8,17]. İkinci kısımda çalışmada önemli role sahip olan sonlu grup karakterleri ele alınmıştır [8,2]. Son kısımda ise kompakt, bağlantılı yüzeylerin temel gruplarının üreteçleri arasındaki bağıntılara karşılık gelecek olan denklemlerin sonlu bir grupta çözümlerinin sayısını veren formüller verilecektir.

2.1 SONLU GRUP GÖSTERİMLERİ

Tanım 2.1.1 : G sonlu bir grup ve F bir cisim olsun. Bu taktirde F üzerinde G'nin bir gösterimi, bir

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

homomorfizmidir. Burada V, F üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $GL(V)$ de V'den kendisine izomorfizmlerin grubudur.

V, F üzerinde n- boyutlu bir vektör uzayı ve V'nin bir $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bazını seçelim. Bu taktirde V vektör uzayından F^n vektör uzayına tanımlanan

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$$

dönüşüm bir izomorfizmdir. Böylece V'yi F^n vektör uzayı ile tanımlayabiliriz. Diğer taraftan lineer cebirden $GL(V) \cong GL_n(F)$ olduğu iyi bilinir. Şimdi, eğer $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ bir gösterim ise bu taktirde $\rho : G \longrightarrow GL_n(F)$ homomorfizmini elde ederiz. Burada

$GL_n(F)$, F üzerinde bütün $n \times n$ tersinir matrislerin grubudur. n tamsayısına ρ'nun ***derecesi*** (veya ***boyutu***) denir.

Herhangi bir G grubunun 1.dereceden bir gösterimine bir ***lineer gösterim*** adı verilir, yani; bir lineer gösterim bir $\rho : G \longrightarrow GL_1(F) \cong F^* = F - \{0\}$ homomorfizmidir.

Örnek 2.1.1 : $G = < a \mid a^n = 1 >$ mertebesi n olan bir devirli grup ve $F = \mathbb{C}$ olsun. Bu taktirde, $0 \leq j < n$ olmak üzere

$$\rho_j(a) = [w^j] \qquad \text{(böylece, } \rho_j(a^k) = [w^{jk}] \text{ , } 0 \leq k < n)$$

G'nin $1-$boyutlu gösterimlerinin bir tam listesidir. Burada $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ birimin bir primitif n. köküdür, yani; $w^n = 1$ ve $1 \leq m < n$ için $w^m \neq 1$ dir. Böylece mertebesi n olan bir devirli grubun tam olarak n tane $1-$boyutlu gösterimi vardır.

Tanım 2.1.2 : $\rho : G \longrightarrow GL_n(V)$ ve $\rho' : G \longrightarrow GL_n(V)$ F üzerinde G'nin iki gösterimi olsun. Eğer her $g \in G$ için,

$$\rho'(g) = T^{-1}\rho(g)T$$

olacak şekilde bir T tersinir $n \times n$ matrisi varsa ρ ve ρ' gösterimlerine ***denktir*** denir.

Tanım 2.1.3 : $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ F üzerinde G'nin bir gösterimi olsun. Eğer $Ker\,\rho = \{1\}$ ise ρ gösterimine ***faithfuldur*** denir. Yani; eğer $\rho(g) = I_n$ olan G'nin yegane g elemanı birim eleman ise ρ faithfuldur.

G bir grup ve F bir cisim olsun. $\rho : G \longrightarrow GL_n(V)$ nin G'nin bir gösterimi olduğunu farz edelim. $x_i \in F$ olmak üzere $(x_1, \ldots, x_n)^t$ şeklindeki bütün sütun vektörlerinin uzayı $V = F^n$ olsun. Burada $(x_1, \ldots, x_n)^t$, $(x_1, \ldots, x_n)$ nin transpozunu

gösterir. $\forall v \in V$ ve $\forall g \in G$ için, v sütun vektörü ile $\rho(g)$ $n \times n$ matrisinin $\rho(g)v$ matris çarpımı V'de bir sütun vektörüdür.

Tanım 2.1.4 : G bir grup ve V, F üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer aşağıdaki şartları sağlayan bir gv ($g \in G$, $v \in V$) çarpımı tanımlanırsa V'ye bir $G-$***modül*** veya $FG-$***modül*** denir. Her $u, v \in V$, $\lambda \in F$ ve $g, h \in G$ için

1) $gv \in V$

2) $(gh)v = g(hv)$

3) $1.v = v$

4) $g(\lambda v) = \lambda(gv)$

5) $g(u+v) = gu+gv$

Tanımdaki (1) , (4) ve (5) şartları $\forall g \in G$ için

$$v \mapsto gv, \quad (v \in V)$$

fonksiyonunun V'nin bir endomorfizmidir, yani; V'den kendisine bir lineer dönüşüm olduğunu garanti eder.

V, F üzerinde bir vektör uzayı ve θ, V'nin bir endomorfizmi olsun. V'nin bir bazının $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ olduğunu farz edelim. Bu taktirde F'de a_{ij} $(1 \le i \le n$, $1 \le j \le n)$ skalerleri her i için,

$$\theta(v_i) = a_{i1}v_1 + \ldots + a_{ij}v_j + \ldots + a_{in}v_n$$

olacak şekilde vardır. Buradan elde edilen (a_{ij}) matrisine B bazına bağlı olan θ'nın matrisi denir ve $[\theta]_B$ ile gösterilir.

Şimdi, $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$, V'nin bir diğer bazı olsun. Bu taktirde $1 \le i \le n$ ve belirli t_{ij} skalerleri için,

$$v_i' = t_{i1}v_1 + \ldots + t_{in}v_n$$

olur. Böylece elde edilen $T = (t_{ij})$, $n \times n$ matrisi tersinirdir ve bu matrise B'den B''ye ***baz değişim matrisi*** adı verilir. T'nin tersi B''den B'ye baz değişim matrisidir.

B ve B', V'nin bazları ve θ, V'nin bir endomorfisi ise bu taktirde T, B'den B''ne baz değişim matrisi olmak üzere

$$[\theta]_B = T^{-1}[\theta]_{B'}T \qquad (2.1.1)$$

dir.

B, V'nin bir bazı olsun. Bu taktirde her $g \in G$ için, B bazına bağlı olan V'nin $v \mapsto gv$ endomorfisinin matrisi $[g]_B$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5 : G, $\{1,2, \ldots, n\}$ kümesi üzerinde bir permütasyon grubu olsun. Her i ve her $g \in G$ için $ge_i = e_{g(i)}$ olacak şekilde $e_1, \ldots, e_n$ bazı ile bir V $G-$modülüne F üzerinde G için ***permütasyon modülü*** denir. $e_1, \ldots, e_n$ bazına V'nin ***doğal bazı*** denir.

Permütasyon modülünün $e_1, \ldots, e_n$ bazını B ile gösterelim. Bu taktirde her $g \in G$ için $[g]_B$ matrisi her bir satırda ve sütunda sıfırdan farklı bir tek elemana sahiptir ve bu eleman 1 dir. Böyle bir matrise ***permütasyon matrisi*** denir. Her bir e_i'yi sabit bırakan G'nin yegane elemanı birim eleman olduğundan permütasyon modülünün bir faithful $G-$modül olduğu görülür.

Teorem 2.1.1 : 1) $\rho : G \longrightarrow GL_n(F)$, F üzerinde G'nin bir gösterimi ve $V = F^n$ olsun. Bu taktirde

$$gv = (\rho(g))v, \quad (v \in V, g \in G)$$

ile bir gv çarpımı tanımlanırsa V bir $G-$modül olur. Ayrıca, V'nin bir B bazı

$$\rho(g) = [g]_B \quad (g \in G)$$

olacak şekilde vardır.

2) V bir $G-$modül ve B, V'nin bir bazı olsun. Bu taktirde G'den $GL_n(F)$'ye $g \mapsto [g]_B \quad (g \in G)$ ile verilen fonksiyon F üzerinde G'nin bir gösterimidir.

Teorem 2.1.2 : V, B bazı ile birlikte bir $G-$modül ve ρ, $\rho : g \mapsto [g]_B \quad (g \in G)$ ile tanımlanan F üzerinde G'nin bir gösterimi olsun. Bu taktirde

1) B', V'nin bir bazı ise G'nin $\rho' : g \mapsto [g]_{B'} \quad (g \in G)$ gösterimi ρ'ya denktir,

2) ρ'', ρ'ya denk olan G'nin bir gösterimi ise bu taktirde V'nin bir B'' bazı vardır öyle ki $\rho'' : g \mapsto [g]_{B''} \quad (g \in G)$ dir.

Tanım 2.1.6 : V ve W, $G-$modüller olsun.

i) Bir $\theta : V \longrightarrow W$ fonksiyonu bir lineer dönüşüm ve her $v \in V$ ve $g \in G$ için

$$(vg)\theta = (v\theta)g$$

sağlanırsa θ'ya bir $G-$***homomorfizm*** (veya $FG-$***homomorfizm***) denir. Diğer bir ifadeyle, eğer θ, v'yi w'ye gönderirse bu taktirde vg'yi de wg'ye gönderir.

ii) Eğer $\theta : V \longrightarrow W$, bir $G-$homomorfizm ve tersinir ise θ'ya bir $G-$***izomorfizm*** denir. Böyle bir $G-$izomorfizm varsa V ve W'ye izomorfik $G-$modüller denir ve $V \cong_G W$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7 : V bir $G-$modül ve W, V'nin bir alt kümesi olsun. Eğer W bir alt uzay ve her $w \in W$ ve her $g \in G$ için $wg \in W$ ise W'ye V'nin bir $G-$***alt modülü*** denir.

Böylece V'nin bir $G-$alt modülü bir $G-$modül olan bir alt uzaydır. Her V $G-$modülü için $\{0\}$ (sıfır alt uzayı) ve V'nin kendisi V'nin $G-$alt modülleridir.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Tanım 2.1.8 : i) $V \neq 0$ bir $G-$modül olsun. Eğer V'nin $\{0\}$ ve V'den başka $G-$alt modülü yoksa V'ye ***indirgenemezdir*** denir. Eğer V, $\{0\}$ ve V'den başka bir W $G-$alt modülüne sahipse V'ye ***indirgenebilirdir*** denir.

ii) $\rho : G \longrightarrow GL_n(F)$, G'nin bir gösterimi olsun. Eğer bu gösterime karşılık gelen

$$gv = (\rho(g))v, \quad (v \in F^n, g \in G)$$

ile tanımlı F^n $G-$modülü indirgenemez ise bu taktirde ρ indirgenemezdir. Eğer F^n, indirgenebilir ise ρ indirgenebilirdir.

V'nin indirgenebilir bir $G-$modül olduğunu farz edelim. Böylece $0 < \dim W < \dim V$ olacak şekilde bir W $G-$alt modülü vardır. V'nin bir B bazına genişletebileceğimiz W'nin bir B_1 bazını alalım. Bu taktirde her $g \in G$ için $[g]_B$ matrisi

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

formundadır. Burada A ve B matrisleri W ve V/W üzerinde g'nin etkisini gösterir (böylece A matrisi $k \times k$'lı bir matristir, $k = boyW$ dir). Ayrıca, $g \mapsto A$ ve $g \mapsto B$ fonksiyonları G'nin gösterimleridir. Böylece n.dereceden bir gösterim indirgenebilirdir ancak ve ancak yukarıda verilen formdaki bir gösterime denktir.

Tanım 2.1.9 : V bir $G-$modül olsun. Eğer V, $\{0\}$ ve V den farklı W_1 ve W_2 $G-$alt modüllerinin $V = W_1 \oplus W_2$ direkt toplamı olarak yazılabiliyorsa (veya yazılamıyorsa) V'ye ***ayrışabilir*** (veya ***ayrışamaz***) denir.

Önerme 2.1.1 : İki V ve W $G-$modül izomorfiktir ancak ve ancak V'nin B_1 bazı ve W'nin B_2 bazı her $g \in G$ için

$$[g]_{B_1} = [g]_{B_2}$$

olacak şekilde mevcuttur.

V bir $G-$modül olsun ve W_i ler V'nin $G-$alt modülleri olmak üzere $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$ olduğunu farz edelim. B_i, W_i'nin bir bazı ise bu taktirde $B = \bigcup_i B_i$ nin, V'nin bir bazı olduğu açıktır ve her $g \in G$ için

$$[g]_B = \begin{pmatrix} [g]_{B_1} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & [g]_{B_2} & . & . & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & [g]_{B_r} \end{pmatrix}$$

dir.

Teoremi 2.1.3 (Maschke Teoremi) : G sonlu bir grup olsun. F'nin de karakteristiği 0 veya $|G|$ ile aralarında asal olduğunu farz edelim. Eğer V, F üzerinde sonlu-boyutlu bir $G-$modül ve W_1'de V'nin bir $G-$alt modülü ise bu taktirde $V = W_1 \oplus W_2$ olacak şekilde V'nin bir W_2 $G-$alt modülü vardır [8,17].

G sonlu bir grup ve $F = \mathbb{C}$ olsun.

Lemma 2.1.1 (Schur Lemması) : V ve W indirgenemez $G-$modüller olsun.

i) Eğer $\theta : V \longrightarrow W$ bir $G-$homomorfizm ise bu taktirde ya θ bir $G-$izomorfizmdir ya da her $v \in V$ için $\theta(v) = 0$ dır.

ii) Eğer $\theta : V \longrightarrow V$ bir $G-$izomorfizm ise bu taktirde θ, 1_v birim endomorfisinin bir skaler katıdır [8,17].

Önerme 2.1.2 : V, $\mathbb{C}$ üzerinde sıfırdan farklı bir $G-$modül olsun ve V'den V'ye her $G-$homomorfizmin 1_v'nin bir skaler katı olduğunu kabul edelim. Bu taktirde V indirgenemezdir.

Sonuç 2.1.1 : $\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, G'nin bir gösterimi olsun. Bu taktirde ρ indirgenemezdir ancak ve ancak $\forall g \in G$ için $\rho(g)A = A\rho(g)$ şartını sağlayan her $n \times n$ A matrisi $\lambda \in \mathbb{C}$ için $A = \lambda I_n$ formundadır.

Önerme 2.1.3 : G sonlu bir abel grup ise bu taktirde her indirgenemez $G-$modül 1 boyutludur.

Örnek 2.1.2 : $G = C_n = < a \mid a^n = 1 >$ n.mertebeden bir devirli grup ve V sıfırdan farklı $G-$modül olsun. Maschke teoremine göre, $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$, $\mathbb{C}$ üzerinde V'nin U_i indirgenemez $G-$modüllerinin bir direkt toplamıdır. Önerme 2.1.3'e göre her bir U_i 1 boyutludur. u_i, U_i'yi geren vektör olsun ve $w = e^{2\pi i/n}$ olarak alalım. Buna göre her i için $gu_i = w^{m_i} u_i$ olacak şekilde bir m_i tamsayısı vardır. Böylece B, V'nin $u_1, \ldots, u_r$ bazı ise bu taktirde,

$$[g]_B = \begin{pmatrix} w^{m_1} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & w^{m_2} & . & . & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & w^{m_r} \end{pmatrix}$$

dir.

Önerme 2.1.4 : G sonlu bir grup ve V, $\mathbb{C}$ üzerinde bir $G-$modül olsun. Eğer $g \in G$ ise bu taktirde V'nin bir B bazı vardır öyle ki $[g]_B$ matrisi köşegen matristir. Eğer g'nin mertebesi n ise bu taktirde $[g]_B$ matrisinin köşegen üzerindeki elemanları birimin n. kökleridir.

İspat : $H = < g >$ olsun. Bu taktirde V aynı zamanda bir $H-$modüldür. Böylece örnek 2.1.2'den istenen elde edilir.

2.2 SONLU GRUP KARAKTERLERİ

Bu kısımda $F = \mathbb{C}$, G sonlu ve $boy V < \infty$ olduğunu kabul edelim.

Tanım 2.2.1 : Eğer $A = (a_{ij})$ bir $n \times n$ li kare matris ise bu taktirde A'nın ***izi*** $tr\,A$ ile gösterilir ve

$$tr\,A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.2 : Eğer $\rho : G \longrightarrow GL(V)$, G'nin bir gösterimi ise bu taktirde ρ'nun χ karakteri $g \in G$ için $\chi(g) = tr(\rho(g))$ ile verilen $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonudur ve ρ'ya χ karakterini meydana getirir denir.

Tanım 2.2.3 : Eğer χ, G'nin bir ρ gösteriminin karakteri ise bu taktirde χ nin ***derecesi*** $\deg \chi$ ile gösterilir ve $\deg \chi = \deg \rho$ olarak tanımlanır. Böylece

$$\deg \chi = \chi(1)$$

dir.

Tanım 2.2.4 : Eğer χ, G'nin bir ρ gösteriminin bir karakteri ise bu taktirde χ'in ***çekirdeği*** $Ker\,\chi = \{\, g \in G : \chi(g) = \chi(1) \,\}$ ile tanımlanır. Böylece $Ker\,\chi = Ker\,\rho$ dir.

ρ'nun faithful, lineer, indirgenemez veya indirgenebilir olması durumuna göre χ'de faithful, lineer, indirgenemez veya indirgenebilirdir denir.

Örnek 2.2.1 : $G = C_n = < a \mid a^n = 1 >$ mertebesi n olan bir devirli grup olsun. Örnek 2.1.1'den G'nin bütün

$$\rho_j(a) = [w^j] \quad , \quad (0 \le j \le n-1)$$

gösterimlerinin $1-$boyutlu olduğunu biliyoruz. Burada $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ birimin bir primitif $n.$ köküdür. Bu taktirde G, aşağıda tanımlandığı gibi hepsinin derecesi 1 olan n tane indirgenemez kompleks karaktere sahiptir.

$$\chi_{\rho_j}(a) = w^j \quad , \quad (0 \le j \le n-1)$$

Teorem 2.2.1 : G sonlu bir grup ve χ, G'nin bir karakteri olsun. Bu taktirde χ'in değeri, G'nin bir eşlenik sınıfının bütün elemanları üzerinden sabittir (yani; χ bir sınıf fonksiyonudur).

Önerme 2.2.1 : $\chi, \mathbb{C}$ üzerinde bir $G-$modülünün karakteri olsun ve $g \in G$ için g'nin $m.$ mertebeden olduğunu farz edelim. Buna göre;

1) $\chi(1) = \dim V$

2) $\chi(g)$, birimin $m.$ köklerinin bir toplamıdır.

3) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$

4) Eğer g, g^{-1}'e eşlenik ise $\chi(g)$ bir reel sayıdır.

Tanım 2.2.5 : θ ve ϕ nin G'den $\mathbb{C}$'ye fonksiyonlar olduğunu farz edelim.

$$< \theta, \phi > = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \theta(g)\overline{\phi(g)}$$

şeklinde bir skaler çarpım tanımlayalım. Bu taktirde $< , >$, G'den $\mathbb{C}$'ye fonksiyonların vektör uzayı üzerinde bir iç çarpımdır. Yani;

i) $\forall \theta_1, \theta_2, \phi$ ve $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ için,

$$< x_1\theta_1 + x_2\theta_2, \phi > = x_1 < \theta_1, \phi > + x_2 < \theta_2, \phi >$$

ve $\forall \theta, \phi_1, \phi_2$ ve $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ için,

$$< \theta, x_1\phi_1 + x_2\phi_2 > = \overline{x_1} < \theta, \phi_1 > + \overline{x_2} < \theta, \phi_2 >$$

ii) $< \theta, \phi > = \overline{< \phi, \theta >}$ $(her\ \theta, \phi\ için)$

iii) Eğer $\theta \neq 0$ ise $< \theta, \theta > > 0$ şartı sağlanır.

Önerme 2.2.2 : G'nin, $g_1, \ldots, g_l$ temsilcileri ile tam olarak l tane eşlenik sınıfa sahip olduğunu farz edelim. χ ve ψ, G'nin karakterleri olsun. Bu taktirde,

i) $< \chi, \psi > = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-1})$ dir ve bu bir reel sayıdır.

ii) $< \chi, \psi > = \sum_{i=1}^{l} \dfrac{\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}}{|C_G(g_i)|}$.

Tanım 2.2.6 : $V_1, \ldots, V_k$ indirgenemez $G-$modüllerinin herhangi ikisi izomorfik değilse ve her indirgenemez $G-$modül bir V_i'ye izomorfik ise $V_1, \ldots, V_k$ ya izomorfik olmayan indirgenemez $G-$modüllerin bir tam kümesini oluşturur denir.

Teorem 2.2.2 : G sonlu bir grup ve $V_1, \ldots, V_k$ izomorfik olmayan indirgenemez $G-$modüllerin bir tam kümesi olsun. χ_i, V_i'nin $(1 \leq i \leq k)$ karakteri ise bu taktirde, $\forall i, j$ için

$$< \chi_i, \chi_j > = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \ i \neq j \\ 1 & , \ i = j \end{cases}$$

dir.

Teorem 2.2.3 : $\chi_1, \ldots, \chi_k$, G'nin indirgenemez karakterleri olsun. Eğer ψ, G'nin herhangi bir karakteri ise bu taktirde negatif olmayan $d_1, \ldots, d_k$ tamsayıları için

$$\psi = d_1\chi_1 + \ldots + d_k\chi_k$$

dır. Ayrıca, her $1 \leq i \leq k$ için

$$d_i = <\psi, \chi_i> \quad \text{ve} \quad <\psi, \psi> = \sum_{i=1}^{k} d_i^2$$

dir.

İspat : $V_1, \ldots, V_k$, $\chi_1, \ldots, \chi_k$ ya eşlenen izomorfik olmayan indirgenemez $G-$modüller ve V'de bir $G-$modül olsun. Maschke teoremine göre, V, indirgenemez $G-$alt modüllerin bir direkt toplamına eşittir. Bunların her biri V_i'ye izomorfiktir, buradan negatif olmayan $d_1, \ldots, d_k$ tamsayıları vardır öyle ki

$$V \cong (V_1 \oplus \ldots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \ldots \oplus V_2) \oplus \ldots \oplus (V_k \oplus \ldots \oplus V_k) \qquad (2.2.1)$$

dir. Burada her bir i için V_i'nin d_i çarpanı vardır. Buradan V'nin ψ karakteri

$$\psi = d_1 \chi_1 + \ldots + d_k \chi_k$$

ile verilir. Teorem 2.2.2'ye göre

$$\begin{cases} <\psi, \chi_i> = <\chi_i, \psi> = d_i \quad (1 \leq i \leq k) \\ <\psi, \psi> = d_1^2 + \ldots + d_k^2 \end{cases} \qquad (2.2.2)$$

dır.

Teorem 2.2.4 : V, karakteri χ olan bir $G-$modül olsun. Bu taktirde V indirgenemezdir ancak ve ancak $<\chi, \chi> = 1$ dir.

İspat : Eğer V indirgenemezse bu taktirde teorem 2.2.2'ye göre $<\chi, \chi> = 1$ dir. Tersine olarak $<\chi, \chi> = 1$ olduğunu farz edelim. Bu taktirde negatif olmayan d_i tamsayıları için $<\chi, \chi> = d_1 \chi_1 + \ldots + d_k \chi_k$ ve (2.2.2) denklemine göre $1 = <\chi, \chi> = d_1^2 + \ldots + d_k^2$

dir. d_i tamsayılarından biri 1 geriye kalanlar 0 dır. Bu taktirde (2.2.1) denklemine göre her i için $V \cong V_i$ dir ve böylece V indirgenemezdir.

Teorem 2.2.5 : G'nin her indirgenemez $\rho^{(i)}$ gösterimi, $n_i = \deg(\rho^{(i)})$ çarpımı ile birlikte $\overline{\rho}$'nun bir direkt toplamıdır. Böylece $\overline{\rho} = \oplus_{i \in I} n_i \rho^{(i)}$ dir.

Sonuç 2.2.1 : $\rho^{(i)}$ $(i \in I)$, G'nin indirgenemez gösterimi ve $\chi_i = \chi_{\rho^{(i)}}$, $n_i = \deg(\chi_i) = \dim(\rho^{(i)})$ ile $\rho^{(i)}$'nin karakteri olsun. Bu taktirde

$$\sum_{i \in I} n_i^2 = |G|$$

dir.

Tanım 2.2.7 : G üzerinde bir sınıf fonksiyonu, x ve y, G'nin eşlenik elemanları olduğundan $\phi(x) = \phi(y)$ olacak şekilde bir $\phi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyondur, yani; ϕ, G'nin her bir eşlenik sınıfı üzerinde sabittir. G üzerinde bütün sınıf fonksiyonlarının $C(G)$ kümesi $\dim C(G) = c$ boyutlu $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı oluşturur ($C(G)$'nin G'den $\mathbb{C}$'ye bütün fonksiyonların vektör uzayının bir alt uzayıdır). Burada verilen c sayısı, G'nin eşlenik sınıflarının sayısıdır. $C(G)$'nin bir bazı, $g \in C_j$ "G'nin j. eşlenik sınıfı" olmak üzere

$$\phi_i(g) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ , & i = j \\ 0 \ , & i \neq j \end{cases}$$

fonksiyonları ile verilir (böylece ϕ_i, i. C_i sınıfı üzerinde 1 değerine, diğer bütün durumlarda da 0 değerine sahip olur).

Teorem 2.2.6 : G'nin $\rho^{(i)}$ indirgenemez gösterimlerinin χ_i karakteri, G üzerinde bütün $C(G)$ sınıf fonksiyonlarının vektör uzayı için bir ortonormal baz oluşturur.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Teorem 2.2.7 : G'nin izomorfik olmayan indirgenemez karakterlerinin sayısı, G'nin eşlenik sınıflarının sayısına eşittir.

Teorem 2.2.8 : G abel gruptur ancak ve ancak G, hepsinin derecesi 1 olan $|G|$ tane indirgenemez gösterime sahiptir.

Teorem 2.2.9 : i) (Satır Ortogonallik Bağıntısı) : $\chi_1, \ldots, \chi_k$, G'nin indirgenemez kompleks karakterleri ve $g_1, \ldots, g_k$, G'nin eşlenik sınıflarının gösterimleri olsun. Bu taktirde herhangi bir $r, s \in \{1, \ldots, k\}$ için

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{|C_i|}{|G|} \chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1 & , \ r = s \ \ ise \\ 0 & , \ r \neq s \ \ ise \end{cases}$$

dir.

ii) (Sütun Ortogonallik Bağıntıları) :

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)} = \begin{cases} \dfrac{|G|}{|C_r|} & , \ r = s \ \ ise \\ 0 & , \ r \neq s \ \ ise \end{cases}$$

Önerme 2.2.3 : $N \lhd G$ ve $\tilde{\chi}$, G/N'nin bir karakteri olsun. $\chi(g) = \tilde{\chi}(Ng) \ \ (g \in G)$ olacak şekilde $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ tanımlayalım. Bu taktirde χ, G'nin bir karakteridir ve χ ile $\tilde{\chi}$ aynı dereceye sahiptir.

Tanım 2.2.8 : $N \lhd G$ ve $\tilde{\chi}$, G/N'nin bir karakteri ise bu taktirde $\chi(g) = \tilde{\chi}(Ng)$ $(g \in G)$ ile verilen G'nin χ karakterine $\tilde{\chi}$'nın G'ye ***taşınmışı*** denir.

Teorem 2.2.10 : $N \lhd G$ olsun. G/N'nin her bir karakteri ile onun G'ye taşınmışını birleştirerek, G/N'nin karakterlerinin kümesi ile $N \leq Ker\,\chi$ sağlayan G'nin χ karakterlerinin kümesi arasında bire bir ve örten bir eşleme elde ederiz. G/N'nin

indirgenemez karakterleri; çekirdekleri N'yi içeren G'nin indirgenemez karakterlerine karşılık gelir.

Önerme 2.2.4 : Eğer χ, G'nin bir lineer karakteri ise bu taktirde $G' \leq Ker\,\chi$ dir.

Önerme 2.2.5 : G'nin bir lineer karakterleri tamamen G/G' nün indirgenemez karakterlerinin G'ye taşınmışıdırlar. Özellikle, G'nin farklı lineer karakterlerinin sayısı $|G/G'|$ eşittir.

Teorem 2.2.11 : $G = H \times K$ olsun. $\phi_1, \ldots, \phi_n$, H'ın farklı indirgenemez karakterleri ve $\theta_1, \ldots, \theta_m$ de K'nın farklı indirgenemez karakterleri olsun. Bu taktirde G'nin tam olarak, nm tane farklı indirgenemez karaktere sahiptir ve bunlar $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ için

$$(\phi_i \times \theta_j)(g,h) = \phi_i(g)\theta_j(h) \qquad (g \in G\,,\, h \in H)$$

olmak üzere $\phi_i \times \theta_j$ lerdir.

2.3 Grup Karakterleri İle Denklemlerin Çözümlerinin Sayısının Bulunması

Bu bölümde kompakt, bağlantılı yüzeylerin temel gruplarının üreteçleri arasındaki bağıntılara karşılık gelecek olan denklemlerin sonlu bir grupta çözümlerinin sayısını veren formüller verilecektir.

Bu formüller için teoremleri vermeden önce gösterim teorisinde önemli yeri olan ve bu formüllerin ispatında kullanılan grup cebirleri ile ilgili bazı kavramları verelim.

Sonlu bir G grubunun grup cebiri G üzerinde çarpma işlemini içeren ekstra yapı taşıyan $|G|$ boyutlu bir vektör uzayıdır. Bir anlamda grup cebirleri gösterim teorisiyle ilgili bilmek istediğimiz her şeyin kaynağıdır. Fakat biz burada ayrıntıya girmeyeceğiz.

G, elemanları $g_1, g_2, \ldots, g_n$ olan sonlu bir grup olsun. $\mathbb{C}$ üzerinde baz elemanları $g_1, g_2, \ldots, g_n$ olan bir vektör uzayı tanımlayacağız ve buna $\mathbb{C}G$ diyeceğiz. $\mathbb{C}G$ 'nin elemanları olarak

$$\lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_n g_n \qquad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}$$

formundaki bütün ifadeler alınır. $\mathbb{C}G$'de toplam ve skaler çarpım için kurallar doğal olarak tanımlanır: eğer $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ ve $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i$ $\mathbb{C}G$'nin elemanları ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ise bu taktirde

$$u+v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) g_i \quad \text{ve} \quad \lambda u = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) g_i$$

şeklindedir. Bu kurallar ile, $\mathbb{C}G$, $\mathbb{C}$ üzerinde $g_1, g_2, \ldots, g_n$ bazı ile n boyutlu bir vektör uzayıdır. $g_1, g_2, \ldots, g_n$ bazına $\mathbb{C}G$'nin ***doğal bazı*** denir. Bazen $\mathbb{C}G$'nin elemanlarını $\sum_{g \in G} \lambda_g g \quad (\lambda_g \in \mathbb{C})$ formunda yazarız.

Tanım 2.3.1 : $\mathbb{C}$ üzerinde G'nin

$$\mathbb{C}G = \{ \sum_{g \in G} \alpha_g g : \alpha_g \in \mathbb{C} \} \cong \mathbb{C}^{|G|}$$

grup cebiri, $g(=1.g) \in G$ baz elemanları ile bir kompleks vektör uzayıdır. $\mathbb{C}G$'de

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g . \sum_{h \in G} \beta_h h = \sum_{g,h \in G} \alpha_g \beta_h (gh) = \sum_{k \in G} (\sum_{gh=k} \alpha_g \beta_h) k$$

ile verilen çarpımı tanımlamak için G'deki çarpımı kullanırız. Bu $\mathbb{C}G$'yi bir halka ve vektör uzayı yapar. Böylece $\mathbb{C}G$ bir cebirdir. $\mathbb{C}G$ grup cebiri çarpım için bir birim içerir, bu eleman 1, $\mathbb{C}$'nin birimi ve e'de G'nin birimi olmak üzere $1.e$ elemanıdır. Bu elemanı basitçe 1 olarak yazarız.

$V = \mathbb{C}G$ olsun. Böylece V, $\mathbb{C}$ üzerinde $n = |G|$ boyutlu bir vektör uzayıdır. Her $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $g, h \in G$ için,

$$
\begin{aligned}
&gv \in V,\\
&(gh)v = g(hv),\\
&1v = v,\\
&g(\lambda v) = \lambda(gv),\\
&g(u+v) = gu+gv
\end{aligned}
$$

dir. Buna göre $V = \mathbb{C}G$, bir G-modüldür.

Tanım 2.3.2 : G sonlu bir grup olsun. $v \in \mathbb{C}G$, $g \in G$ olmak üzere gv doğal çarpımı ile $\mathbb{C}G$ vektör uzayına ***düzgün*** (regüler) G***-modül*** denir.

$\mathbb{C}G$'nin doğal bazı B alınarak elde edilen $g \mapsto [g]_B$ gösterimine $\mathbb{C}$ üzerinde G'nin ***düzgün*** (regüler) ***gösterimi*** denir. Bu gösterim $|G|$ boyuta sahiptir.

G'nin ($\mathbb{C}$ üzerinde) herhangi bir $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ gösterimi bir

$$\rho : \mathbb{C}G \longrightarrow End(V) ; \sum_{g \in G} \alpha_g g \mapsto \sum_{g \in G} \alpha_g \rho_g$$

cebir – homomorfizmine genişletilebilir.

Tanım 2.3.3 : $\mathbb{C}G$ grup cebirinin ***merkezi***

$$\{ z \in \mathbb{C}G : za = az \quad \forall a \in \mathbb{C}G \}$$

şeklinde tanımlanır ve $Z = Z(\mathbb{C}G)$ ile gösterilir.

Lemma 2.3.1 : Z, $\underline{C} = \sum_{g \in C} g$ baz elemanları ile birlikte $\mathbb{C}G$'nin bir alt cebiridir. Burada C, G'nin eşlenik sınıfları üzerinde dolaşır (böylece $\dim Z =$ eşlenik sınıfların sayısıdır).

İspat : Z'nin $\mathbb{C}G$'nin bir alt cebiri olduğunu kontrol etmek kolaydır. $C_1, \ldots, C_l$, G'nin farklı eşlenik sınıfları olsun. İlk olarak her bir $\underline{C_i}$'nin Z'ye ait olduğunu gösterelim. C_i, bir g elemanının r tane farklı $y_1^{-1} g y_1, \ldots, y_r^{-1} g y_r$ eşleniklerinden oluşsun. Böylece,

$$\underline{C_i} = \sum_{j=1}^{r} y_j^{-1} g y_j$$

dir. Her $h \in G$ için,

$$h^{-1} \underline{C_i} h = \sum_{j=1}^{r} h^{-1} y_j^{-1} g y_j h$$

olur. j'yi, 1 ile r arasında alırsak,

$$h^{-1} y_j^{-1} g y_j h = h^{-1} y_k^{-1} g y_k h \Leftrightarrow y_j^{-1} g y_j = y_k^{-1} g y_k$$

olduğundan, $h^{-1} y_j^{-1} g y_j h$ elemanı C_i boyunca dolaşır. Böylece,

$$\sum_{j=1}^{r} h^{-1} y_j^{-1} g y_j h = \underline{C_i}$$

olur ve dolayısıyla $h^{-1} \underline{C_i} h = \underline{C_i}$ dir. Yani; $\underline{C_i} h = h \underline{C_i}$ olur. Buna göre her bir $\underline{C_i}$, her $h \in G$ ile değişir, böylece her $\sum_{h \in G} \lambda_h h \in \mathbb{C}G$ ile değişir. Böylece $\underline{C_i} \in \mathbb{C}G$ dir. Şimdi, $\underline{C_1}, \ldots, \underline{C_l}$ nin lineer bağımsız olduğunu gösterelim: $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \underline{C_i} = 0 \quad (\lambda_i \in \mathbb{C})$ olsun. $C_1, \ldots, C_l$ sınıfları ikili tarzda ayrık olduğundan her $\lambda_i = 0$ dır.

Geriye $\underline{C_1}, \ldots, \underline{C_l}$ nin Z'yi ürettiğini göstermek kalır. $r = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in Z$ olsun. $h \in G$ için, $rh = hr$ ve böylece $h^{-1} r h = r$ olur. Yani;

$$\sum_{g\in G} \lambda_g h^{-1} g h = \sum_{g\in G} \lambda_g g$$

dir. Dolayısıyla her $h \in G$ için, G'nin λ_g katsayısı, $h^{-1} g h$'ın $\lambda_{h^{-1}gh}$ katsayısına eşittir. Buna göre $g \mapsto \lambda_g$ fonksiyonu G'nin eşlenik sınıfları üzerinde sabittir. Böylece λ_i, bir $g_i \in C_i$ için λ_{g_i} katsayısı olmak üzere, $r = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \underline{C_i}$ olduğu görülür.

Önerme 2.3.1 : V, $\mathbb{C}$ üzerinde bir indirgenemez G- modül ve $z \in Z$ olsun. Bu taktirde

$$zv = \lambda v \quad (\forall v \in V)$$

olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{C}$ vardır.

İspat : Her $r \in \mathbb{C}G$ ve $v \in V$ için, $rzv = zrv$ olur ve böylece $v \mapsto zv$ fonksiyonu V'den V'ye bir G - homomorfizmdir. Schur lemmasına göre, bu G - homomorfizma bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda 1_V$'ye eşittir.

Teorem 2.3.1 : $C_1, \ldots, C_g$, sonlu bir G grubunda eşlenik sınıfları (ayrık olması gerekmez) olsun. Bu taktirde her i için $x_i \in C_i$ olmak üzere $x_1 \ldots x_g = 1$ denkleminin G'de $x_1, \ldots, x_g$ çözümlerinin sayısı

$$\frac{|C_1| \ldots |C_g|}{|G|} \sum_{\chi} \frac{\chi(x_1) \ldots \chi(x_g)}{\chi(1)^{g-2}}$$

ile verilir. Burada χ, G'nin indirgenemez kompleks karakterleri üzerinde dolaşır.

İspat : Lemma 2.3.1 ile C, G'nin eşlenik sınıfları üzerinden olmak üzere, $Z = Z(\mathbb{C}G)$, $\mathbb{C}G$'nin bir alt cebiridir öyle ki

$$\underline{C} = \sum_{x \in C} x$$

sınıf toplamlarından oluşan bir baza sahiptir. Buradan

$$\underline{C_1} \ldots \underline{C_g} = \sum_{C} a_C \underline{C} \qquad (2.3.1)$$

çarpımını yazabiliriz. Burada a_C, her i için $x_i \in C_i$ ile $x_1 \ldots x_g$ olarak ortaya çıkan her bir $x \in C$ elemanının sayısıdır. Buna göre (2.3.1) denkleminde $\underline{C} = \underline{1}$ sınıf toplamının a_1 katsayısını hesaplamak zorundayız.

χ, derecesi $d = \deg(\rho) = \chi(1)$ olan G'nin bir indirgenemez kompleks ρ gösteriminin karakteri olsun. Schur lemması, $\mathbb{C}G$'de merkez olan her bir $\underline{C}$'nin, bir

$$\rho(\underline{C}) = \lambda_C I_d$$

skaler matrisi ile ifade edilebileceğini verir. Burada bu matrisin izini alırsak

$$|C|\chi(x) = tr(\rho(\underline{C})) = \lambda_C \chi(1) \qquad x \in C$$

elde edilir. Böylece

$$\lambda_C = \frac{|C|\chi(x)}{\chi(1)}$$

olur. (2.3.1) denklemine ρ'yu uygularsak

$$\lambda_{C_1} \ldots \lambda_{C_g} = \sum_{C} a_C \lambda_C$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla bütün λ_j ler için yerine koyarsak

$$\frac{|C_1|\ldots|C_g|\chi(x_1)\ldots\chi(x_g)}{\chi(1)^g}=\sum_C a_c\frac{|C|\chi(x)}{\chi(1)}$$

denklemine ulaşırız. Burada bunu ($x\in C$ olmak üzere her bir $x_i\in C_i$ dir) $\chi(1)^2$ ile çarparsak,

$$\frac{|C_1|\ldots|C_g|\chi(x_1)\ldots\chi(x_g)}{\chi(1)^{g-2}}=\sum_C a_c|C|\chi(x)\overline{\chi(1)}$$

elde edilir.

Bu her indirgenemez χ karakteri için doğrudur, böylece bütün χ üzerinden topladığımızda

$$|C_1|\ldots|C_g|\sum_\chi\frac{\chi(x_1)\ldots\chi(x_g)}{\chi(1)^{g-2}}=\sum_C\{a_c|C|\chi(x)\chi(1)\}\qquad(2.3.2)$$

elde edilir. G için sütun ortogonallik bağıntıları

$$\sum_\chi\chi(x)\overline{\chi(y)}=\begin{cases}|G|/|H| & , x,y\in C\\ 0 & , x,y\notin C\end{cases}$$

ifadesini içerir. Böylece $y=1$ alırsak,

$$\sum_\chi\chi(x)\overline{\chi(1)}=\begin{cases}|G|/|H| & , x\in C=\{1\}\\ 0 & , x\neq 1\end{cases}$$

olur ve dolayısıyla denklemi sağ taraftan $a_1|G|$ ile sadeleştirebiliriz. Bu taktirde (2.3.2) denklemi

$$|C_1|\ldots|C_g|\sum_\chi\frac{\chi(x_1)\ldots\chi(x_g)}{\chi(1)^{g-2}}=a_1|G|$$

şekline dönüşür. $|G|$ ile bölersek, a_1 için çözümlerin sayısı olan istenilen formül elde edilir.

Teorem 2.3.2 (Frobenius, Mednykh) : G sonlu bir grup olsun. G'de

$$[a_1,b_1]\ldots[a_g,b_g]=1 \qquad (2.3.3)$$

denkleminin çözümlerinin sayısını $\sigma_g(G)$ ile gösterelim. Bu taktirde, χ , G'nin indirgenemez kompleks karakterleri üzerinden olmak üzere ve $\chi(1)$'de χ'nin derecesini göstermek üzere,

$$\sigma_g(G)=|G|^{2g-1}\sum_{\chi}\chi(1)^{2-2g}$$

dir.

Not : Aslında, Frobenius ve Mednykh, (2.3.3) denkleminin sağ tarafını G'nin keyfi elemanı ile değiştirerek teorem 2.3.2'nin basit bir genelleştirmesini göz önüne almıştır.
Frobenius, $g=1$ için bunu ispatlamıştır. Mednykh ise bunu genel sonuç için tümevarım adımı olarak kullandı ve [14] de ispatsız olarak ifade etmiştir. Jones ise [14] de bu teoremin direkt olarak ispatını vermiştir. Ayrıca teoremde $\chi(1)$'in üssü olan $2-2g$'nin yüzeyin Euler karakteristiği olduğuna dikkat edelim.

İspat : (2.3.3) denklemindeki her bir $[a_i,b_i]$ komütatörünü $a_i^{-1}c_i$ olarak yazalım. Burada $c_i=b_i^{-1}a_ib_i$ nin a_i'nin bir eşleniği olduğu açıktır. Böylece teorem 2.2.4 ile, her i için $a_i,c_i\in K_i$ olmak üzere G'de

$$\prod_{i=1}^{g}a_i^{-1}c_i=1$$

denkleminin a_i, c_i çözümlerinin sayısını, K_i^{-1}, K_i'nin elemanlarının terslerinden oluşan sınıf olmak üzere

$$\frac{|K_1^{-1}||K_1||K_2^{-1}||K_2|\dots|K_g^{-1}||K_g|}{|G|}\sum_{\chi}\frac{\chi(a_1^{-1})\chi(c_1)\chi(a_2^{-1})\chi(c_2)\dots\chi(a_g^{-1})\chi(c_g)}{\chi(1)^{2g-2}}$$

$$=\frac{|K_1|^2|K_2|^2\dots|K_g|^2}{|G|}\sum_{\chi}\frac{\overline{\chi(a_1)}\chi(a_1)\overline{\chi(a_2)}\chi(a_2)\dots\overline{\chi(a_g)}\chi(a_g)}{\chi(1)^{2g-2}} \qquad (2.3.4)$$

dir. Yukarıda $\chi(a_i^{-1})=\overline{\chi(a_i)}$ ve $\chi(c_i)=\chi(a_i)$ özellikleri kullanılmıştır. Verilen herhangi bir $a_i\in K_i$ için her bir $c_i\in K_i$, $|C_G(a_i)|=|G|/|K_i|$ tane $b_i\in G$ elemanı için $b_i^{-1}a_ib_i$ olarak ortaya çıkar. Böylece (2.3.4) denklemini $\prod_i |G|/|K_i|$ ile çarparak her $a_i\in K_i$ ve $b_i\in G$ için (2.3.3) denkleminin çözümlerinin sayısını,

$$\frac{|G|^g}{|K_1|\dots|K_g|}\cdot\frac{|K_1|^2\dots|K_g|^2}{|G|}\sum_{\chi}\frac{\overline{\chi(a_1)}\chi(a_1)\dots\overline{\chi(a_g)}\chi(a_g)}{\chi(1)^{2g-2}}$$

$$\sigma_g(G)=|G|^{g-1}|K_1|\dots|K_g|\sum_{\chi}\frac{\overline{\chi(a_1)}\chi(a_1)\dots\overline{\chi(a_g)}\chi(a_g)}{\chi(1)^{2g-2}}$$

$$=|G|^{g-1}\sum_{\chi}\{\chi(1)^{2-2g}\sum_{a_1\in K_1}\dots\sum_{a_g\in K_g}\overline{\chi(a_1)}\chi(a_1)\dots\overline{\chi(a_g)}\chi(a_g)\}$$

ile verebiliriz. Şimdi $a_i,b_i\in G$ ile (2.3.3) denkleminin çözümlerinin sayısını bulmak için, yukarıdaki ifade G'de $K_1,K_2,\dots,K_g$ sınıflarının bütün seçimleri üzerinden toplanır ve aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\sigma_g(G)=|G|^{g-1}\sum_{\chi}\{\chi(1)^{2-2g}\sum_{a_1\in K_1}\dots\sum_{a_g\in K_g}\overline{\chi(a_1)}\chi(a_1)\dots\overline{\chi(a_g)}\chi(a_g)\}$$

$$=|G|^{g-1}\sum_{\chi}\{\chi(1)^{2-2g}(\sum_{a\in G}\overline{\chi(a)}\chi(a))^g\}$$

Şimdi G'nin karakterleri için ortogonallik bağıntıları, bütün indirgenemezleri χ karakterleri için,

$$|G| = \sum_{a \in G} \overline{\chi(a)}\, \chi(a)$$

eşitliğini verir. Böylece,

$$\sigma_g(G) = |G|^{2g-1} \sum_{\chi} \chi(1)^{2-2g}$$

elde edilir.

Sonuç 2.3.1 : $g \to \infty$ için

$$\frac{\sigma_g(G)}{|G|^{2g-1}} \longrightarrow |G^{ab}| = |G : G'|$$

dir.

İspat : $$\frac{\sigma_g(G)}{|G|^{2g-1}} = \frac{|G|^{2g-1}}{|G|^{2g-1}} \sum \chi(1)^{2-2g} = \sum \chi(1)^{2-2g}$$

dir. Diğer taraftan $|G : G'|$ tane derecesi 1 olan indirgenemez χ karakterleri vardır. Diğer karakterlerin dereceleri $\chi(1) > 1$ dir.

$$\frac{\sigma_g(G)}{|G|^{g-1}} = \left(|G : G'| + \sum_{\chi(1) > 1}^{\chi} \chi(1)^{2-2g} \right)$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} \lim_{g \to \infty} \frac{\sigma_g(G)}{|G|^{2g-1}} &= \lim_{g \to \infty} \left(|G : G'| + \sum_{\chi(1) > 1}^{\chi} \frac{1}{\chi(1)^{2g-2}} \right) \\ &= |G : G'| + 0 \\ &= |G : G'| \end{aligned}$$

elde edilir.

Bunun istatistiksel bilgiler ışığında doğru olduğu beklenebilir: Gerçekten, $2g$ tane a_i, b_i değişkeninin her biri için $|G|$ tane seçim vardır. g çok büyük alındığında (2.3.3) denkleminin sol tarafı yaklaşık olarak G'nin elemanları arasında düzgün dağılmalıdır, böylece

$$\sigma_g(G) \approx \frac{|G|^{2g}}{|G'|} = |G|^{2g-1}.|G|/|G'| = |G|^{2g-1}|G:G'|$$

elde edilir.

Şimdi bu teoremi, sonlu grup teoride iyi bilinen bazı gruplara uygulayalım.

Örnek 2.3.1 : $G = C_n$ mertebesi n olan bir devirli grup olsun. G'de $[a_1,b_1]\ldots[a_g,b_g]=1$ yani; $a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1\ldots a_g^{-1}b_g^{-1}a_gb_g=1$ denkleminin çözümlerinin sayısını bulalım. Bunun için teorem 2.3.2'yi uygulayalım. G değişmeli olduğundan G'nin $|G|$ tane χ indirgenemez karakteri vardır. Bu karakterlerin hepsinin derecesi $\chi(1)=1$ dir. Böylece teorem 2.3.2 ile

$$\begin{aligned}\sigma_g(G) &= |G|^{2g-1}\sum_{\chi}\chi(1)^{2-2g}\\ &= n^{2g-1}n\\ &= n^{2g}\end{aligned}$$

dir.

Örnek 2.3.2 : $G = D_n = \langle x,y \mid x^n = y^2 = (xy)^2 = 1\rangle$ mertebesi $2n$ olan dihedral grup olsun.

Eğer n tek ise bu taktirde D_n'nin $\frac{n+3}{2}$ tane eşlenik sınıfı vardır. Bunlar

$$\{1\}, \{x^r, x^{-r}\}\ (1 \le r \le \frac{n-1}{2}),\ \{x^sy \mid 0 \le s \le n-1\}$$

dir. Böylece teorem 2.2.7 ile $\frac{n+3}{2}$ tane indirgenemez karakter vardır. Diğer taraftan $D_n' = \langle x \rangle \cong C_n$ ve $|D_n : D_n'| = 2$ olduğundan D_n'nin derecesi 1 olan iki indirgenemez karakteri vardır, yani; $n_1 = n_2 = 1$ ve $j > 2$ için $n_j > 1$ dir. Böylece sonuç 2.2.1'den

$$|G| = 2n = \sum_{j=1}^{c} n_j^2 = 1^2 + 1^2 + \sum_{j=3}^{c} n_j^2 \geq 2 + \frac{n-1}{2} 2^2 = 2n$$

dir. Buradan $3 \leq j \leq c$ için $n_j = 2$ elde edilir. Böylece D_n'nin $\frac{n-1}{2}$ tane derecesi 2 olan indirgenemez karakteri vardır. Buradan teorem 2.3.2'den, n tek ise

$$\sigma_g(D_n) = (2^{2g} + n - 1) n^{2g-1}$$

elde edilir.

Eğer n çift ise bu taktirde D_n'nin $\frac{n+6}{2}$ tane eşlenik sınıfı vardır. Bunlar:

$$\{1\}, \{x^{n/2}\}, \{x^r, x^{-r}\} \ (1 \leq r \leq \frac{n-2}{2}), \{x^s y \mid s \text{ çift}\}, \{x^s y \mid s \text{ tek}\}$$

Diğer taraftan $D_n' = \langle x^2 \rangle$ ve $|D_n : D_n'| = 4$ olduğundan derecesi 1 olan 4 tane indirgenemez karakter vardır. Sonuç 2.2.1'den,

$$|G| = 2n = \sum_{j=1}^{c} n_j^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + \sum_{j=5}^{c} n_j^2 \geq 4 + \frac{n-2}{2} 2^2 = 2n$$

den $5 \leq j \leq c$ için $n_j = 2$ elde edilir. Böylece D_n'nin derecesi 2 olan $\frac{n-2}{2}$ tane indirgenemez karakteri vardır. Burada teorem 2.3.2'den

$$\sigma_g(D_n) = (2^{2g+1} + n - 2) n^{2g-1}$$

elde edilir.

Örnek 2.3.3 : $G = \mathbb{Q}_8 = \{ \pm 1 , \pm i , \pm j , \pm k \}$ mertebesi 8 olan Kuaterniyon grubu olsun. Burada $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$ dir. Bu taktirde $\mathbb{Q}_8$'in 5 tane eşlenik sınıfı vardır. Bu eşlenik sınıflar,

$$\{1\} , \{ k^2 \} , \{ k, k^3 \} , \{ i, k^2 i \} , \{ ki, k^3 i \}$$

dır. Teorem 2.2.7'ye göre, $\mathbb{Q}_8$'in 5 tane indirgenemez kompleks karakteri vardır. Komütatör alt grup $G' = \{ 1, -1 \}$ ve $G/G' = \{ G', G'k , G'i , G'ki \} \cong C_2 \times C_2$ olduğundan önerme 2.2.5'e göre 4 tane lineer karakter vardır. Sonuç 2.2.1'den

$$8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + n_5^2 = 4 + n_5^2$$

verilir. Yani; $n_5^2 = 4$ ve tek çözüm $n_5 = 2$ dir. Tekrar önerme 2.2.5'e göre, χ_i $(i = 1 , 2 , 3 , 4)$ lineer karakterleri, $C_2 \times C_2$'nin indirgenemez karakterlerinin G'ye taşınmışıdır. χ_5 indirgenemez kompleks karakterin değerlerini bulmak için $\sum_{i=5}^{5} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)} = \delta_{rs} \left| C_G(g_r) \right|$ sütun ortogonallik bağıntılarını kullanabiliriz. Böylece $\mathbb{Q}_8$'in karakter tablosu aşağıdaki tablo 2.3.1'de verilmiştir.

g_i :	1	k^2	k	i	ki
$\left\| g_i \right\|$:	1	2	4	4	4
χ_1 :	1	1	1	1	1
χ_2 :	1	1	1	-1	-1
χ_3 :	1	1	-1	1	-1
χ_4 :	1	1	-1	-1	1
χ_5 :	2	-2	0	0	0

Tablo 2.3.1

$\mathbb{Q}_8$'in derecesi 1 olan 4 tane ve derecesi 2 olan 1 tane indirgenemez karakteri vardır. Buradan teorem 2.3.2'den

$$\sigma_g(G) = 8^{2g-1}(4+2^{2-2g})$$

elde edilir.

Örnek 2.3.4 : $G = A_4 = < x, y \mid x^3 = y^2 = (xy)^3 = 1 >$ mertebesi 12 olan tetrahedron'un dönmelerinin grubu olsun (burada $x = (123)$, $y = (12)(24)$ alınabilir). G'nin 4 tane eşlenik sınıfı vardır. Bunlar

$$\{1\}, \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}, \{(123)^g : g \in A_4\}, \{(132)^g : g \in A_4\}$$

dır. Böylece A_4'ün 4 tane indirgenemez karakteri vardır. Ayrıca $G' \cong V_4$ ve $|G:G'| = 3$ olduğundan bunlardan 3 tanesinin derecesi 1, yani $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ ve $n_4 > 1$ dir. Sonuç 2.2.1 ile

$$|G| = 12 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + n_4^2$$

eşitliğinden yegane çözüm $n_4 = 3$ dür. Böylece G'nin derecesi 3 olan 1 tane indirgenemez karakteri vardır. Buradan teorem 2.3.2 ile

$$\sigma_g(A_4) = 12^{2g-1}(3+3^{2-2g})$$

elde edilir.

Örnek 2.3.5 : $G = S_4 = < x, y \mid x^3 = y^2 = (xy)^4 = 1 >$ mertebesi 24 olan oktahedronun dönmeler grubu olsun ($x = (124)$, $y = (13)$ böylece $xy = (1324)$). S_4'ün 5 tane eşlenik sınıfı vardır. Bunlar

$$\{1\}, \{(12)^g : g \in S_4\}, \{(123)^g : g \in S_4\}, \{(12)(34)^g : g \in S_4\}, \{(1234)^g : g \in S_4\}$$

dir. Böylece 5 tane indirgenemez karakteri vardır. Diğer taraftan $S_4' = A_4$ ve $|S_4 : S_4'| = 2$ olduğundan derecesi 1 olan 2 tane indirgenemez gösterimi vardır, yani $n_1 = n_2 = 1$ dir. Sonuç 2.2.1 ile

$$|G| = 24 = 1^2 + 1^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 = 2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2$$

dir. Burada mümkün olabilen yegane tamsayı çözüm $n_3 = 2$, $n_4 = n_5 = 3$ dir. Böylece S_4 ün derecesi 2 olan 1 tane ve derecesi 3 olan 2 tane indirgenemez karakteri vardır. Teorem 2.3.2 ile

$$\sigma_g(S_4) = 24^{2g-1}(2 + 2^{2-2g} + 2.3^{2-2g})$$

elde edilir.

Örnek 2.3.6 : $G = A_5 = < x, y \mid x^2 = y^3 = (xy)^5 = 1 >$ mertebesi 60 olan ikosahedron ve dodekahedronun dönmeler grubu olsun. A_5 in 5 tane eşlenik sınıfı vardır. Bu eşlenik sınıflar

$$\{1\}, \{(123)^g : g \in A_5\}, \{(12)(34)^g : g \in A_5\}, \{(12345)^g : g \in A_5\}, \{(13452)^g : g \in A_5\}$$

şeklindedir. Böylece A_5 in 5 tane indirgenemez gösterimi vardır. Ayrıca $A_5' = A_5$ olduğundan A_5'in derecesi 1 olan 1 tane indirgenemez karakteri vardır. Sonuç 2.2.1'i kullanırsak

$$1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 = 60$$

eşitliğinden, yegane çözüm $n_2 = n_3 = 3$, $n_4 = 4$ ve $n_5 = 5$ elde edilir. Buradan teorem 2.3.2 ile

$$\sigma_g(A_5) = 60^{2g-1}(1+2.3^{2-2g}+4^{2-2g}+5^{2-2g})$$

elde edilir.

Tanım 2.3.4 : 1) $x \in G$ olsun. Eğer x ve x^{-1} eşlenik ise bu x elemanına ***reeldir*** denir.

2) G'nin bir karakteri χ olsun. Her $g \in G$ için $\chi(g)$ reel ise χ reeldir.

Önerme 2.3.2 : Bir G grubunun reel olan kompleks indirgenemez karakterlerinin sayısı, reel elemanların eşlenik sınıflarının sayısına eşittir. Özellikle;

i) Bir g elemanı reeldir ancak ve ancak her indirgenemez χ karakteri için $\chi(g)$ reeldir,

ii) Eğer G grubunun mertebesi tek ise bu taktirde sadece trivial karakterler reeldir,

iii) G trivial olmayan bir reel indirgenemez karaktere sahiptir ancak ve ancak G'nin mertebesi çifttir,

iv) Eğer G bir abel grup ise bu taktirde G'nin reel indirgenemez karakterlerinin sayısı $g^2 = 1$ olan G deki g elemanlarının sayısına eşittir [4,8,17].

Tanım 2.3.5 : ρ, karakteri χ olan bir G grubunun bir indirgenemez gösterimi olsun. Eğer ρ, $\mathbb{R}$ üzerinde alınabilirse bu taktirde ρ'ya ***birinci çeşit*** , eğer ρ, $\mathbb{R}$ üzerinde değil fakat χ reel ise ρ'ya ***ikinci çeşit*** ve χ reel değil (böylece ρ da reel değil) ise ***üçüncü çeşittir*** denir.

Frobenius-Schur belirleyicisi

$$c_\chi = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^2) \qquad (2.3.5)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.3.3 : G'nin her bir indirgenemez χ karakteri için, ρ'nun sırasıyla birinci, ,ikinci veya üçüncü çeşit olmasına göre $c_\chi = 1, -1$ veya 0 olur [8].

Teorem 2.3.4 (Frobenius - Schur) : G sonlu bir grup olsun. G'de

$$r_1^2 \ . \ . \ . \ r_g^2 = 1 \qquad (2.3.6)$$

denkleminin çözümlerinin sayısı $\sigma_g^-(G)$ olsun. Bu taktirde χ, G'nin indirgenemez kompleks karakterleri üzerinden olmak üzere

$$\sigma_g^-(G) = |G|^{g-1} \sum_{\chi} c_\chi^g \chi(1)^{2-g}$$

dir.

Not : Frobenius ve Schur, teoremi genel olarak ifade ettiler fakat ispatını sadece $g = 1$ için verdiler. Bu teoremin direkt ispatı [6, § 5.5] den yararlanılarak aşağıdaki gibi verilebilir.

İspat : $g = 1$ ve $\sigma(y)$, G'de $r_1^2 = y$ denkleminin çözümlerinin sayısı olsun. $r_1^2 = y$ için (2.3.5) eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{y \in G} \sigma^-(y) \chi(y) = |G| \, c_\chi$$

elde ederiz. Her iki tarafı $\chi(1)$ ile çarparsak,

$$\sum_{y \in G} \sigma^-(y) \chi(y) \chi(1) = |G| \, c_\chi \chi(1)$$

olur. Bu eşitlik bütün χ indirgenemez karakterleri için doğrudur. Böylece bütün χ üzerinden toplam alırsak,

$$\sum_{y \in G} \sigma^-(y) \sum_{\chi} \chi(y) \chi(1) = |G| \sum_{\chi} c_\chi \chi(1) \qquad (2.3.7)$$

elde edilir. Şimdi sütun ortogonallik bağıntılarını hatırlarsak,

$$\sum_{\chi} \chi(y)\overline{\chi(h)} = \begin{cases} \frac{|G|}{|K|} & , \quad y,h \in K \\ 0 & , \quad y,h \notin K \end{cases}$$

dır. Burada K eşlenik sınıftır. $h = 1$ alırsak,

$$\sum_{\chi} \chi(y)\overline{\chi(1)} = \begin{cases} |G| & , \quad y \in K = \{1\} \\ 0 & , \quad y \neq 1 \end{cases}$$

eşitliğini elde ederiz. (2.3.7) denkleminin sol tarafı $\sigma^{-}(1)|G|$ ye eşittir. Böylece (2.3.7) denklemi

$$\sigma^{-}(1)|G| = |G| \sum_{\chi} c_{\chi}\chi(1)$$

şekline dönüşür. Son eşitliği $|G|$ ile bölersek G de $r_1^2 = 1$ nin çözümlerinin sayısını veren

$$\sigma^{-}(1) = \sum_{\chi} c_{\chi}\chi(1)$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi,

$$\rho^{-1}(x) \sum_{r_1 \in G} \rho(r_1^2)\,\rho(x) = \sum_{r_1 \in G} \rho^{-1}(x)\,\rho(r_1^2)\,\rho(x)$$

$$= \sum_{r_1 \in G} [\,\rho^{-1}(x)\,\rho(r_1)\,\rho(x)\,][\,\rho^{-1}(x)\,\rho(r_1)\,\rho(x)\,]$$

$$= \sum_{r_1 \in G} \rho(r_1)\,\rho(r_1)$$

$$= \sum_{r_1 \in G} \rho(r_1^2)$$

olduğundan $\sum_{r_1 \in G} \rho(r_1^2)$ matrisi $\rho(x)$ $(x \in G)$ indirgenemez gösterimlerinin matrisleri ile yer değiştirir. Sonuç 2.1.1'den, $\sum_{r_1 \in G} \rho(r_1^2)$, birim matrisin bir katı olmalıdır, yani;

$$\sum_{r_1 \in G} \rho(r_1^2) = \lambda I_n \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \qquad (2.3.8)$$

dir. Teorem 2.1.2'yi kullanarak ve matrisin izini alarak, $c_\chi |G| = \lambda \chi(1)$ elde ederiz. Buna göre (2.3.8) denklemi

$$\sum_{r_1 \in G} \rho(r_1^2) = \frac{c_\chi |G|}{\chi(1)} I_n \qquad (2.3.9)$$

olur. Buradan (2.3.9) denklemini $\rho(r_2^2)$ ile çarparsak:

$$\sum_{r_1 \in G} \rho(r_1^2 r_2^2) = \frac{c_\chi |G|}{\chi(1)} \rho(r_2^2) \qquad (2.3.10)$$

elde ederiz ve izini alırsak

$$\sum_{r_1 \in G} \chi(r_1^2 r_2^2) = \frac{c_\chi |G|}{\chi(1)} \chi(r_2^2) \qquad (2.3.11)$$

eşitliğini buluruz. Son ifadeyi r_2 üzerinden topladığımızda,

$$\sum_{r_1, r_2} \chi(r_1^2 r_2^2) = \frac{c_\chi |G|}{\chi(1)} \sum_{r_2 \in G} \chi(r_2^2)$$

$$= \frac{c_\chi |G|}{\chi(1)} c_\chi |G|$$

$$= \frac{(c_\chi |G|)^2}{\chi(1)}$$

elde edilir. Şimdi eğer $\sigma^-(z)$, $r_1^2 r_2^2 = z$ denkleminin çözümünün sayısı ise bu taktirde

$$\sum_{z \in G} \sigma^-(z)\, \chi(z) = \frac{(c_\chi |G|)^2}{\chi(1)}$$

dir. Her iki tarafı $\chi(1)$ ile çarparsak bu taktirde

$$\sum_{y \in G} \sigma^-(z)\, \chi(z)\, \chi(1) = (|G|\, c_\chi)^2$$

dir. Bu bütün indirgenemez χ için doğrudur, böylece bütün χ üzerinden toplarsak

$$\sum_{z \in G} \sigma^-(z) \sum_{\chi} \chi(z)\, \chi(1) = (|G|)^2 \sum_{\chi} (c_\chi)^2 \qquad (2.3.12)$$

denklemini elde ederiz. Sütun ortogonallik bağıntılarına göre (2.3.12) denkleminin sol tarafı $\sigma^-(1)\,|G|$'ye eşittir. Dolayısıyla

$$\sigma^-(1)|G| = (|G|^2) \sum_{\chi} (c_\chi)^2$$

dir.

Bu son ifadeyi $|G|$ ile bölersek G'de $r_1^2 r_2^2 = 1$ çözümlerinin sayısını veren aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\sigma^-(1) = |G| \sum_{\chi} (c_\chi)^2$$

Bu işlemi tekrarlarsak, yani g tane $r_1, \ldots, r_g$ elemanlarını (2.3.8) denklemi ile çarparsak

$$\sum_{r_1,\ldots,r_g \in G} \rho(r_1^2 \ldots r_g^2) = \frac{c_\chi |G|}{\chi(1)} \rho(r_2^2 \ldots r_g^2) = (\frac{c_\chi |G|}{\chi(1)})^g I_n$$

bulunur. Şimdi iz alınırsa,

$$\sum_{r_1,\ldots,r_g \in G} \chi(r_1^2 \ldots r_g^2) = \chi(1) (\frac{c_\chi |G|}{\chi(1)})^g$$

denklemini buluruz. Daha önceki gibi aynı yöntem ile G'de

$$r_1^2 \ldots r_g^2 = 1$$

denkleminin çözümlerinin sayısının

$$\sigma_g^-(G) = |G|^{g-1} \sum_\chi \frac{(c_\chi)^g}{\chi(1)^{g-2}}$$

olduğunu elde ederiz.

Not : Hiçbir topolojik yöntem (2.3.6) denkleminin G'de çözümlerinin sayısını vermez.

Örnek 2.3.7 : G bir değişmeli grup olsun. Bu taktirde G'nin $|G|$ tane indirgenemez karakteri vardır ve hepsinin derecesi 1 dir. Eğer G'nin Sylow 2-alt grubunun rankı r ise bu taktirde bunların 2^r tanesi birinci çeşit (± 1 değerlerini alır) ve geriye kalanlar üçüncü çeşittir. Dolayısıyla,

$$\sigma_g^-(G) = |G|^{g-1} 2^r$$

dir.

Örnek 2.3.8 : $G = D_n = < a,b \mid a^n = b^2 = 1 \ , \ b^{-1}ab = a^{-1} >$ mertebesi $2n$ olan dihedral grup olsun. Eğer n tek ise, örnek 2.3.1 den D_n'nin derecesi 1 olan 2 tane indirgenemez karakteri ve derecesi 2 olan $\frac{n-1}{2}$ tane karakteri vardır. Diğer taraftan D_n'nin $\mathbb{R}$ üzerinde bütün indirgenemez gösterimleri aşağıda verilmiştir:

$$\rho_1 : g \mapsto [1] \quad , \quad \forall g \in G$$

$$\rho_2 : g \mapsto \begin{cases} [1] & , \ g = a^r \ (bir \ r \ için) \\ [-1] & , \ g = a^r b \ (bir \ r \ için) \end{cases}$$

$$\rho_{j+2} : a \mapsto \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi j}{n} & \sin\frac{2\pi j}{n} \\ -\sin\frac{2\pi j}{n} & \cos\frac{2\pi j}{n} \end{pmatrix}$$

$$b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

burada $j = 1 , \ldots , \frac{n-1}{2}$ dir. Böylece D_n'nin her gösterimi birinci çeşittir, yani, reeldir. Buradan D_n'nin her χ karakteri için $c_\chi = 1$ dir. Eğer n çift ise D_n'nin derecesi 1 olan 4 tane indirgenemez karakteri ve derecesi 2 olan $\frac{n-2}{2}$ tane indirgenemez karakteri vardır. Yine D_n'nin her gösterimi reeldir ve böylece $c_\chi = 1$ dir. Böylece

$$\sigma_g^-(D_n) = \begin{cases} (2n)^{g-1}(2 + \left(\frac{n-1}{2}\right).2^{2-g}) & , \quad n \ tek \ ise, \\ (2n)^{g-1}(4 + \left(\frac{n-2}{2}\right).2^{2-g}) & , \quad n \ çift \ ise, \end{cases}$$

elde edilir.

Örnek 2.3.9 : $G = \mathbb{Q}_8 = \{ \pm 1 , \pm i , \pm j , \pm k \}$ mertebesi 8 olan Kuaterniyon grubu olsun. $\mathbb{Q}_8$'in $1.$ dereceden 4 tane ve $2.$ dereceden 1 tane indirgenemez karakterinin olduğunu

biliyoruz (örnek 2.3.1). Diğer taraftan $\mathbb{Q}_8$'in 4 tane ρ_n ($n=1,2,3,4$) 1-boyutlu reel gösterimi ve 1 tane 2. çeşit 2-boyutlu ρ_5 indirgenemez gösterimi vardır. Bu gösterim

$$\rho_5 : i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad k \mapsto \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

ile verilir. Böylece $c_{\chi_1} = c_{\chi_2} = c_{\chi_3} = c_{\chi_4} = 1$ ve $c_{\chi_5} = -1$ dir. Dolayısıyla

$$\sigma_g^-(\mathbb{Q}_8) = 8^{g-1}(4+(-1)^g 2^{2-g}) = 2^{3g-1}(1+(-\frac{1}{2})^g) = 2^{3g-1}(-1)^g 2^{2g-1}$$

olur.

Örnek 2.3.10 : $G = A_4 = < x=(123) \ , \ y=(12)(34) >$ tetrahedral grup olsun. A_4'ün 1. dereceden 3 tane ve 3. dereceden 1 tane indirgenemez karakterinin olduğunu biliyoruz (örnek 2.3.1 den). A_4'ün indirgenemez gösterimleri ise, $1-$boyutlu indirgenemez gösterimleri:

$$\begin{aligned} &\rho_1 : x \mapsto 1 \quad , \quad y \mapsto 1 \\ &\rho_2 : x \mapsto [w] \quad , \quad y \mapsto [1] \quad , \quad w = e^{2\pi i/3} \\ &\rho_3 : x \mapsto [w^{-1}] \quad , \quad y \mapsto [1] \quad , \quad w = e^{2\pi i/3} \end{aligned}$$

ve 1 tane $3-$ boyutlu indirgenemez gösterimi:

$$\rho_4 : G \longrightarrow GL_3(\mathbb{R}) \leq GL_3(\mathbb{C})$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad y \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ile verilir. Böylece G'nin 2 tane $1-$boyutlu üçüncü çeşit (birimin küp köklerinin cismi üzerinde) gösterimi ve dereceleri 1 ve 3 olmak üzere 2 tane birinci çeşit indirgenemez gösterimi vardır. Bu ise bize $c_{\chi_2} = c_{\chi_3} = 0$ ve $c_{\chi_1} = c_{\chi_4} = 1$ olduğunu verir. Buradan da

$$\sigma_g^-(A_4) = 12^{g-1}(1+3^{2-g})$$

elde edilir.

Teorem 2.3.5 : G sonlu bir grup olsun. Bu taktirde G de

$$[a_1,b_1]\ldots[a_g,b_g]x_1\ldots x_r = 1 \qquad (2.3.13)$$

denkleminin çözümlerinin $\sigma_g(G)$ sayısı

$$|G|^{2g-1}\sum_{\chi}\{\chi(1)^{2-2g-r}\sum_{x_1\in L_1}\chi(x_1)\ldots\sum_{x_r\in L_r}\chi(x_r)\}$$

ile verilir. Burada her bir x_j, G'nin eşlenik sınıflarının bir L_j birleşiminde bulunur ve χ, G'nin indirgenemez kompleks karakterleri üzerindendir.

İspat : İlk olarak, ayrık birleşimleri alarak, her bir L_j'nin bir tek eşlenik sınıf olduğu durumda bu sonucu ispatlamanın yeterli olacağını not edelim. (2.3.4) denkleminin her iki tarafını sağdan

$$\frac{|L_1|\ldots|L_r|\chi(x_1)\ldots\chi(x_r)}{\chi(1)^r} = \chi(1)^{-r}\sum_{x_1\in L_1}\chi(x_1)\ldots\sum_{x_r\in L_r}\chi(x_r)$$

ile çarparsak

$$\frac{|C_1|^2\ldots|C_g|^2}{|G|}\sum_{\chi}\left\{\chi(1)^{-r}\sum_{x_1\in L_1}\chi(x_1)\ldots\sum_{x_r\in L_r}\chi(x_r)\frac{\overline{\chi(a_1)}\chi(a_1)\ldots\overline{\chi(a_g)}\chi(a_g)}{\chi(1)^{2g-2}}\right\}$$

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

$$= |G|^{-1} \sum_{\chi} \left\{ \chi(1)^{2-2g-r} \sum_{x_1 \in L_1} \chi(x_1) \ldots \sum_{x_r \in L_r} \chi(x_r) \left(\sum_{a_1 \in C_1} \ldots \sum_{a_g \in C_g} \overline{\chi(a_1)} \chi(a_1) \ldots \overline{\chi(a_g)} \chi(a_g) \right)^2 \right\}$$

$$= |G|^{-1} \sum_{\chi} \left\{ \chi(1)^{2-2g-r} \sum_{x_1 \in L_1} \chi(x_1) \ \ldots \sum_{x_r \in L_r} \chi(x_r) \left(\sum_{a_1 \in G} \ldots \sum_{a_g \in G} \overline{\chi(a_1)} \chi(a_1) \ldots \overline{\chi(a_g)} \chi(a_g) \right)^2 \right\}$$

$$= |G|^{-1} \sum_{\chi} \left\{ \chi(1)^{2-2g-r} \sum_{x_1 \in L_1} \chi(x_1) \ \ldots \sum_{x_r \in L_r} \chi(x_r) \left(\sum_{a \in G} \overline{\chi(a)} \chi(a) \right)^{2g} \right\} \qquad (2.3.14)$$

denklemlerini elde ederiz. Şimdi G'nin karakterleri için ortogonallik bağıntıları bütün χ indirgenemez karakterleri için

$$\sum_{a \in G} \overline{\chi(a)} \chi(a) = |G|$$

eşitliğini verir. Böylece (2.3.13) denklemi

$$|G|^{-1} \sum_{\chi} \left\{ \chi(1)^{2-2g-r} \sum_{x_1 \in L_1} \chi(x_1) \ \ldots \sum_{x_r \in L_r} \chi(x_r) \left(|G| \right)^{2g} \right\}$$

$$= |G|^{2g-1} \sum_{\chi} \left\{ \chi(1)^{2-2g-r} \sum_{x_1 \in L_1} \chi(x_1) \ \ldots \sum_{x_r \in L_r} \chi(x_r) \right\}$$

eşitliğine eşit olur.

Örnek 2.3.11 : $G = C_p$ (p asal) mertebesi p olan bir devirli grup olsun.

$$[a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] x_1 \ldots x_r = 1 \qquad (r \geq 1)$$

denkleminin $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, x_1, \ldots, x_r$ çözümlerinin sayısını bulmak için teorem 2.3.5'i uygulayalım.

Her bir L_j'yi $G-\{1\}$ olarak alalım. C_p'nin p tane indirgenemez χ karakteri vardır ve bunların hepsinin derecesi 1 dir. Buradan

$$\sum_{x \in L_j} \chi(x) = \begin{cases} p-1 & , \ \chi = \chi_1 \ ise \\ -1 & , \ \chi \neq \chi_1 \ ise \end{cases}$$

dır (buradan χ_1 trivial karakterdir, yani her $g \in G$ için $\chi_1(g) = 1$ dir). Böylece teorem 2.3.5'e göre verilen denklemin G'de çözümlerinin sayısı

$$p^{2g-1}\left\{\chi_1(1)^{2-2g-r} \sum_{x_1 \in L_1} \chi_1(x_1) \ldots \sum_{x_r \in L_r} \chi_1(x_r) + \sum_{\chi \neq \chi_1} \chi(1)^{2-2g-r} \left\{ \sum_{x_1 \in L_1} \chi(x_1) \ldots \sum_{x_r \in L_r} \chi(x_r) \right\} \right\}$$

$$= p^{2g-1}\left\{ \underbrace{(p-1)\ldots(p-1)}_{r \text{ tane}} + \underbrace{\underbrace{(-1)\ldots(-1)}_{r \text{ tane}} + \ldots + \underbrace{(-1)\ldots(-1)}_{r \text{ tane}}}_{p-1 \text{ tane}} \right\}$$

$$= p^{2g-1}\left((p-1)^r + (-1)^r(p-1)\right)$$

dir.

Teorem 2.3.6 : G sonlu bir grup olsun. Bu taktirde G'de

$$r_1^2 \ldots r_g^2 x_1 \ldots x_r = 1 \qquad (2.3.15)$$

denkleminin çözümlerinin $\sigma_g(G)$ sayısı

$$|G|^{g-1} \sum_{\chi} \left\{ c_\chi^g \chi(1)^{2-g-r} \sum_{x_1 \in L_1} \chi(x_1) \ldots \sum_{x_r \in L_r} \chi(x_r) \right\}$$

ile verilir. Burada her bir x_j, G'nin eşlenik sınıflarının bir birleşimindedir ve χ, G'nin indirgenemez kompleks karakterleri üzerindedir.

İspat : Her bir L_j'nin bir eşlenik sınıf olduğunu kabul edelim. (2.3.15) denklemini, x, G'nin keyfi bir elemanı olmak üzere

$$r_1^2 \ldots r_g^2 = x \qquad (2.3.16)$$

$$x x_1 \ldots x_r = 1 \qquad (2.3.17)$$

denklem çifti olarak yazabiliriz. (2.3.16) ve (2.3.17) denklemlerinin çözümlerinin sayısını bulacağız ve her $x \in G$ üzerinden toplayacağız.

G'nin her bir indirgenemez χ karakteri için, teorem 2.3.4'e göre

$$\sum_{r_1,\ldots,r_g} \chi(r_1^2 \ldots r_g^2) = \chi(1)\left(\frac{c_\chi |G|}{\chi(1)}\right)^g$$

olur. Eğer $n_g(x)$, G'de (2.3.16) denkleminin çözümlerinin sayısını gösterirse bu taktirde bu

$$\sum_{x \in G} n_g(x)\chi(x) = |G|^g c_\chi^g \chi(1)^{1-g}$$

verir, yani;

$$< n_g, \chi > = |G|^{g-1} c_\chi^g \chi(1)^{1-g}$$

dir. Burada $< \phi, \psi >$, ϕ ve ψ iki sınıf fonksiyonunun

$$|G|^{-1}\sum_{x\in G}\overline{\phi(x)}\psi(x)$$

şeklindeki iç çarpımını gösterir. İndirgenemez χ karakteri sınıf fonksiyonları için bir ortonormal baz oluşturduğundan

$$n_g=\sum_{\chi}|G|^{g-1}c_\chi^g\,\chi(1)^{1-g}\,\chi$$

olduğu görülür. Böylece (2.3.16) denkleminin çözümlerinin sayısı

$$n_g=|G|^{g-1}\sum_{\chi}\frac{c_\chi^g\,\chi(x)}{\chi(1)^{g-1}} \qquad (2.3.18)$$

olarak elde edilir. Teorem 2.3.1'e göre $x_j\in L_j$ olmak üzere (2.3.17) denkleminin çözümlerinin sayısı

$$\frac{|L_1|\ldots|L_r|}{|G|}\sum_{\xi}\frac{\xi(x)\xi(x_1)\ldots\xi(x_r)}{\xi(1)^{r-1}}$$

eşittir. Burada ξ, G'nin indirgenemez kompleks karakterleri üzerinde dolaşır. Bunu (2.3.18) denklemi ile çarparsak (2.3.16) ve (2.3.17) denklemlerinin çözümlerinin sayısını

$$|L_1|\ldots|L_r||G|^{g-2}\sum_{\chi}\frac{c_\chi^g\,\chi(x)}{\chi(1)^{g-1}}\sum_{\xi}\frac{\xi(x)\xi(x_1)\ldots\xi(x_r)}{\xi(1)^{r-1}}$$

şeklinde elde ederiz. Bunu her $x\in G$ üzerinden toplar ve

$$\sum_{x\in G}\chi(x)\xi(x)=|G|(\overline{\chi},\xi)=|G|\delta_{\overline{\chi},\xi}$$

eşitliğini kullanırsak, G'de (2.3.15) denkleminin çözümlerinin toplam sayısı

$$|L_1| \ldots |L_r| |G|^{g-1} \sum_{\chi} \frac{c_\chi^g \overline{\chi(x_1)} \ldots \overline{\chi(x_r)}}{\chi(1)^{g-1} \overline{\chi}(1)^{r-1}}$$

dir. χ değişkenini $\overline{\chi}$ ile değiştirirsek ve $c_{\overline{\chi}} = c_\chi$ ve $\overline{\chi}(1) = \chi(1)$ eşitliklerini kullanırsak en son ifade

$$|G|^{g-1} \sum_{\chi} \left\{ c_\chi^g \, \chi(1)^{2-g-r} \sum_{x_1 \in L_1} \chi(x_1) \ldots \sum_{x_r \in L_r} \chi(x_r) \right\}$$

şekline dönüşür. Buda istenilendir.

Örnek 2.3.12 : i) C_p ($p > 2$ asal) mertebesi p olan bir devirli grup olsun. C_p'nin trivial olmayan bütün indirgenemez karakterleri üçüncü çeşit olduğundan

$$c_\chi = \begin{cases} 1 \ , & \chi = \chi_1 \\ 0 \ , & \chi \neq \chi_1 \end{cases}$$

dir. Böylece C_p de

$$r_1^2 \ldots r_g^2 x_1 \ldots x_r = 1$$

denkleminin çözümlerinin sayısı teorem 2.3.6 ile

$$p^{g-1} (p-1)^r$$

olarak elde edilir.

ii) Şimdi $G = C_2$ olsun. G'nin indirgenemez gösterimlerinin ikisi de reel olduğundan

$$c_{\chi_1} = c_{\chi_2} = 1$$

dir. Böylece

$$r_1^2 \ldots r_g^2 x_1 \ldots x_r = 1$$

denkleminin C_2 deki çözümlerinin sayısı

$$2^{g-1}\left\{ 1+(-1)^r \right\} = \begin{cases} 2^g & , \ r \ \text{çift ise} \\ 0 & , \ r \ \text{tek ise} \end{cases}$$

elde edilir.

III. BÖLÜM

ÖRTÜ UZAYLARI VE ÖRTÜ UZAYLARININ SAYILMASI

X bir topolojik uzay olsun. X'in bir örtü uzayı; bir $\tilde{X}$ uzayı ve $\tilde{X}$'dan X üzerine belirli bir şartı sağlayan sürekli bir p dönüşümünden oluşur. Örtü uzaylarının teorisi sadece topolojide değil, aynı zamanda diferansiyel geometri, Lie gruplarının teorisi ve Riemann yüzeylerinin teorisinde de önemli yer tutar.

Örtü uzaylarının teorisi temel grupların incelenmesi ile çok yakından ilişkilidir. Örtü uzayları ile ilgili pek çok temel topolojik problemler, temel gruplar ile ilgili cebirsel problemlere indirgenebilir.

3.1 Örtü Uzaylarının Tanımı ve Bazı Örnekler

Bu kısımda, aksi bir durum belirtilmedikçe bütün uzayların yol bağlantılı ve lokal yol bağlantılı olduğunu farz edeceğiz.

Tanım 3.1.1 : X bir topolojik uzay olsun. X'in bir örtü uzayı aşağıdaki şartı sağlayan bir $\tilde{X}$ uzayı ve bir $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ sürekli dönüşüm çiftinden ibarettir: Her $x \in X$ noktası yol bağlantılı açık bir U komşuluğuna sahiptir öyle ki $p^{-1}(U)$'nun her bir yol bileşeni p ile topolojik olarak U üzerine resmedilir. Özellikle $p^{-1}(U)$'nun boştan farklı olduğu farz edilir. Yukarıda ifade edilen şartı sağlayan herhangi bir açık U komşuluğuna ***elementer komşuluk*** denir. p dönüşümüne de genelde bir ***izdüşüm*** (veya projeksiyon) denir.

Örnek 3.1.1 : Her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ x &\longrightarrow p(x) = (\cos 2\pi x , \sin 2\pi x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde, $(\mathbb{R}, p)$ çifti S^1 birim çemberinin bir örtü uzayıdır. Örneğin; S^1'in x-ekseninin pozitif koordinatındaki noktaları içeren U alt kümesini göz önüne alalım. $p^{-1}(U) = \{ x \in \mathbb{R} : p(x) \in U \}$ kümesi $cos\ 2\pi x$'i pozitif yapan x değerlerinin kümesidir. Yani; $p^{-1}(U)$ kümesi $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $V_n = \left(n - \frac{1}{4} , n + \frac{1}{4} \right)$ aralıklarının birleşimidir.

(çünkü $\forall x \in V_n$ için $cos\ 2\pi x > 0$ dır). p'yi herhangi bir $\overline{V_n}$ kapalı aralığına kısıtladığımızda, $sin\ 2\pi x$ böyle bir aralık üzerinde kesin monoton olduğundan, p bire birdir. Ayrıca, analizden bilinen ara değer teoremi ile, p, $\overline{V_n}$'yi örten olarak $\overline{U}$ üzerine taşır ve üstelik V_n de U ya götürür. $\overline{V_n}$ kompakt olduğundan $p\downarrow \overline{V_n}$ kısıtlanışı $\overline{U}$ ile $\overline{V_n}$ nin bir homeomorfizmidir. Özellikle de, $p\downarrow V_n$, U ile V_n nin bir homeomorfizmidir. Yukarıdaki yöntem, üst ve alt açık yarı düzlemler ve açık sol - taraf yarı düzlem ile S^1'in arakesitlerine uygulanabilir. Bu açık kümeler S^1'i örter. Böylece $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ bir örtü dönüşümüdür.

Örnek 3.1.2 : $\mathbb{R}^2$ deki (r,θ) kutupsal koordinatları kullanalım. Bu taktirde, S^1 birim çemberi $r=1$ şartı ile tanımlıdır. Herhangi bir n tamsayısı (pozitif veya negatif) için

$$p_n : S^1 \longrightarrow S^1$$
$$(1,\theta) \mapsto p_n(1,\theta) = (1,n\theta)$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlansın. p_n dönüşümü, çemberi kendi etrafında n kez dolaştırır. Böylece eğer $n \neq 0$ ise (S^1, p_n) çifti, S^1'in bir örtü uzayıdır. S^1 deki herhangi bir açık öz alt aralık bir elementer komşuluktur.

Örnek 3.1.3 : Eğer X herhangi bir uzay ve $i : X \longrightarrow X$ birim dönüşüm ise (X,i) ikilisi X'in örtü uzayına bir trivial örnektir. Benzer şekilde, eğer f, Y'den X üzerine bir homeomorfizm ise (Y,f) de X'in bir örtü uzayıdır. İleriki kısımlarda, X basit bağlantılı ise bu taktirde X'in herhangi bir örtü uzayının bu trivial örtü uzaylardan birisi olacağını ispatlayacağız. Böylece, basit bağlantılı olmayan uzayların durumunda, sadece örtü uzaylarının trivial olmayan örneklerini düşüneceğiz.

Örnek 3.1.4 : Eğer $(\tilde{X},p)$, X'in ve $(\tilde{Y},q)$ da Y'nin bir örtü uzayı ise bu taktirde $(\tilde{X}\times\tilde{Y}, p\times q)$ da $X\times Y$'nin bir örtü uzayıdır (burada $p\times q$ dönüşümü, $(p\times q)(x,y) = (px,qy)$ şeklinde tanımlanır). U, $x\in X$ noktasının elementer komşuluğu ve V, $y\in Y$ noktasının elementer komşuluğu ise $U\times V$, $(x,y)\in X\times Y$ noktasının elementer komşuluğudur. Bu sonucu, örnek 3.1.1'i ve 3.1.2 yi kullanarak, $T = S^1 \times S^1$ torusunun örtü

uzayları için örnekler oluşturulabilir. Özellikle $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ düzlemi, $\mathbb{R} \times S^1$ silindiri veya $S^1 \times S^1$ torusunun kendisi torusun birer örtü uzayı olarak elde edilebilir. Örneğin, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ durumunda, $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ örnek 3.1.1 deki projeksiyon olmak üzere

$$p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^1$$

istenen projeksiyondur.

Örnek 3.1.5 : S^2 küresinin her bir x noktasını, bu noktanın taban tabana zıt noktası olan $-x$ ile aynı nokta olarak tanımlamakla elde edilen uzaya $\mathbf{p^2}$ ***projektif düzlemi*** denir. Böylece S^2'nin iki taban tabana zıt noktası $\mathbf{p^2}$ nin aynı noktası olarak göz önüne alınabilir. Formal olarak, S^2 üzerinde $x \sim x$ ve $x \sim (-x)$ ile bir denklik bağıntısı tanımlanırsa, bu taktirde $\mathbf{p^2}$ denklik sınıflarının kümesidir.

Projektif düzlemi daha iyi anlayabilmek için alternatif tanımlar şu şekilde verilebilir:

i) S^2'nin bütün taban tabana zıt $\{x, -x\}$ ikililerinin kümesidir.

ii) S^2'de orijinden geçen bütün doğruların kümesidir.

$H = \{ (x,y,z) \in S^2 : z \geq 0 \}$, S^2 nin kapalı üst yarı küresini göstersin. S^2'deki taban tabana zıt noktaların her birinin en azından bir noktası H'dadır. Her iki noktada H'da bulunuyorsa, bu taktirde noktalar H'ın sınırı olan ekvator üzerindedir. H'ın sınırı üzerinde taban tabana zıt noktaların tanımlanmasıyla elde edilen H'ın bölüm uzayını projektif düzlem olarak da tanımlayabiliriz. Düzlemdeki kapalı birim diski $E^2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$ göz önüne alalım. H, E^2'ye homeomorfik olduğundan sınırı üzerinde taban tabana zıt noktaların aynı nokta olarak tanımlanmasıyla elde edilen E^2'nin bölüm uzayı bir projektif düzlemdir. $\mathbf{p}$ projektif düzlemi, S^2 $2-$küresinin bir bölüm uzayı olarak tanımlanmıştı. $p : S^2 \longrightarrow \mathbf{p}$ her x noktasını onun denklik sınıfına gönderirse, bu taktirde aşağıdaki tanımla $\mathbf{p^2}$ bir topolojik yapıya kavuşur: V, $\mathbf{p^2}$'de açıktır ancak ve ancak $p^{-1}(V)$, S^2'de açıktır. Bu taktirde $p : S^2 \longrightarrow P^2$ bir örtü dönüşümüdür.

Örnek 3.1.6 : S, cinsi 2 olan kompakt yönlendirilebilir bir yüzey olsun. S'yi kompakt, sınırlı bir M yüzeyinin bir bölüm uzayı olarak alabiliriz. Burada M'yi cinsi 0 olan yönlendirilebilir bir

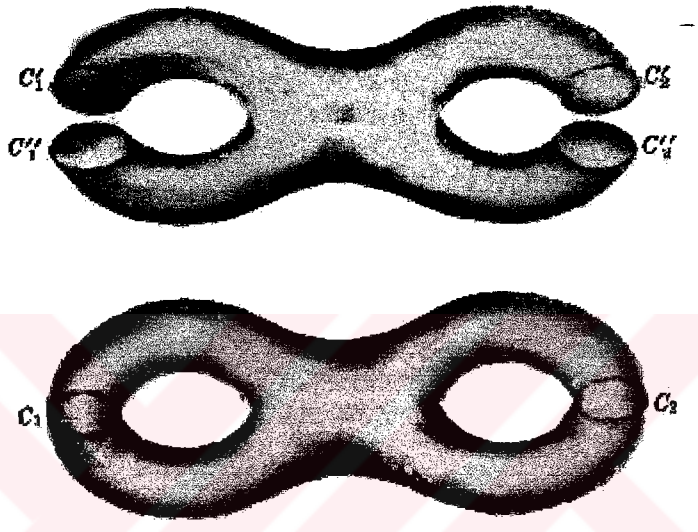
yüzey ve sınırlarını C_1', C_1'', C_2' ve C_2'' çemberlerini içerecek şekilde alırız. $M \longrightarrow S$ doğal dönüşümü, sınır çemberlerini ikililer olarak eşleştirir: C_i' ve C_i'' tek bir C_i $(i = 1,2)$ çemberini tanımlar. Buradaki tanımlama C_i' den C_i'' üzerine bir h_i homeomorfizmi anlamındadır. M'yi S'nin C_1 ve C_2 çemberleri boyunca kesilerek S'den elde edildiğini düşünebiliriz.

D discrete topolojiyle birlikte $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ şeklinde sonlu bir küme ve $q : M \times D \longrightarrow M$, çarpım uzayının ilk çarpan üzerine izdüşümü olsun. $M \times D$'yi, M nin n ayrık kopyasından oluştuğunu düşünebiliriz, bu n ayrık kopyanın her biri q ile homeomorfik olarak M üzerine resmedilir. $M \times D$ nin, bağlantılı olan bir $\tilde{S}$ $2-$manifoldu olacak olan bir bölüm uzayını nasıl oluşturacağımızı açıklayalım ve böylece q dönüşümü bölüm uzaylarının bir $p : \tilde{S} \longrightarrow S$ dönüşümünü verecektir, yani, böylece aşağıdaki komütatif diyagrama sahip olacağız.

$$\begin{array}{ccc} M \times D & \longrightarrow & \tilde{S} \\ \downarrow q & & \downarrow p \\ M & \longrightarrow & S \end{array}$$

Böylece, $(\tilde{S}, p)$, S'nin bir örtü uzayı olacaktır. $M \times D$'den $\tilde{S}$'ya olan özdeşlik aşağıda verildiği gibi olacaktır. $i = 1, 2$ ve $j, k \leq n$ olan pozitif tamsayılar olmak üzere (x, j) noktasını $(h_i(x), k)$ noktasına gönderen bir homeomorfizma ile $C_i' \times \{j\}$ çemberi $C_i'' \times \{k\}$ çemberine özdeş olarak tanımlanır. Bağlantılı bir $\tilde{S}$ uzayı elde edilinceye kadar, çemberlerin bu şekildeki ikililer olarak tanımlanmasına bir çok farklı yolla devam edebiliriz. Örneğin; $n = 3$ durumunda aşağıdaki gibi bu özdeşlikleri oluştururuz.

$$C_1' \times \{1\} \quad ile \quad C_1'' \times \{2\}$$
$$C_1' \times \{2\} \quad ile \quad C_1'' \times \{3\}$$
$$C_1' \times \{3\} \quad ile \quad C_1'' \times \{1\}$$
$$C_2' \times \{1\} \quad ile \quad C_2'' \times \{2\}$$
$$C_2' \times \{2\} \quad ile \quad C_2'' \times \{1\}$$
$$C_2' \times \{3\} \quad ile \quad C_2'' \times \{3\}$$



Şekil 3.1.1

Örnek 3.1.7 : X, bir noktada teğet olan iki çemberin oluşturduğu düzlemin bir alt kümesi olsun:

$$C_1 = \{ (x,y) : (x-1)^2 + y^2 = 1 \},$$
$$C_2 = \{ (x,y) : (x+1)^2 + y^2 = 1 \},$$
$$X = C_1 \cup C_2 .$$

Bu taktirde, X'in farklı iki örtü uzayını verebiliriz.

i) x veya y (veya ikisi) tamsayı olmak üzere $\tilde{X}$, bütün $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ noktalarının kümesini göstersin. $\tilde{X}$, yatay ve düşey doğruların bir birleşimidir. $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ dönüşümünü aşağıdaki formül ile tanımlayalım.

$$p(x,y) = \begin{cases} (1+\cos(\pi - 2\pi x)\ ,\ \sin 2\pi x) & ,\ y \textit{ bir tamsayı ise} \\ ((-1)+\cos 2\pi y\ ,\ \sin 2\pi y) & ,\ x \textit{ bir tamsayı ise} \end{cases}$$

Bu taktirde p, herbir yatay doğruyu C_1 çemberi etrafında ve herbir dikey doğruyu da C_2 çemberi etrafında sarar. Böylece p bir projeksiyondur.

ii) S_n, herhangi bir n tamsayısı için $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-3n)^2 = 1\}$ çemberini göstersin ve L'de $\{(x,y) : x = 0\}$ düşey doğruyu göstersin. S_n çemberleri ikişerli olarak ayrıktırlar ve her biri L doğrusuna teğettir. Şimdi

$$\tilde{X}' = L \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S_n \right)$$

olarak tanımlansın ve $p' : \tilde{X}' \longrightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki gibi olsun. p', uygun bir dikey ötelenmeyle her bir S_n çemberini, homeomorfik olarak C_1 üzerine resmetsin. p' aşağıdaki formüle göre L doğrusunu C_2 çemberinin çevresine sarsın.

$$p'(0,y) = \left(-1+\cos\frac{2\pi y}{3}\ ,\ \sin\frac{2\pi y}{3} \right)$$

Bu taktirde, $(\tilde{X}', p')$, X'in bir örtü uzayıdır.

Örnek 3.1.8 : z herhangi bir kompleks sayı olmak üzere

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

üstel fonksiyonunu göz önüne alalım. $\mathbb{C}$, kompleks düzlemi göstermek üzere $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}-\{0\}$ üstel fonksiyonu bir dönüşümdür. $(\mathbb{C},\exp)$'nin, $\mathbb{C}-\{0\}$'ın bir örtü uzayı olduğunu ve herhangi bir $z \in \mathbb{C}-\{0\}$ için,

$$U_Z = \{ w \in C : \left| w-z \right| < \left| z \right| \}$$

açık diskin bir elementer komşuluk olduğunu iddia ederiz. Bunu ispatlamak için U_z'nin ters görüntüsünün herhangi bir V bileşeninin exp ile U_z üzerine homeomorfik olarak resmedildiğini göstermek zorundayız. Yani; bir $f : U_z \longrightarrow V$ sürekli fonksiyonu herhangi bir $w \in U_z$ için,

$$\exp [f(w)] = w ,$$

ve herhangi bir $v \in V$ için,

$$f(\exp v) = v$$

olacak şekilde mevcuttur.

Kompleks fonksiyonlar teorisinde, böyle bir f fonksiyonuna, "U_z diskinde logaritmik fonksiyonunun bir dalı " denir.

Eğer $z = x+iy$ ise $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \{ t \in \mathbb{R} : t > 0 \}$ reel üstel fonksiyonu $\exp x = e^x$ olmak üzere $\exp z = (\exp x).(\cos y + i \sin y)$ olduğunu hatırlayalım. Bu formülden aşağıdaki sonuçlar çıkar:

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C} - \{0\} = \{ r \in \mathbb{R} : r > 0 \} \times S^1$ kabul edebiliriz. Bu taktirde, $p(x) = e^x$ ve $q(y) = (\cos y , \sin y)$ olmak üzere $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}-\{0\}$ dönüşümünü, $p \times q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \{ r \in \mathbb{R} : r > 0 \} \times S^1$ dönüşümü olarak, göz önüne alabiliriz.

Örnek 3.1.9 : Şimdi kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinden başka bir örnek verelim. Herhangi bir $n \neq 0$ tamsayısı için $p_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü $p_n(z) = z^n$ şeklinde

tanımlansın. Bu taktirde, $(\mathbb{C}-\{0\}, p_n)$, $\mathbb{C}-\{0\}$'ın bir örtü uzayıdır. p_n fonksiyonunun değer ve tanım kümesinden 0 çıkartmak gereklidir; aksi halde bir örtü uzayı elde edemeyiz. Örnek 3.1.8 deki gibi, $\mathbb{C}-\{0\} = \{ r \in \mathbb{R} : r > 0 \} \times S^1$ göz önüne alarak, $(\mathbb{C}-\{0\}, p_n)$ örtü uzayını iki örtü uzayının çarpımına ayrıştırabiliriz.

Tanım 3.1.2 : $f : X \longrightarrow Y$ sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ noktasının bir V açık komşuluğu için $f(V)$ açık ve f dönüşümü, V'yi $f(V)$ üzerine topolojiksel olarak resmediyorsa f'ye ***lokal homeomorfizm*** denir.

Eğer $(\tilde{X}, p)$, X'in bir örtü uzayı ise p'nin bir lokal homeomorfizm olduğu ispatlanabilir (ispat; lokal yol bağlantılı uzayda bir açık cümlenin yol bileşeninin açık olmasına bağlıdır). Bir topolojik uzayın bir açık alt cümlesinin bütün uzayın içine içerme dönüşümü de bir lokal homeomorfizmdir. Son olarak; iki lokal homeomorfizmin bileşkesi yine bir lokal homeomorfizmdir. Böylece, lokal homeomorfizmlerin pek çok örneğini oluşturabiliriz.

Diğer taraftan, örten dönüşümler olan, fakat örtü uzayı olmayan lokal homeomorfizmin örneklerini oluşturmak kolaydır. Örneğin; p, $(0, 10)$ açık aralığını aşağıdaki gibi S^1 çemberi üzerine dönüştürsün:

$$p(t) = (\cos t, \sin t)$$

Bu taktirde, p bir lokal homeomorfizmdir, fakat $((0,10), p)$, S^1'in bir örtü uzayı değildir. Daha genel olarak, eğer $(\tilde{X}, p)$, X'in bir örtü uzayı ve V, $\tilde{X}$'nın bağlantılı, açık ve bir öz alt cümlesi ise, $p{\downarrow}V$ bir lokal homeomorfizmdir, fakat $(V, p{\downarrow}V)$, X'in bir örtü uzayı değildir. Lokal homeomorfizmler ve örtü uzayları arasındaki fark önemlidir.

Ayrıca, bir lokal homeomorfizm bir açık dönüşümdür. Özellikle, eğer $(\tilde{X}, p)$, X'in bir örtü uzayı ise p bir açık dönüşümdür.

Lemma 3.1.1 : $(\tilde{X}, p)$, X'in bir örtü uzayı, A, X'in yol bağlantılı ve lokal yol bağlantılı olan bir alt uzayı ve $\tilde{A}$, $p^{-1}(A)$'nın yol bileşeni olsun. Bu taktirde, $(\tilde{A}, p{\downarrow}\tilde{A})$, A'nın bir örtü uzayıdır.

Örnek 3.1.7'de tanımlanan iki örtü uzayı, örnek 3.1.4'de açıklanan $S^1 \times S^1$ torusu bu lemmanın $\mathbb{R} \times S^1$ ve $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ örtü uzaylarına uygulanmasıyla da elde edilebilir ($x_0 \in S^1$ olmak üzere A'yı, $A = (S^1 \times \{x_0\}) \cup (\{x_0\} \times S^1)$ ile tanımlanan, $S^1 \times S^1$'in bir alt cümlesi olarak seçeriz).

Örtü uzayları teorisinin esas problemlerinden ikisi şu şekildedir:

1) Bir X uzayının iki $(\tilde{X}_1, p_1)$ ve $(\tilde{X}_2, p_2)$ örtü uzayının izomorfik olması için gerek ve yeter şartı veriniz (tanım olarak bunların izomorfik olması için gerek ve yeter şart $\tilde{X}_1$'dan $\tilde{X}_2$ üzerine bir h homeomorfizmi $p_2 h = p_1$ olacak şekilde mevcut olmasıdır).

2) Bir X uzayı verildiğinde, izomorfizmaya kadar X'in mümkün olabilen bütün örtülerini belirleyiniz. İleriki kısımlarda, bu iki sorunun cevabı temel gruplar yardımıyla verilecektir. Son kısımda ise bu iki problem yardımıyla verilen herhangi bir G sonlu örtü grubu ile bir kompakt, bağlantılı ve yönlendirilebilir (veya yönlendirilemeyen) bir yüzeyin düzgün örtülerinin sayısı bulunacaktır.

$(\tilde{X}, p)$, X'in bir örtü uzayı ve $g : I \longrightarrow \tilde{X}$, $\tilde{X}$'da bir yol olsun. Bu taktirde pg, X'de bir yoldur. Eğer $g_0, g_1 : I \longrightarrow \tilde{X}$ ve $g_0 \sim g_1$ ise $pg_0 \sim pg_1$ dir. Şimdi aksi yönde bir sonuç için şunu sorabiliriz. Eğer $f : I \longrightarrow X$, X de bir yol ise $pg = f$ olacak şekilde bir $g : I \longrightarrow \tilde{X}$ yolu mevcut mudur? Eğer $g_0, g_1 : I \longrightarrow \tilde{X}$ ve $pg_0 \sim pg_1$ ise $g_0 \sim g_1$ midir?

Bu iki sorunun cevabının evet olduğunu göreceğiz. Bu, örtü uzaylarının temel özelliklerinden birini ifade eder.

Lemma 3.1.2 (Path - Lifting Lemma) : $(\tilde{X}, p)$, X'in bir örtü uzayı, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ve $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ olsun. Bu taktirde, başlangıç noktası x_0 olan herhangi bir $f : I \longrightarrow X$ yolu için, başlangıç noktası $\tilde{x}_0$ olan bir tek $g : I \longrightarrow \tilde{X}$ yolu vardır öyle ki $pg = f$ dir.

İspat : Eğer f yolu bir U elementer komşuluğunda içeriliyor ise problem yoktur. Bunun için, eğer V, $\tilde{x}_0$'yı içeren $p^{-1}(U)$'nun yol bileşenini gösteriyorsa, bu taktirde p, V'yi U üzerine topolojik olarak resmedeceğinden, istenen özelliklerde V'de bir tek g mevcuttur.

Elbette ki, f genelde U elementer komşuluğunda içerilmeyebilir. Bununla birlikte f'yi daima her biri bir elementer komşulukda içerilen daha kısa yolların bir sonlu sayısının çarpımı olarak ifade edebiliriz ve buradan sırasıyla bu daha kısa yolların her birine bir önceki paragraftaki düşünceyi uygulayabiliriz. Bu prosedürün ayrıntısı aşağıda açıklanmıştır.

$\{U_i\}$ ler elementer komşuluklarla X'in bir örtüsü olsun. Bu taktirde, $\{f^{-1}(U_i)\}$, I kompakt metrik uzayının bir açık örtüsüdür. X bir kompakt metrik uzay ve $\{G_i\}$, X'in bir açık örtüsü olsun. $\delta > 0$ bir reel sayı olmak üzere eğer X'in yarıçapı δ'dan küçük olan her alt cümlesi en az bir G_i tarafından içeriliyor ise δ sayısına G_i açık örtüsü için bir ***Lebesque sayısı*** denir. X bir kompakt metrik uzay ve $\{G_i\}$ de onun bir açık örtüsü ise Lebesque Lemması, bir lebesque sayısının varlığını verir. n tamsayısını öyle büyük seçelim ki $\frac{1}{n}$ sayısı bu örtünün Lebesque sayısından küçük olsun. I aralığını $[0, \frac{1}{n}]$, $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \ldots, [\frac{n-1}{n}, 1]$ kapalı alt aralıklara parçalayalım. Not edelim ki f her bir alt aralığı X deki bir elementer komşuluğun içine resmeder. Şimdi, $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ den başlayarak g'yi bu alt aralıklar üzerinde ardışık olarak tanımlarız.

Taşınmış g yolunun tekliği, aşağıdaki lemmanın bir sonucudur.

Lemma 3.1.3 : $(\tilde{X}, p)$, X'in bir örtü uzayı ve Y de bağlantılı olan bir uzay olsun. $pf_0 = pf_1$ olacak şekilde verilen herhangi iki $f_0, f_1 : Y \longrightarrow \tilde{X}$ sürekli dönüşümleri için $A = \{ y \in Y : f_0(y) = f_1(y) \}$ cümlesi, ya Y'ye eşittir ya da boş cümledir.

İspat : Y bağlantılı olduğundan A cümlesinin hem açık hem de kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak bu cümlenin kapalı olduğunu ispatlayacağız. y bu cümlenin kapanışının bir noktası ve

$$x = pf_0(y) = pf_1(y)$$

olsun. $f_0(y) \neq f_1(y)$ olduğunu farz edelim. Bu kabulün bir çelişki oluşturduğunu göstereceğiz. U, x'in bir elementer komşuluğu ve V_0 ile V_1 sırasıyla $f_0(y)$ ve $f_1(y)$ içeren $f^{-1}(U)$'nun

bileşenleri olsun. f_0 ve f_1 'in her ikisi de sürekli olduğunda, y'nin bir W komşuluğunu bulabiliriz öyle ki $f_0\ (\ W\ ) \subset V_0$ ve $f_1\ (\ W\ ) \subset V_1$ olur. Fakat bu bir çelişkidir. Çünkü y'nin herhangi bir W komşuluğu sorudaki küme ile aynıdır. Yukarıda ifade edilenler, A cümlesinin her noktasının bir iç nokta olduğunu gösterir.

Lemma 3.1.4 : $(\tilde{X}, p)$, X'in bir örtü uzayı ve $g_0, g_1 : I \longrightarrow \tilde{X}$ aynı başlangıç noktasına sahip olan $\tilde{X}$'daki yollar olsun. Eğer $pg_0 \sim pg_1$ ise bu taktirde $g_0 \sim g_1$ dir. Özellikle, g_0 ve g_1 aynı bitiş noktasına sahiptir.

İspat : Bunun ispatı, esas olarak lemma 3.1.2'nin ispatı ile aynıdır. $\tilde{x}_0$, g_0 ve g_1 in başlangıç noktası olsun. $pg_0 \sim pg_1$ hipotezi,

$$F(s,0) = pg_0(s)$$
$$F(s,1) = pg_1(s)$$
$$F(0,t) = pg_0(0) = p(\tilde{x}_0)$$
$$F(1,t) = pg_0(1)$$

özelliklerini sağlayan bir $F : I \times I \longrightarrow X$ dönüşümünün mevcut olduğunu gösterir. Lebesque sayısında kullanılan yöntem ile, $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ ve $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ sayılarını bulabiliriz öyle ki, F her bir $[\ S_{i-1}, S_i\ ] \times [\ t_{j-1}, t_j\ ]$ küçük dikdörtgenleri X deki bir elementer komşuluk içine resmeder. $pG = F$ ve $G(0,0) = \tilde{x}_0$ olmak üzere bir tek $G : I \times I \longrightarrow \tilde{X}$ dönüşümünün mevcut olduğunu ispatlayacağız. İlk olarak, küçük $[0, s_1] \times [0, t_1]$ dikdörtgeni üzerinde istenilen özellikleri sağlayan G'yi tanımlayalım. Bunun yapılabilir olması açıktır. Çünkü F, bu küçük dikdörtgeni $p(\tilde{x}_0)$ noktasının bir elementer komşuluğuna resmeder. Bu taktirde, herhangi iki ardışık dikdörtgenin ortak kenarları üzerindeki tanımlar aynı olmak şartı ile $i = 1,2,3,\ldots,m$ için $[s_{i-1}, s_i] \times [0, t_1]$ dikdörtgenleri üzerinde G'nin tanımını genişletebiliriz. Şimdi de, G, $I \times [t_1, t_2]$ şeridi içindeki dikdörtgenler üzerinde tanımlanır ve böyle devam edilir.

G'nin tekliği, lemma 3.1.3 den açıktır. Benzer şekilde, lemma 3.1.2'nin teklik iddiasına göre, $G(s,0) = g_0(s)$, $G(0,t) = \tilde{x}_0$, $G(s,1) = g_1(s)$ olduğunu ve

$$p(\tilde{x}_1) = p g_0(1) = p g_1(1)$$

olmak üzere G, $\{1\} \times I$'yı bir $\tilde{x}_1$ tek noktasına resmettiğini görürüz. Böylece G, istenildiği gibi g_0 ve g_1 yolları arasında bir denklik olarak tanımlanır.

Yolların taşınması ile ilgili bu sonuçların bir sonucu olarak aşağıdaki lemmayı ispatlayacağız.

Lemma 3.1.5 : $(\tilde{X}, p)$, X'in bir örtü uzayı ise bu taktirde, her $x \in X$ için $p^{-1}(x)$ kümeleri aynı kardinalite sayısına sahiptir.

İspat : x_0 ve x_1, X'in herhangi iki noktası olsun. x_0 başlangıç noktası ve x_1 bitiş noktası olmak üzere X'de bir f yolunun seçelim. f yolunu kullanarak, aşağıdaki şekilde bir $p^{-1}(x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_1)$ dönüşümü tanımlayabiliriz. Verilen herhangi bir $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ noktası için, f'yi $\tilde{X}$' da başlangıç noktası y_0 olan bir g yoluna taşıyalım öyle ki, $pg = f$ dir. y_1 , g'nin bitiş noktasını göstersin. Bu taktirde, $y_0 \mapsto y_1$ istenilen dönüşümdür. $\overline{f}$ ters yolunu kullanarak, $(\overline{f}(t) = f(1-t)$ şeklinde tanımlanan) benzer yolla bir $p^{-1}(x_1) \longrightarrow p^{-1}(x_0)$ dönüşümünü tanımlayabiliriz. Bu dönüşümler birbirinin tersidir. Buradan, her biri 1-1 ve üzerinedir.

$x \in X$ için, $p^{-1}(x)$ cümlelerinin bu ortak kardinalite sayısına, $(\tilde{X}, p)$ örtü uzayının yapraklarının (tabakalarının) sayısı olarak adlandırılır. $n = \left| p^{-1}(x) \right|$ olmak üzere $(\tilde{X}, p)$'ye X'in $n-$***yapraklı*** ($n-$tabakalı) ***örtüsü*** denir. Eğer $(\tilde{X}, p)$, bir X yüzeyinin bir $n-$yapraklı örtüsü ise bu taktirde $\tilde{X}$ ve X'in Euler karakteristikleri arasında

$$\mathbb{K}(\tilde{X}) = n\mathbb{K}(X)$$

formülü vardır.

Lemma 3.1.4'ün bir sonucu olarak aşağıdaki temel sonucu veririz.

Teorem 3.1.1 : $(\tilde{X}, p)$, X'in bir örtü uzayı, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ve $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ olsun. Bu taktirde, $p_* : \Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow \Pi(X, x_0)$ indüklenmiş homomorfizmi bir monomorfizmdir.

Bu, g_0 ve g_1 kapalı yollar olarak farz edildiğinde, lemma 3.1.4'ün özel durumunun bir direkt sonucudur. Bu teorem aşağıdaki soruya götürür: Farz edelim ki, $\tilde{x}_0$ ve $\tilde{x}_1$, $\tilde{X}$'nın $x_0 = p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$ olan noktaları olsun.

$$p_* : \Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow \Pi(X, x_0)$$
$$p_* : \Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \longrightarrow \Pi(X, x_0)$$

homomorfizmlerin görüntülerini nasıl karşılaştırabiliriz. Bunun için, $\tilde{X}$'da , $\tilde{x}_0$'dan $\tilde{x}_1$'ya giden yolların bir $[\gamma]$ sınıfını seçelim. Bu, $u([\alpha]) = [\gamma]^{-1}[\alpha][\gamma]$ formülü ile bir $u : \Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow \Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ izomorfizmini tanımlar. Böylece, aşağıdaki komutatif diyagramı elde ederiz.

$$\begin{array}{ccc} \Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{p_*} & \Pi(X, x_0) \\ \downarrow u & & \downarrow v \\ \Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) & \xrightarrow{p_*} & \Pi(X, x_0) \end{array}$$

Burada, $v([\beta]) = (p_*[\gamma])^{-1}[\beta](p_*[\gamma])$ şeklindedir. $p_*([\gamma])$ kapalı bir yoldur ve böylece $\Pi(X, x_0)$'ın bir elemanıdır. $\Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ ve $\Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$'nın p_* altındaki görüntülerinin $\Pi(X, x_0)$'ın eşlenik alt grupları olduğunu görürüz.

Şimdi de, şu soru sorulabilir: $p_*\Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ alt grubunun eşlenik sınıfındaki her alt grup, $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ noktasının bir seçimi için, $p_*\Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ görüntüsü olarak elde edilebilir mi? Bu sorunun cevabı evettir. Bunu ispatlamak için, bu eşlenik sınıfındaki herhangi bir alt

grubun uygun bir $[\alpha] \in \prod(X, x_0)$ elemanının seçimi için $[\alpha]^{-1}[\, p_* \prod(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\,][\alpha]$ şeklinde olduğunu not edelim.

$\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ ve $H_0 = p_* \prod(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ ya eşlenik olan $\prod(X, x_0)$ nın bir H alt grubunu alalım. Bu taktirde bir $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ noktası bulmalıyız öyle ki karşılık gelen $H_1 = p_* \prod(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ alt grubu H'a eşit olsun. Yukarıdan x_0 da taban olan X'de bir α ilmeği için

$$H = [\alpha]^{-1} H_0 [\alpha] \quad \text{(veya } H_0 = [\alpha]^{-1} H\, [\alpha])$$

olduğunu biliyoruz. Lemma 3.1.2'den, $\tilde{X}$'da $\tilde{x}_0$ da başlayan α'nın bir taşınmışı γ olsun. Böylece $p\gamma = \alpha$ dır. $\tilde{x}_1$ bu taşınmış yolun bitiş noktası olsun, yani $\tilde{x}_1 = \gamma(1)$ dır. $H_1 = p_* \prod(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ olsun. Bu taktirde, yukarıdan

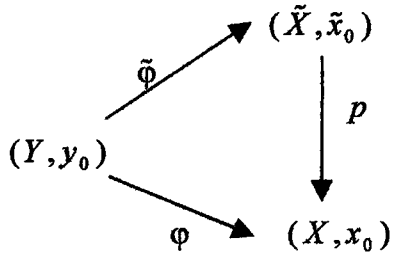
$$H_1 = [\alpha]^{-1} H_0 [\alpha] \quad (\text{ veya } H_0 = [\alpha]^{-1} H_1 [\alpha]\ )$$

olduğundan $H_1 = H$ elde edilir.

Yukarıda ispatladığımız ifadeyi aşağıdaki teoremle ifade edelim. Bu teorem temel grubun alt grupları ve örtüler arasındaki karşılık getirmeyi verir.

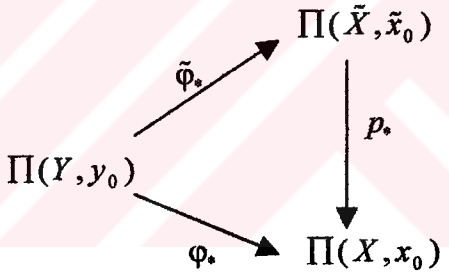
Teorem 3.1.2 : $(\tilde{X}, p)$, X'in bir örtü uzayı, $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ve $p(\tilde{x}) = x$ olsun. Bu taktirde p dönüşümü bir $p_* : \prod(\tilde{X}, \tilde{x}) \longrightarrow \prod(X, x)$ monomorfisini verir, yani örtü uzayının temel grubu X uzayının temel grubunun bir alt grubu olarak göz önüne alınabilir.

Yukarıda, X'deki yolların bir $\tilde{X}$ örtü uzayına taşınmasını inceledik. Şimdi de herhangi bir Y uzayından X'e giden dönüşümler için benzer problemleri inceleyeceğiz. Bu soruyu tartışmak için aşağıdaki notasyonu verelim. X ve Y topolojik uzaylar, $x \in X$ ve $y \in Y$ ise $f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ notasyonu X'den Y'ye $f(x) = y$ olan sürekli bir f dönüşümünü gösterir. $(\tilde{X}, p)$, X'in bir örtü uzayı, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, $y_0 \in Y$ ve $\varphi : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ olsun. Hangi şartlar altında,



diyagramını komütatif yapacak şekilde bir $\tilde{\varphi}:(Y,y_0)\longrightarrow(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ dönüşümü mevcuttur. Eğer böyle bir $\tilde{\varphi}$ dönüşümü mevcutsa, φ, $\tilde{\varphi}$'ya ***taşınabilirdir*** veya $\tilde{\varphi}$, φ'nin ***taşınmışıdır*** denir.

İlgili uzayların temel gruplarının göz önüne alınmasıyla böyle bir $\tilde{\varphi}$'nın taşınmasının varlığı için gerekli bir şart elde etmek kolaydır. Gerçekten, bir $\tilde{\varphi}$ dönüşümünün var olduğunu farz edersek, grupların ve homomorfizmlerin aşağıdaki komütatif diyagramını elde ederiz.



(*) : p_* bir monomorfizm olduğundan bu diyagramı komütatif yapan bir $\tilde{\varphi}_*:\Pi(Y,y_0)\longrightarrow\Pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ homomorfizmin varlığı, tamamen, φ_*'ın görüntüsünün p_*'ın görüntüsünde içerilmiş olması şartına denktir. Bu bizim istediğimiz gerekli şarttır. Bu gerekli şart aynı zamanda yeter şarttır.

Teorem 3.1.3 : $(\tilde{X},p)$, X'in bir örtü uzayı, Y bağlantılı ve lokal yol bağlantılı bir uzay, $\tilde{x}_0\in\tilde{X}$, $x_0=p(\tilde{x}_0)$, $y_0\in Y$ olsun. Verilen bir $\varphi:(Y,y_0)\longrightarrow(X,x_0)$ dönüşümü için bir $\tilde{\varphi}:(Y,y_0)\longrightarrow(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ taşıması mevcuttur ancak ve ancak $\tilde{\varphi}_*\Pi(Y,y_0)\subset p_*\Pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ dır.

İspat : (*) ifadesi ile gerek şart ispatlanmış olur. Geriye yeter şartı ispatlamak kalır. Bunu yapmak için, $\tilde{\varphi}$ dönüşümünü tanımlamalıyız. Aşağıdaki düşünceler gösterir ki, $\tilde{\varphi}$ mevcutsa $\tilde{\varphi}$'yı tanımlamak için genelde tek bir yol vardır. $\tilde{\varphi}$'nın mevcut olduğunu farz edelim. y , Y'nin herhangi bir noktası olsun. Y yol bağlantılı olduğundan başlangıç noktası y_0 ve bitiş noktası y olmak üzere bir $f : I \longrightarrow Y$ yolunu seçebiliriz. X de ve $\tilde{X}$ da sırasıyla φf ve $\tilde{\varphi} f$ yollarını göz önüne alalım. $\tilde{\varphi} f$ yolu, φf yolunun bir taşınmışıdır ve $\tilde{\varphi}(y)$, $\tilde{\varphi} f$ yolunun bitiş noktasıdır.

Bu görüşlerin ışığında, $\tilde{\varphi} : (Y, y_0) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlarız. Verilen herhangi bir $y \in Y$ noktası için başlangıç noktası y_0 ve bitiş noktası y olan bir $f : I \longrightarrow Y$ seçelim. Bu taktirde, φf başlangıç noktası x_0 olan X de bir yoldur. Lemma 3.1.3'ü uygulayarak, bir $g : I \longrightarrow \tilde{X}$ yolunu g'nin başlangıç noktası $\tilde{x}_0$ ve $pg = \varphi f$ olacak şekilde elde edilir. $\tilde{\varphi}(y) = g$ nin bitiş noktası olarak tanımlayalım. Bu tanımın iyi tanımlı olduğunu göstermek için $\tilde{\varphi}(y)$ 'nin f yolunun seçiminden bağımsız olduğunu göstermeliyiz. Lemma 3.1.4'ü kullanarak, $\tilde{\varphi}(y)$ 'nin tanımını değiştirmeden f'yi bir denk yol ile değiştirebileceğimizi görürüz. Yani, $\tilde{\varphi}(y)$ sadece f yolunun $[\alpha]$ denklik sınıflarına bağlıdır. $[\alpha]$ ve $[\beta]$'nın, y_0'dan y'ye giden Y'deki yolların farklı iki denklik sınıfı olduğunu farz edelim. Bu taktirde, $[\alpha][\beta]^{-1}$, y_0 da taban olan kapalı bir yoldur. Buradan, $[\alpha][\beta]^{-1} \in \prod(Y, y_0)$ dır ve teoremin hipotezine göre $\varphi_*([\alpha][\beta]^{-1}) \in p_* \prod(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ dır. Böylece, $\tilde{X}$ daki $\tilde{x}_0$ noktasında taban olan ilmeklerin bir sınıfı vardır öyle ki $(\varphi_*[\alpha])(\varphi_*[\beta])^{-1}$ üzerine izdüşümdür veya eğer, $(\varphi_* \alpha)(\varphi_* \beta)^{-1}$, başlangıç noktası $\tilde{x}_0$ olan $\tilde{X}$ da bir yola taşınmış ise sonuç $\tilde{X}$ da kapalı bir yoldur. Böylece, eğer $\varphi_*[\alpha]$ ve $\varphi_*[\beta]$'nın her ikisi de $\tilde{x}_0$'da başlayan $\tilde{X}$ da ki yollara taşınırsa bu taktirde onlar aynı bitiş noktasına sahiptir.

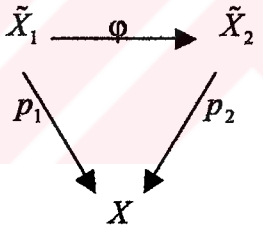
Şimdi böyle tanımlanan $\tilde{\varphi}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu ispatlamalıyız. $y \in Y$ ve U , $\tilde{\varphi}(y)$'nin keyfi bir komşuluğu olsun. $\tilde{\varphi}(V) \subset U$ olacak şekilde X'in bir V komşuluğunun var olduğunu göstermeliyiz. $U' \subset p(U)$ olacak şekilde $p\tilde{\varphi}(y) = \varphi(y)$'nin bir U' elementer komşuluğunu seçelim. W, $\tilde{\varphi}(y)$'yi içeren $p^{-1}(U')$'nün bir yol bileşeni olsun ve U'' de

$U'' \subset p(U \cap V)$ olan $\varphi(y)$'nin elementer bir komşuluğu olsun. $\tilde{\varphi}(y)$'yi içeren $p^{-1}(U'')$'nün yol bileşeninin U da içerildiği gösterilir. φ sürekli olduğundan V'yi $\varphi(V) \subset U''$ olacak şekilde seçebiliriz. Y lokal yol bağlantılı olduğunda V'yi yol bağlantılı olarak da seçebiliriz. $\tilde{\varphi}$'yı tanımladığımız metodumuzdan açık olarak istenilen komütatiflik bağıntısı $p\tilde{\varphi} = \varphi$'yı sağlar.

Uyarı : 1) Lemma 3.1.3'ün ışığında $\tilde{\varphi}$ dönüşümü tektir. $\tilde{\varphi}$'nın tekliği teoremin ispatından da açıktır.
2) Bu teorem, cebirsel topolojinin genel durumunun güzel bir ifadesidir. Tamamen topolojiksel bir soru cebirsel bir soruya indirgenebilir (bir sürekli dönüşümün varlığı kesinlikle şartları sağlar). Bir indirgemenin olması cebirsel topolojinin pek çok durumunda etkili olabilir.

Şimdi verilen bir X uzayının mümkün olan çeşitli örtü uzayları hakkında bazı bilgiler elde etmek istiyoruz. Göreceğimiz gibi, X'in örtü uzaylarının otomorfizmlerini ve homomorfizmlerini göz önüne alarak bu problemi daha fazla anlamaya çalışacağız.

Tanım 3.1.3 : $(\tilde{X}_1, p_1)$ ve $(\tilde{X}_2, p_2)$, X'in örtü uzayları olsun. $(\tilde{X}_1, p_1)$'den $(\tilde{X}_2, p_2)$'ye bir homomorfizm aşağıdaki diyagramı komütatif yapan sürekli bir $\varphi : \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$ dönüşümüdür:



İki homomorfizmin bileşkesi yine bir homomorfizmdir ve eğer $(\tilde{X}, p)$, X'in örtü uzayı ise $\tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ idantik dönüşümü bir homomorfizmdir.

Tanım 3.1.4 : $(\tilde{X}_1, p_1)$'den $(\tilde{X}_2, p_2)$ bir φ homomorfizmine bir ***izomorfizm*** denir ancak ve ancak $(\tilde{X}_2, p_2)$'den $(\tilde{X}_1, p_1)$ içerisine bir ψ homomorfizmi $\psi\varphi$ ve $\varphi\psi$ bileşkelerinin her ikisi de idantik dönüşüm olacak şekilde mevcuttur. İki örtü uzayı arasında bir izomorfizm varsa bu iki örtü uzayına ***izomorfiktir*** (veya denktir) denir. Bir otomorfizma, bir örtü uzayından kendi üzerine bir izomorfizmdir. Bu izomorfizm idantik dönüşüm olabilirde olmayabilirde.

Örtü uzaylarının otomorfizmleri genellikle literatürde örtü dönüşümleri olarak adlandırılır. Örtü uzaylarının bir homomorfizmi bir izomorfizmdir ancak ve ancak bilinen anlamda o, bir homeomorfizmdir. X'in bir $(\tilde{X},p)$ örtü uzayının bütün otomorfizmlerinin cümlesi, dönüşümlerin bileşke işlemi altında bir gruptur. Bu grubu göstermek için $Aut(\tilde{X},p)$ notasyonunu kullanacağız. Böylece X'in bir $(\tilde{X},p)$ örtü uzayının otomorfizm grubu $Aut(\tilde{X},p)=\{\varphi:\tilde{X}\longrightarrow\tilde{X} \mid \varphi$ bir homeomorfizm ve $p\varphi=p\}$ kümesidir.

Şimdi, örtü uzaylarının otomorfizm ve homomorfizmlerinin bazı basit özelliklerini verelim.

Lemma 3.1.6 : φ_0 ve φ_1 , $(\tilde{X}_1,p_1)$'den $(\tilde{X}_2,p_2)$ içerisine homomorfizmler olsun. Eğer $\varphi_0(x)=\varphi_1(x)$ olacak şekilde herhangi bir $x\in\tilde{X}_1$ noktası mevcutsa $\varphi_0=\varphi_1$ dir.

Bu, lemma 3.1.3'ün özel bir halidir.

Sonuç 3.1.1 : $Aut(\tilde{X},p)$ grubu, $\tilde{X}$ uzayı üzerine sabit noktasız etki eder. Yani; $\varphi\in Aut(\tilde{X},p)$ ve $\varphi\neq 1$ ise, φ sabit noktalara sahip değildir.

Lemma 3.1.7 : $(\tilde{X}_1,p_1)$ ve $(\tilde{X}_2,p_2)$, X'in örtü uzayları olsun. $i=1,2$ için $\tilde{x}_i\in\tilde{X}_i$ noktaları da $p_1(\tilde{x}_1)=p_2(\tilde{x}_2)$ olacak şekilde verilsin. Bu taktirde, $\varphi(\tilde{x}_1)=\tilde{x}_2$ olacak şekilde $(\tilde{X}_1,p_1)$'den $(\tilde{X}_2,p_2)$ içine bir φ homomorfizmi mevcuttur ancak ve ancak $p_{1*}\prod(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)\subset p_{2*}\prod(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)$ dir.

Bu, teorem 3.1.3'ün özel bir durumudur.

Sonuç 3.1.2 : Lemma 3.1.7'nin hipotezleri altında, $\varphi(\tilde{x}_1)=\tilde{x}_2$ olacak şekilde $(\tilde{X}_1,p_1)$'den $(\tilde{X}_2,p_2)$ üzerine bir φ izomorfizmi vardır ancak ve ancak $p_{1*}\prod(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)=p_{2*}\prod(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)$ dir.

Bu, izomorfizmin tanımının, sonuç 3.1.1'in ve lemma 3.1.7'nin direkt sonuçlarıdır.

Sonuç 3.1.3 : $(\tilde{X},p)$, X'in örtü uzayı ve $x_0\in X$ için $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\in p^{-1}(x_0)$ olsun. $\varphi(\tilde{x}_1)=\tilde{x}_2$ olacak şekilde bir $\varphi\in Aut(\tilde{X},p)$ otomorfizmi mevcuttur ancak ve ancak $p_{1*}\prod(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)=p_{2*}\prod(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)$ dir.

Bu, sonuç 3.1.2'nin özel halidir.

Teorem 3.1.4 : X'in iki $(\tilde{X}_1, p_1)$ ve $(\tilde{X}_2, p_2)$ örtü uzayı izomorfiktir ancak ve ancak $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2) = x_0$ olacak şekilde herhangi iki $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ ve $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ noktaları için, $p_{1*}\,\Pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ ve $p_{2*}\,\Pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ alt grupları, $\Pi(X, x_0)$ da aynı eşlenik sınıfına aittir.

İspat : İspat sonuç 3.1.2 ve teorem 3.1.2'den yapılır.

Lemma 3.1.8 : $(\tilde{X}_1, p_1)$ ve $(\tilde{X}_2, p_2)$, X'in örtü uzayları olsun. φ'de $\tilde{X}_1$ örtü uzayından $\tilde{X}_2$ örtü uzayına bir homomorfizm olsun. Bu taktirde, $(\tilde{X}_1, \varphi)$, $\tilde{X}_2$'nin bir örtü uzayıdır.

İspat : İlk olarak not edelim ki, her $x \in X$ noktası bir açık, yol bağlantılı U komşuluğuna sahiptir öyle ki bu komşuluk örtü uzaylarının her ikisi içinde x'in bir elementer komşuluğudur. Böyle bir komşuluğu $(\tilde{X}_1, p_1)$ ve $(\tilde{X}_2, p_2)$ örtüleri için x'in U_1, U_2 açık elementer komşuluklarını seçmekle elde edebiliriz. U, x'i içeren $U_1 \cap U_2$'nin yol bileşeni olsun. Şimdi ise, φ'nin $\tilde{X}_1$'yı $\tilde{X}_2$ üzerine resmettiğini göstereceğiz. y, $\tilde{X}_2$'nın herhangi bir noktası olsun. $\varphi(x) = y$ olacak şekilde $\tilde{X}_1$'nın bir x noktasının mevcut olduğunu göstereceğiz

Bir $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ baz noktası seçelim ve $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_0 = p_1(x_1) = p_2(x_2)$ olsun. Başlangıç noktası x_2 ve bitiş noktası y olan $\tilde{X}_2$'da bir f yolunu seçelim ve $g = p_2 f$, X'de görüntü yolu olsun. Lemma 3.1.2 ile başlangıç noktası x_1 olan ve $p_1 h = g$ olan $\tilde{X}_1$'da tek bir h yolu vardır. h'ın bitiş noktası x olsun. Bu taktirde, φh ve f yollarının her ikisi de aynı başlangıç noktasına sahiptir ve $p_2 \varphi h = g = p_2 f$ dir. Böylece, lemma 3.1.2'nin teklik ifadesinden $\varphi h = f$ dir. Dolayısıyla istenildiği gibi, $\varphi(x) = y$ dir. Şimdi, $z \in \tilde{X}_2$'nin herhangi bir elementer komşuluğunun nasıl seçileceği açıktır. $x = p_2(z)$'nin bir U komşuluğunu her iki uzay içinde elementer olacak şekilde seçelim. z'yi içeren $p_2^{-1}(U)$'nun bileşeni W olsun. W istenen özellikleri sağlar.

$\tilde{X}$ basit bağlantılı olmak üzere $(\tilde{X}, p)$, X'in bir örtü uzayı olsun. Eğer, $(\tilde{X}', p')$, X'in bir başka örtü uzayı ise bu taktirde lemma 3.1.7 ile $(\tilde{X}, p)$'den $(\tilde{X}', p')$ 'ye bir φ homomorfizmi vardır. Lemma 3.1.8 ile $(\tilde{X}, \varphi)$, $\tilde{X}'$'nün bir örtü uzayıdır. Yani, $\tilde{X}$, X'in herhangi bir örtü uzayının bir örtü uzayı olarak alınabilir. Bu nedenle, bir basit

bağlantılı örtü uzayına (örneğin; $(\tilde{X}, p)$) ***evrensel örtü uzayı*** denir. Teorem 3.1.4 ile X'in herhangi iki evrensel örtü uzayı izomorfiktir.

X'in bir $(\tilde{X}, p)$ örtü uzayının otomorfizmlerinin grubunu daha ayrıntılı incelemek için herhangi bir $x \in X$ için $p^{-1}(x)$ kümesi üzerinde $\prod(X,x)$ grubunun bir etkisini tanımlarız. Yani; $\prod(X,x)$'i $p^{-1}(x)$ kümesi üzerinde sağ taraftan işleme sokarız. Tanım çok basit ve doğaldır. Bu tanım, yolların taşınması ile ilgili lemma 3.1.2 ve lemma 3.1.3'e bağlıdır.

Tanım 3.1.5 : $(\tilde{X}, p)$, X'in bir örtü uzayı ve $x \in X$ olsun. Herhangi bir $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ noktası ve herhangi bir $[\alpha] \in \prod(X,x)$ için $\tilde{x}.[\alpha] \in p^{-1}(x)$ elemanını aşağıdaki gibi tanımlayalım: Lemma 3.1.2 ve lemma 3.1.3'e göre, $\tilde{X}$ da tek olarak belirli bir $[\tilde{\alpha}]$ yol sınıfı mevcuttur öyle ki $p_*([\tilde{\alpha}]) = [\alpha]$ dır ve $[\tilde{\alpha}]$'nın başlangıç noktası $\tilde{x}$ noktasıdır. $\tilde{x}.[\alpha]$'yı, $[\tilde{\alpha}]$ yol sınıfının bitiş noktası olarak tanımlayalım. Bu taktirde,

$$(\tilde{x}.[\alpha]).[\beta] = \tilde{x}.([\alpha].[\beta])$$
$$\tilde{x}.1 = \tilde{x}$$

formülleri sağlanır. Böylece $\prod(X,x)$ grubu $p^{-1}(x)$ kümesi üzerinde etki eder. Ayrıca $\prod(X,x)$ grubu, $p^{-1}(x)$ kümesi üzerinde geçişmelidir. Gerçekten $\tilde{x}_0$ ve $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x)$ olsun. $\tilde{X}$ yol bağlantılı olarak farz edildiğinden, $\tilde{X}$'da başlangıç noktası $\tilde{x}_0$ ve bitiş noktası $\tilde{x}_1$ olan bir $[\tilde{\alpha}]$ yol sınıfı vardır. $[\alpha] = p_*([\tilde{\alpha}])$ olsun. Bu taktirde, $[\alpha]$ kapalı yolların bir denklik sınıfıdır ve açık olarak $\tilde{x}_0\,[\alpha] = \tilde{x}_1$ dır. Bu ise istenendir.

Tanımdan, herhangi bir $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ noktası için bu noktaya karşılık gelen dengeleyici alt grubu tam olarak $\prod(X,x)$'in $p_*\prod(\tilde{X},\tilde{x})$ alt grubudur. Buradan bir sağ $\prod(X,x)$-uzayı olarak $p^{-1}(x)$, $\prod(X,x)/\,p_*\prod(\tilde{X},\tilde{x})$ yan sınıflarının uzayına izomorftur ve örtü yapraklarının sayısı, $p_*\prod(\tilde{X},\tilde{x})$ alt grubunun indeksine eşittir. Gerçekten, $[\alpha] \mapsto \tilde{x}.[\alpha]$ dönüşümü bütün $p_*\prod(\tilde{X},\tilde{x})[\alpha]$ yan sınıfların kümesinden $p^{-1}(x)$ kümesi üzerine bir 1-1 ve örten dönüşümü verir, yani $p^{-1}(x)$ kümesi, yan sınıfların $\prod(X,x)/\,p_*\prod(\tilde{X},\tilde{x})$

uzayına izomorfiktir. Böylece örtü uzayının yapraklarının sayısı $p_*\prod(\tilde{X},\tilde{x})$ alt grubunun indeksine eşittir.

Şimdi bir örtü uzayının otomorfizmlerinin grubu ile $p^{-1}(x)$ üzerinde $\prod(X,x)$'in etkisi arasında bir bağlantı kuran aşağıdaki önemli sonucu verelim.

Önerme 3.1.1 : Herhangi bir $\varphi \in Aut(\tilde{X},p)$ otomorfizmi, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ noktası ve $[\alpha] \in \prod(X,x)$ için,

$$\varphi(\tilde{x}.[\alpha]) = (\varphi\,\tilde{x}).[\alpha]$$

dır. Yani; her bir $\varphi \in Aut(\tilde{X},p)$ elemanı, bir sağ $\prod(X,x)$ uzayı olarak göz önüne alınan $p^{-1}(x)$ kümesinde bir otomorfizm meydana getirir.

İspat : α'yı başlangıç noktası $\tilde{x}$ olan $\tilde{X}$'da bir $\tilde{\alpha}$ yoluna taşıyalım öyle ki $p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$ olsun. Bu taktirde, $\tilde{x}.\alpha$, $\tilde{\alpha}$ nın bitiş noktasıdır. Şimdi $\tilde{X}$ da $\varphi_*(\tilde{\alpha})$ yolunu göz önüne alalım. Onun başlangıç noktası $\varphi(\tilde{x})$ ve bitiş noktası $\varphi(\tilde{x}.\alpha)$ dır. Dikkat edelim ki,

$$p_*[\,\varphi_*(\tilde{\alpha})\,] = (p\varphi)_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$$

dır. Yani; $\varphi_*(\tilde{\alpha})$ da, α yolunun bir taşınmışıdır. Böylece, tanıma göre, $(\varphi\,\tilde{x}).\alpha$, $\varphi_*(\tilde{\alpha})$ yolunun bitiş noktasıdır. Yani, istenildiği gibi $\varphi(\tilde{x}).\alpha = \varphi(\tilde{x}.\alpha)$ dır.

Şimdi $Aut(\tilde{X},p)$ otomorfizm grubunun yapısını tamamıyla belirleyebiliriz.

Teorem 3.1.5 : $(\tilde{X},p)$, X'in bir örtü uzayı olsun. Bu taktirde $Aut(\tilde{X},p)$ otomorfizm grubu doğal olarak $x \in X$ için bir sağ $\prod(X,x)$- uzayı olarak göz önüne alınan $p^{-1}(x)$ kümesinin otomorfizmlerinin grubuna izomorftur.

İspat : φ, $(\tilde{X},p)$'nin herhangi bir otomorfizmi ise bu taktirde önerme 3.1.1'i göz önünde tutarsak, $\varphi \downarrow p^{-1}(x)$ kısıtlaması bir sağ $\prod(X,x)$-uzayı olarak $p^{-1}(x)$'in bir

otomorfizmidir. Ayrıca, sonuç 3.1.1'den her bir φ otomorfizminin onun $\varphi \downarrow p^{-1}(x)$ kısıtlamasıyla tamamen belirlidir. Diğer bir deyişle, $\varphi \mapsto \varphi \downarrow p^{-1}(x)$ dönüşümü, $Aut(\tilde{X},p)$'den sağ $\prod(X,x)$- uzayı olan $p^{-1}(x)$'in otomorfizmlerinin grubunun içine bir monomorfizmdir. $\varphi \mapsto \varphi \downarrow p^{-1}(x)$ dönüşümünün, $Aut(\tilde{X},p)$'den $p^{-1}(x)$'in otomorfizmlerinin grubunun üzerine bir epimorfizm olduğu sonuç 3.1.3 ve lemma 3.1.1'den görülür. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.1.4 : Herhangi bir $x \in X$ ve herhangi bir $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ noktası için $Aut(\tilde{X},p)$ otomorfizm grubu, $N[\ p_*\prod(\tilde{X},\tilde{x})\ ] \Big/ p_*\prod(\tilde{X},\tilde{x})$ bölüm grubuna izomorftur. Burada $N[\ p_*\prod(\tilde{X},\tilde{x})\ ]$, $\prod(X,x)$ de $p_*\prod(\tilde{X},\tilde{x})$ alt grubunun normalleyenini gösterir (bir G grubun herhangi bir H alt grubunun normalleyeni $N(H) = \{\ g \in G \mid gHg^{-1} = H\ \}$ olarak tanımlanır).

3.2 Düzgün Örtü Uzayları ve Bölüm Uzayları

Örtü uzaylarının özellikle önemli bir sınıfı $p_*(\prod(\tilde{X},\tilde{x}))$ nın $\prod(X,x)$'de bir normal alt grup olması durumuna karşılık gelir. Bu durum, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ noktasının seçiminden bağımsızdır. Böyle bir örtü uzayına ***düzgün*** *(* regüler *)* ***örtü uzayı*** diyeceğiz.

Tanım 3.2.1 : X'in bir $(\tilde{X},p)$ örtü uzayına ***düzgündür*** *(* regülerdir *)* denir ancak ve ancak $p_*(\prod(\tilde{X},\tilde{x}))$, $\prod(X,x)$'in bir normal alt grubudur.

Teorem 3.2.1 : $(\tilde{X},p)$, X'in bir düzgün örtü uzayı ve $Aut(\tilde{X},p)$ de örtü dönüşümlerinin grubu olsun. Bu taktirde herhangi bir $x \in X$ ve herhangi bir $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ için

$$Aut(\tilde{X},p) \cong \prod(X,x) \Big/ p_*\prod(\tilde{X},\tilde{x})$$

dır.

İspat : $p_*(\prod(\tilde{X},\tilde{x}))$ bir normal alt grup olduğundan $N(p_*(\prod(\tilde{X},\tilde{x}))) = \prod(X,x)$ dir. Böylece sonuç 3.1.4'den

$$Aut(\tilde{X},p) \cong \prod(X,x) \big/ p_*\prod(\tilde{X},\tilde{x})$$

elde edilir.

Bu sonuç özellikle evrensel örtü uzaylarına da uygulanır.

Sonuç 3.2.1 : $(\tilde{X},p)$, X'in bir evrensel örtü uzayı olsun. Bu taktirde $Aut(\tilde{X},p)$, $\prod(X)$'e izomorftur ve $\prod(X,x)$ grubunun mertebesi $(\tilde{X},p)$ örtü uzayının yapraklarının sayısına eşittir.

$(\tilde{X},p)$, X'in bir örtü uzayı olsun. p bir açık dönüşüm olduğundan X, p ile elde edilen bölüm topolojisine sahiptir. Böylece, belirli noktaları tanımlanan bir metot ile X'in $\tilde{X}$'dan elde edildiğine dikkat edilebilir: Herhangi bir $x \in X$ noktası için $p^{-1}(x)$ kümesinin bütün noktaları tek bir nokta olarak tanımlanır. Hatırlatalım ki, $Aut(\tilde{X},p)$ otomorfizm grubu, $p^{-1}(x)$ kümesinin noktalarını kendileri arasında yer değiştirir. Genellikle, $\tilde{X} \big/ Aut(\tilde{X},p)$ bölüm uzayının doğal olarak X'e homeomorfik olması doğru değildir. Çünkü farklı $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$ noktaları mevcut olabilir öyle ki $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ olacak şekilde $\varphi \in Aut(\tilde{X},p)$ otomorfizmi bulunamayabilir. Diğer bir deyişle, $Aut(\tilde{X},p)$ otomorfizm grubunun $p^{-1}(x)$ üzerinde geçişli bir etki olmasına gerek yoktur.

Lemma 3.2.1 : $(\tilde{X},P)$, X'in bir örtü uzayı olsun. $Aut(\tilde{X},p)$ otomorfizm grubu $x \in X$ için $p^{-1}(x)$ üzerinde geçişli olarak etkir ancak ve ancak $(\tilde{X},p)$, X'in bir düzgün örtü uzayıdır.

Bu, teorem 3.1.2 ve sonuç 3.1.3'ün bir sonucudur.

Böylece eğer, $(\tilde{X},P)$, X'in bir düzgün örtü uzayı ise bu taktirde X doğal olarak $\tilde{X} \big/ Aut(\tilde{X},p)$ bölüm uzayına homeomorfiktir. Bu bizi aşağıdaki doğal soruya götürür:

Y bir topolojik uzay ve G, Y'nin homeomorfizmlerinin bir grubu olsun. $p: Y \longrightarrow Y/G$, Y'den onun bölüm grubu üzerine olan doğal dönüşümü göstersin. Hangi şartlar altında (Y,p), $Aut(Y,p) = G$ olmak üzere Y/G'nin düzgün örtü uzayı olur? İlk olarak, sağlanması gereken bazı gerekli şartların olduğu açıktır. Örneğin; $(\tilde{X},p)$, X'in bir düzgün örtü uzayı ise bu taktirde $Aut(\tilde{X},p)$, $\tilde{X}$ üzerinde sabit noktasız etki eder. $Aut(\tilde{X},p)$ grubunun etkisi altında herhangi bir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ noktasının yörüngesi de, (yani; $\{\varphi(\tilde{x}) : \varphi \in Aut(\tilde{X},p)\}$ noktalarının kümesi) $\tilde{X}$'nın bir ayrık kapalı alt cümlesidir. Aslında, aşağıdaki daha kuvvetli şart sağlanır: Her $\tilde{x} \in \tilde{X}$ noktası bir U komşuluğuna sahiptir öyle ki $\varphi \in Aut(\tilde{X},p)$ olmak üzere $\varphi(U)$ kümeleri ikili tarzda ayrıktırlar (U'yu, X'deki uygun bir elementer komşuluğun ters görüntüsünün bir bileşeni olarak seçebiliriz). Bu şartı sağlayan homeomorfizmlerinin bir grubuna ***has*** *(*properly*)* ***süreksizdir*** denir. Not edelim ki, homeomorfizmlerin has süreksiz grubu sabit-nokta serbesttir. Bu gerekli şartlar, yeter şartı da meydana getirir.

Önerme 3.2.1 : Y bağlantılı, lokal yol bağlantılı bir topolojik uzay ve G, Y'nin homeomorfizmlerin has süreksiz bir grubu olsun. $p: Y \longrightarrow Y/G$, Y'den Y'nin bölüm uzayına doğal izdüşümü göstersin. Bu taktirde, (Y,p), Y/G'nin bir düzgün örtü uzayıdır ve $G = Aut(Y,p)$ dir.

İspat : $x \in Y/G$ olsun. x'in bir elementer komşuluğa sahip olduğunu göstermeliyiz. Bir $y \in Y$ seçelim öyle ki $p(y) = x$ olsun. Hipoteze göre, y'nin bir N komşuluğu vardır öyle ki $\varphi \in G$ ler için $\varphi(N)$ ler ikili tarzda ayrıktırlar. Y lokal yol bağlantılı olduğundan, $V \subset N$ olacak şekilde y'nin açık, yol bağlantılı bir V komşuluğu vardır. $U = p(V)$ olsun. U'nun, x'in bir elementer komşuluğu olduğunu iddia ediyoruz.

p bir açık dönüşüm olduğundan U bir açık cümledir ve yol bağlantılı olduğu açıktır. Ayrıca, p, V'yi U üzerine bire bir ve sürekli olarak resmeder ve p bir açık dönüşüm olduğundan o, V'den U üzerine bir homeomorfizmdir. Eğer W, V'den farklı $p^{-1}(U)$'nun herhangi bir bileşeni ise bu taktirde $W = \varphi(V)$ olacak şekilde bir $\varphi \in G$ bir vardır. φ, V'den W üzerine bir homeomorfizm ve $p = p\varphi$ olduğundan p, W'yi homeomorfik olarak U üzerine resmeder. Böylece, U, x'in bir elementer komşuluğudur ve (Y,p), Y/G'nin bir

örtü uzayıdır. Açık olarak, her $\varphi \in G$ (Y,p)'nin bir otomorfisidir. Böylece $G \subset Aut(Y,p)$ olur. G'nin $Aut(Y,p)$'nin bir öz alt grubu olarak farz edilmesi, $Aut(Y,p)$'nin sabit noktalar ile elemanlara sahip olmasını gerektirdiğini yukarıda gördük. Böylece $G = Aut(Y,p)$ dir. Son olarak, (Y,p)'nin Y/G'nin düzgün örtü uzayı olduğu lemma 3.2.1'den görülür.

Örnek 3.2.1 : $Y = \mathbb{R}$ reel doğru ve herhangi bir n tamsayısı için $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü $\varphi_n(x) = x+n$ şeklinde tanımlayalım. $G = \{ \varphi_n : n \in \mathbb{Z} \}$ olsun. Bu taktirde, G, $\mathbb{R}$'nin homeomorfizmlerinin bir has süreksiz grubudur. Gerçekten, herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ için U'yu $\left(x-\frac{1}{3}, x+\frac{1}{3} \right)$ açık aralığı olarak alırsak bu taktirde $\varphi_n(U)$ komşulukları ikişer tarzda ayrıktırlar. Böylece, önerme 3.2.1 ile $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}/G$ bölüm uzayının bir düzgün örtü uzayıdır. Bölüm uzaylarındaki belirli teoremlere göre, $\mathbb{R}/G$ ($[0,1]$ aralığının iki uç noktasını aynı nokta olarak tanımlamakla elde edilen) $[0,1]$ kapalı birim aralığının bölüm uzayına homeomorfiktir. Böylece $\mathbb{R}/G$ bir çemberdir. Bir çemberin evrensel örtü uzayının reel doğru ve otomorfizmlerin grubunun sonsuz devirli olduğunu bir kez daha ispatladık.

Örnek 3.2.2 : $Y = S^n$, $(n+1)$ boyutlu Öklid uzayında birim $n-$küresi ve $T : S^n \longrightarrow S^n$ $x \in S^n$ için $T(x) = -x$ şeklinde tanımlı karşıt dönüşümü olsun. Açık olarak, T^2 birim dönüşümdür. Böylece, T 2.mertebeden devirli olan S^n nin homeomorfizmlerinin bir G grubunu üretir. G'nin homeomorfizmlerin bir has süreksiz grubu olduğu açıktır. Buradan, S^n bir $n-$boyutlu reel projektif uzay olan S^n/G nin örtü uzayıdır. S^n basit bağlantılı olduğundan, o bir evrensel örtü uzayıdır ve bir $n-$boyutlu reel projektif uzayın temel grubu, mertebesi 2 olan bir gruptur.

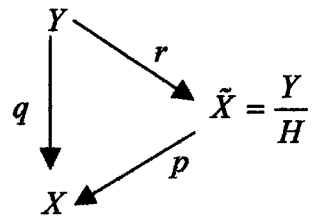
X'in bir $(\tilde{X},p)$ örtü uzayının, $\Pi(X,x)$'in $p_*\Pi(\tilde{X},\tilde{x})$ alt grubunun eşlenik sınıfı ile izomorfizmaya kadar belirlendiğini ispatlamıştık. Bu gerçek, aşağıdaki soruya neden olur: Farz edelim ki X bir topolojik uzay ve $\Pi(X,x)$'in alt gruplarının bir eşlenik sınıfı verilsin. X'in bir $(\tilde{X},p)$ örtü uzayı $p_*\Pi(\tilde{X},\tilde{x})$ verilen eşlenik sınıfına ait olacak şekilde mevcut mudur? X'in ilave bir hipotezi sağladığı durumda bu sorunun olumlu bir cevabı olabileceğini göstereceğiz.

İlk olarak, alt grupların verilen eşlenik sınıfının trivial alt grup $\{1\}$'i içermesi özel durumu için bu problemi göz önüne almanın yeterli olacağını gösterelim.

Lemma 3.2.2 : X, evrensel bir örtü uzayına sahip olan bir topolojik uzay olsun. Bu taktirde, $\prod(X,x)$'in alt gruplarının herhangi bir eşlenik sınıfı için X'in bir $(\tilde{X},p)$ örtü uzayı vardır öyle ki $p_*\prod(\tilde{X},\tilde{x})$ verilen eşlenik sınıfına aittir.

İspat : (Y,q), X'in bir evrensel örtü uzayı olsun. Yani; Y basit bağlantılıdır. Böylece, $\prod(X,x)$, $q^{-1}(x)$ kümesi üzerinde sağdan geçişli olarak etki eder ve Y basit bağlantılı olduğundan o, sabit noktasız etki eder. $Aut(Y,q)$ otomorfizmlerinin grubu da $\prod(X)$'e izomorfiktir ve $q^{-1}(x)$ kümesi üzerinde soldan sabit noktalar olmadan geçişli olarak etkir. Bir $y \in q^{-1}(x)$ noktasını ve $\prod(X,x)$'in verilen eşlenik sınıfına ait olan bir G alt grubunu seçelim. H, aşağıdaki gibi tanımlanan $Aut(Y,q)$'nun bir alt grubu olsun: $\varphi \in H$ dır ancak ve ancak bir $\alpha \in G$ elemanı vardır öyle ki $\varphi(y) = y.\alpha$ dır. G ve H'ın aşağıdaki eşleme altında izomorfik olduğu açıkça görülür: $\varphi \longleftrightarrow \alpha$ ancak ve ancak $\varphi(y) = y.\alpha$ dır.

H, $Aut(Y,q)$'nun bir alt grubu olduğundan, H Y'nin homeomorfizmlerinin has süreksiz bir grubudur. $\tilde{X}$, Y/H bölüm uzayını, $r : Y \longrightarrow \tilde{X}$ doğal izdüşümü ve $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ de $q : Y \longrightarrow X$ tarafından elde edilmiş dönüşümü göstersin. Bu taktirde aşağıdaki komütatif diyagramı elde ederiz.



Kabulümüz ile, (Y,q) X'in bir örtü uzayı ve önerme 3.2.1'ye göre (Y,r)'de $\tilde{X}$'nın bir örtü uzayıdır. $(\tilde{X},p)$'nin X'in bir örtü uzayı olduğunu görmek kolaydır. $(\tilde{X},p)$, X'in bir

örtü uzayı olduğundan, $\Pi(X,x)$ grubu $p^{-1}(x)$ kümesi üzerinde sağdan etkir. $\tilde{x} = r(y) \in p^{-1}(x)$ olsun. $\tilde{X}$ nın inşasına göre, $\tilde{x}$ noktasına karşılık gelen $\Pi(X,x)$'in $\tilde{x}$ dengeleyeninin alt grubunun G alt grubu olduğu açıktır. Fakat bu, tamamen $p_*\Pi(\tilde{X},\tilde{x}) = G$ iddiasına denktir.

Şimdi aşağıdaki problemi göz önüne alalım : Bir X topolojik uzayı verildiğinde, X'in bir evrensel örtü uzayı var mıdır? İlk olarak, oldukça basit bir gerekli şartı elde ederiz. $(\tilde{X},p)$, X'in bir evrensel örtü uzayı, x, X'in keyfi bir noktası, $\tilde{x}$, $p^{-1}(x)$'de bir nokta, U, x'in bir elementer komşuluğu ve V'de $\tilde{x}$ noktasını içeren $p^{-1}(U)$'nun bir bileşeni olsun. Bu taktirde temel gruplar arasında aşağıdaki komütatif diyagramı verebiliriz :

$$\begin{array}{ccc} \Pi(V,\tilde{x}) & \longrightarrow & \Pi(\tilde{X},\tilde{x}) \\ \downarrow{\scriptstyle (p/V)_*} & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ \Pi(U,x) & \xrightarrow{\ i_*\ } & \Pi(X,x) \end{array}$$

$p{\downarrow}V$, V'den U üzerine bir homeomorfizm olduğundan, $(p{\downarrow}V)_*$ bir izomorfizmdir. Hipoteze göre, $\Pi(\tilde{X},\tilde{x}) = \{1\}$ dir. Bu diyagramın komütatifliği ve bu iki durumdan, i_*'ın bir trivial homomorfizm olduğu görülür. Yani; $gör\, i_* = \{1\}$ dir. Böylece, X uzayının aşağıdaki özelliğe sahip olduğu sonucunu çıkarırız: Her $x \in X$ noktası bir U komşuluğuna sahiptir öyle ki $\Pi(U,x) \longrightarrow \Pi(X,x)$ homomorfizmi trivialdir. Bu özelliğe sahip olan bir uzaya ***yarı-lokal basit bağlantılı*** denir. Bu tanımda aşağıdaki gibi ifade edilebilir: Bir X uzayı yarı lokal olarak basit bağlantılıdır ancak ve ancak her $x \in X$ noktası bir U komşuluğuna sahiptir öyle ki U'da herhangi bir ilmek, X'de bir noktaya büzülebilir.

Aşağıdaki örnek, bağlantılı ve lokal yol bağlantılı olan fakat yarı lokal basit bağlantılı olmayan bir uzayın basit bir örneğidir:

Herhangi bir n pozitif tamsayısı için;

$$C_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-\frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}$$

olsun. Yani; C_n merkezi $\left(\frac{1}{n},0\right)$, yarıçapı $\frac{1}{n}$ olan bir çemberdir. X, bütün n pozitif tamsayıları için C_n çemberlerinin birleşimini göstersin. Bu taktirde, X yarı lokal basit bağlantılı değildir. $(0,0)$ noktası, istenen türden komşuluğa sahip değildir.

Örtü uzaylarını içeren matematiğin diğer dallarındaki problemlerde ortaya çıkan topolojik uzayların çoğu yarı lokal basit bağlantılıdır. Örneğin; bütün manifoldlar ve sınırlı manifoldlar bu özelliğe sahiptir.

Şimdi bir evrensel örtü uzayının varlığı için şartın aynı zamanda da yeterli şart olduğunu ispatlayacağız.

Teorem 3.2.2 : X bağlantılı, lokal yol bağlantılı ve yarı lokal basit bağlantılı topolojik uzay olsun. Bu taktirde, $\Pi(X,x)$'in alt gruplarının herhangi bir eşlenik sınıfı verildiğinde, verilen bu eşlenik sınıfa karşılık gelen X'in bir $(\tilde{X},p)$ örtü uzayı vardır (yani; $p_*\Pi(\tilde{X},\tilde{x})$ verilen eşlenik sınıfına aittir).

İspat : Lemma 3.2.2'ye bakarsak, X'in bir evrensel örtü uzayı olduğunu ispatlamak yeterlidir.

Bir an için, X'in $(\tilde{X},p)$ evrensel örtü uzayına sahip olduğunu farz edelim. Bir $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ taban noktasını seçelim ve $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ olsun. Verilen herhangi bir $y \in \tilde{X}$ noktası için, başlangıç noktası $\tilde{x}_0$ ve bitiş noktası y olan bir $[\alpha]$ yol sınıfı vardır, çünkü $\tilde{X}$ yolu bağlantılıdır. $\tilde{X}$ basit bağlantılı olduğundan bu yol sınıfı tektir. Şimdi, y noktasını $p_*(\alpha)$ noktasına götüren fonksiyonu göz önüne alalım. Lemma 3.1.2 ve 3.1.3'den, bunun Y'den başlangıç noktası x_0 olan X'deki yol sınıflarının kümesi üzerine bire bir bir dönüşüm olduğu görülür. Böylece, x_0 noktasında başlayan X'deki yol sınıflarını $\tilde{X}$'nın noktaları olarak tanımlarız. Bu basit gözlem, aşağıdaki inşanın temelidir.

Bir $x_0 \in X$ baz noktasını seçelim ve $\tilde{X}$'yı X'de başlangıç noktası x_0 olan $[\alpha]$ yollarının bütün denklik sınıflarının kümesi olarak tanımlayalım. Bir $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ fonksiyonunu $p([\alpha])$, $[\alpha]$ yol sınıfının bitiş noktasına eşit olacak şekilde tanımlayalım. Şimdi $\tilde{X}$'nın nasıl bir topolojik uzay yapmalıyız ki $\tilde{X}$ basit bağlantılı uzay ve $(\tilde{X}, p)$ X'in bir örtü uzayı olsun.

Bizim hipotezimiz, X üzerindeki topolojinin aşağıdaki özellikler ile birlikte açık U cümlelerinin içerdiği bir baza sahip olduğunu sağlar: U yol bağlantılıdır ve $\prod(U) \longrightarrow \prod(X)$ (içerme dönüşümü ile elde edilen) homomorfizmi trivialdir. Denk olarak, U'daki her kapalı yol (X'de) bir sabit yola denktir. Kısalık için, böyle bir açık U cümlesini esas olarak adlandıralım. Not edelim ki; eğer x ve y bir esas açık U cümlesinde herhangi iki nokta ise bu taktirde başlangıç noktası x ve bitiş noktası y olan U'daki herhangi iki f ve g yolları (X'de) denktir.

Herhangi bir $[\alpha] \in \tilde{X}$ yol sınıfı ve $p(\alpha)$ son noktasını içeren herhangi bir esas açık U cümlesi verilsin ve (α, U) ile U'da bir $[\alpha']$ yol sınıfı için $\beta = \alpha\alpha'$ olan bütün $\beta \in \tilde{X}$ yollarının kümesini gösterelim. Bu taktirde (α, U), $\tilde{X}$ nın bir alt kümesidir. Açık cümlelerin bir baz ailesi olarak bu şekildeki bütün (α, U) kümelerinin ailesini seçerek $\tilde{X}$ yı oluştururuz. (α, U) formundaki bütün cümlelerin ailesinin $\tilde{X}$ üzerinde bir topoloji için bir baz olabilmesi için aşağıdaki ifadeyi ispatlamak gereklidir: Eğer $\gamma \in (\alpha, U) \cap (\beta, V)$ ise, bu taktirde bir esas açık W alt cümlesi vardır öyle ki, $(\gamma, W) \subset (\alpha, U) \subset (\beta, V)$ dir. Bununla birlikte, bu ifadenin ispatı kolaydır: W'yi $p(\gamma) \in W \subset U \cap V$ olacak şekilde herhangi bir esas açık cümle olarak seçelim. $(\tilde{X}, p)$'nin X'in bir evrensel örtü uzayı olduğunu ispatlamadan önce aşağıdaki iki basit incelemeyi yapmak uygundur :

a) $\alpha \in \tilde{X}$ ve U, $p(\alpha)$'nın bir basit açık komşuluğu olsun. Bu taktirde, $p\downarrow(\alpha, U)$, (α, U)'dan U üzerine bir bire bir dönüşümdür.

b) U, herhangi bir esas açık cümle ve x, U'nun bir noktası olsun. Bu taktirde, $p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda} (\alpha_\lambda, U)$ dur. Burada $\{\alpha_\lambda\}$, başlangıç noktası x_0 ve bitiş noktası x olan X deki bütün yol sınıflarının hepsini gösterir. Üstelik, (α_λ, U) cümlesi ikili tarzda ayrıktır.

Not edelim ki; p'nin sürekli olması (b) den görülür. Böylece, $p\downarrow(\alpha,U)$ (a)'ya göre (α,U)'dan U üzerine bir bire bir sürekli dönüşümdür. İddia ederiz ki, $p\downarrow(\alpha,U)$, (α,U)'dan U üzerine bir açık dönüşümdür. Gerçekten, (α,U)'nun herhangi bir açık kümesi, (β,V) formundaki kümelerin birleşimidir. Burada $V \subset U$ dur. Böylece, $p\downarrow(\alpha,U)$'nun da açık olduğu (a) şıkkından görülür. Buna göre, p, (α,U)'yu U üzerine homeomorfik olarak dönüştürür. U yol bağlantılı olduğundan, (α,U)'da yol bağlantılıdır. (b) ifadesindeki (α_λ,U) cümleleri ikili tarzda ayrık olduğundan herhangi bir esas açık $U \subset X$ kümesinin bir elementer komşuluğunun istenilen bütün özelliklere sahip olduğu görülür.

Şimdi de, $\tilde{X}$ uzayının yol bağlantılı olduğunu ispatlayacağız. $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, x_0 noktasında sabit yolun denklik sınıfını göstersin. Herhangi bir $\alpha \in \tilde{X}$ noktası verilsin. $\tilde{x}_0$ ve α noktalarını birleştiren bir yayı belirlemek yeterlidir. Bu amaç için, α denklik sınıfına ait olan bir $f: I \longrightarrow X$ yolunu seçelim. Herhangi bir $s \in I$ reel sayısı için, $f_s(t) = f(st)$ ile $f_s: I \longrightarrow X$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu taktirde, x_0'da, $f_1 = f$ ve $f_0 = sabit$ yoldur. α_s, f_s yolunun denklik sınıfını göstersin. $s \longrightarrow \alpha_s$ dönüşümünün $I \longrightarrow \tilde{X}$ sürekli bir dönüşüm olduğunu iddia ederiz. Yani; $\tilde{X}$ da bir yoldur. Bu iddiayı ispatlamak için, şunu kontrol etmeliyiz. Herhangi bir $s_0 \in I$ ve $f(s_0)$'ın herhangi bir esas U komşuluğu için bir $\delta > 0$ reel sayısı vardır öyle ki, eğer $|s - s_0| < \delta$ ise bu taktirde $\alpha_s \in (\alpha_{s_0}, U)$ dur. Bu amaç için δ'yı $|s - s_0| < \delta$ olduğundan $f(s) \in U$ olacak şekilde seçelim. f sürekli olduğundan böyle bir δ sayısı vardır. Böylece, $s \longrightarrow \alpha_s$ başlangıç noktası $\tilde{x}_0$ ve bitiş noktası α olan $\tilde{X}$'da bir yoldur. Buda istenendir.

Son olarak, $\tilde{X}$'nın basit bağlantılı olduğunu ispatlamalıyız. $p_*\prod(\tilde{X},\tilde{x}_0)$, $p^{-1}(x_0)$ üzerinde $\prod(X,x)$'in etkisi için $\tilde{x}_0$ noktasına karşılık gelen dengeleyici alt grubudur. Böylece, herhangi bir $[\alpha] \in \prod(X,x_0)$ için $\tilde{x}_0.\alpha$'yı belirlemeliyiz. α denklik sınıfına ait olan kapalı bir $f: I \longrightarrow X$ yolunu seçelim ve bir önceki paragraftaki metot ile $\tilde{X}$ da $s \longrightarrow \alpha_s$ yolunu tanımlayalım. $\tilde{X}$ da bu yol başlangıç noktası olarak $\tilde{x}_0$'ya bitiş noktası olarak

$\alpha \in \tilde{X}$'ya sahiptir ve açık olarak f yolunun taşınmışıdır. Böylece, $p^{-1}(x_0)$ üzerinde $\prod(X, x_0)$'ın etkisinin tanımından $\tilde{x}_0.[\alpha] = [\alpha]$ dır. Dolayısıyla $\tilde{x}_0.[\alpha] = \tilde{x}_0$ ancak ve ancak $[\alpha] = 1$ dir. Böylece istenildiği gibi dengeleyici alt grup sadece 1 elemanını içerir.

3.3 Epimorfizmlerin ve Düzgün Yüzey Örtülerinin Sayılması

Bu bölümde, verilen sonlu bir G örtü grubu ile g cinsli kompakt, bağlantılı, yönlendirilebilir (yönlendirilemeyen ve delikli) yüzeylerin denk olmayan düzgün örtülerin sayısı belirlenecektir. Bunun için bölüm 2'de verilen sayma teoremleri ile bölüm 1'de P.Hall'ün metodu birlikte kullanılacaktır. Cebirsel topolojiden iyi bilinen "$\prod_g$ nin N normal alt grupları ile $\sum_g$ nin düzgün dallanmamış örtülerinin denklik sınıfları arasında bire bir bir karşılık getirme vardır" ifadesi, denk olmayan düzgün örtülerin sayısının bulunması probleminin topolojik yapıdan grup teorik yapıya taşır. $\prod_g$ nin bu N normal alt grupları, G örtü dönüşümleri grubu olmak üzere $\prod_g$ den G'ye epimorfilerin çekirdeklerine karşılık gelir. Önce bu epimorfilerin $\phi_g(G) = \left| Epi(\prod_g, G) \right|$ sayısını bulmak için sayılar teorisinden bilinen Möbius Inversion Formülünün, P.Hall tarafından verilen cebirsel versiyonu kullanılır. Böylece $N_g(G) = \{ N \lhd \prod_g : \prod_g / N \cong G \}$ kümesinin eleman sayısı elde edilmiş olur. Son olarak da, denk olmayan örtülerin sayısını bulmak içinde epimorfilerin kümesi üzerinde $Aut(G)$'nin etkisi altında yörüngelerin sayısını buluruz.

Bu bölümde yukarıda ifade edilen yöntem bir çok sonlu G grubuna uygulanmıştır.

Tanım 3.3.1 : Kapalı bir yüzeyin (yönlendirilebilir veya yönlendirilemeyen) temel grubuna (sırasıyla, yönlendirilebilir veya yönlendirilemeyen) bir ***örtü grubu*** denir.

Aşağıdaki teorem bir yüzeyin örtü yüzeyinin yönlendirilebilir veya yönlendirilemez olması durumunu karakterize eder. Yönlendirilebilir bir yüzeyin örtü yüzeylerinin yine yönlendirilebilir fakat yönlendirilemeyen yüzeylerin örtü yüzeylerinin yönlendirilebilir veya yönlendirilemeyen olabileceğini verir.

Teorem 3.3.1 : $G=\prod(X)$, kapalı bir X yüzeyinin temel grubu ve H'da G'nin sonlu indeksli bir alt grubu olsun. Bu taktirde H bir örtü grubuna izomorfiktir. Eğer $\sum_g$, g cinsli bir yönlendirilebilir yüzey ise bu taktirde H, cinsi

$$|G:H|(g-1)+1$$

olan yönlendirilebilir bir yüzeyin temel grubuna izomorfiktir.

Eğer $\sum_g^-$, g cinsli bir yönlendirilemeyen bir yüzey ise bu taktirde H, cinsi

$$|G:H|(g-2)+2$$

olan yönlendirilemeyen bir yüzeyin temel grubuna veya cinsi $\frac{1}{2}|G:H|(g-2)+1$ olan yönlendirilebilir bir yüzeyin temel grubuna izomorfiktir.

Son olarak da, eğer $G=\prod_g^-$, g cinsli yönlendirilemeyen bir $\sum_g^-$ yüzeyinin temel grubu ise bu taktirde G, 2 indeksli bir alt grup içerir. Bu alt grup $g-1$ cinsli yönlendirilebilir bir $\sum_{g-1}$ yüzeyinin temel grubu $\prod_{g-1}$'e izomorfiktir [19].

Şimdi yönlendirilebilir ve yönlendirilemeyen yüzeylerin düzgün örtülerini ayrı ayrı inceleyelim.

1) Yönlendirilebilir Yüzeyler

$\sum_g$ cinsi g olan kompakt, bağlantılı, yönlendirilebilir bir yüzey olsun. Böylece $\sum_g$ nin $\prod_g$ temel grubu yegane

$$[A_1,B_1]\ldots[A_g,B_g]=1$$

belirleyici bağıntısıyla $2g$ tane $A_1,B_1,\ldots,A_g,B_g$ elemanları tarafından üretilir.

G sonlu bir grup olsun. Bu taktirde $\prod_g$ den G'ye homomorfizmler

$$[a_1,b_1]\ldots[a_g,b_g]=1 \qquad (3.3.1)$$

denkleminin G'de $a_1,b_1\ \ldots\ a_g,b_g$ çözümleri ile bire bir karşılık gelir. Buradan teorem 2.3.2, G'de (3.3.1) denkleminin çözümlerinin

$$\sigma_g(G)=\left|Hom\,(\prod_g,G)\right|$$

sayısını verir. G'nin alt grup latisi üzerinde Möbius Inversion Formülünü kullanarak, G'yi üreten çözümlerin sayısını buluruz, yani, $\prod_g$ den G üzerine epimorfizmlerin sayısını

$$\phi_g(G)=\left|Epi\,(\prod_g,G)\right| \qquad (3.3.2)$$

olarak buluruz. Fakat bu bulunan epimorfizmlerin hepsinin farklı çekirdeği vermesi gerekmez. Bunun için $Aut(G)$'nin $Epi\,(\prod_g,G)$ üzerindeki etkisine bakmalıyız. Herhangi iki θ_1,θ_2 epimorfizmleri aynı $N\lhd\prod_g$ çekirdeğine sahiptir ancak ve ancak $\theta_2=\theta_1\alpha$ olacak şekilde bir $\alpha\in Aut(G)$ vardır. Yani; ancak ve ancak $\alpha\in Aut(G)$, (3.3.1) denkleminin birinci çözümünü ikinci çözümüne gönderir. Böylece bu şekildeki çekirdeklerin $n_g(G)=\left|\{\,N\lhd\prod_g:\prod_g/N\cong G\,\}\right|$ sayısı, $Epi\,(\prod_g,G)$ üzerinde bileşke ile etki eden $Aut(G)$'nin yörüngelerinin $\left|Epi(\prod_g,G)/Aut(G)\right|$ sayısına eşittir. $Aut(G)$'nin üretici kümeleri, ve böylece epimorfizmleri (sabit-nokta-serbest olarak) değiştireceğinden bütün yörüngelerin uzunluğu $\left|Aut(G)\right|$ dir. Böylece

$$n_g(G)=\frac{\phi_g(G)}{\left|Aut(G)\right|} \qquad (3.3.3)$$

dir.

Şimdi $N \in N_g(G) = \left|\{ N \lhd \prod_g : \prod_g / N \cong G \}\right|$ normal alt grupları, örtü grubu G olmak üzere, düzgün dallanmamış $\sum \longrightarrow \sum_g$ örtülerinin denklik sınıflarıyla bire - bir karşılık getirildiğinden $n_g(G)$ bu şekildeki sınıfların sayısını verir. Her bir durumda $\tilde{\sum}$ yönlendirilebilirdir. Ayrıca χ, $\sum_g$ nin Euler karakteristiği olmak üzere $\tilde{\sum}$ nın Euler karakteristiği

$$\tilde{\chi} = |G|\chi = |G|(2-2g)$$

dir. Böylece $\tilde{\sum}$ nın $\tilde{g}$ cinsi

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= \frac{1}{2}(2-\tilde{\chi}) \\ &= 1-\frac{1}{2}|G|(2-2g) \\ &= 1+|G|(g-1) \end{aligned}$$

dir.

Örnek 3.3.1 : $G = C_n = < a \mid a^n = 1 >$ mertebesi n olan bir devirli grup olsun. G'nin, n'nin her pozitif m böleni için mertebesi m olan tam olarak bir tane devirli $H \cong C_m$ alt grubu vardır. Örnek 2.3.1'den, C_n'de $[a_1,b_1] \ldots [a_g,b_g] = 1$ denkleminin çözümlerinin sayısının

$$\sigma_g(C_m) = m^{2g}$$

olduğunu biliyoruz. Möbius fonksiyonunun tanımından $\mu(G) = 1$ ve n'nin her m $(m \leq n)$ böleni için $\mu(C_m) = \mu(\frac{n}{m})$ dir (burada μ 1.2.1 tanımındaki Möbius fonksiyonudur). Böylece (3.3.2) denkleminden, yani;

$$\phi_g(G) = \sum_{H \leq G} \sigma_g(H)\mu(H)$$

formülünden

$$\phi_g(C_n) = \sum_{H \leq C_n} \sigma_g(H)\mu(H) = \sum_{m|n} m^{2g}\,\mu(\tfrac{n}{m})$$

elde edilir. Diğer taraftan ϕ Euler fonksiyonu, yani n'den küçük eşit ve n ile aralarında asal olan pozitif tamsayıların sayısını veren fonksiyon olmak üzere, C_n'nin otomorfizm grubu $Aut(C_n)$'nin mertebesi

$$\left|Aut(C_n)\right| = \phi(n)$$

olduğundan (3.3.3) denkleminden, yani

$$n_g(G) = \frac{\phi_g(G)}{\left|Aut(G)\right|}$$

formülünden

$$n_g(C_n) = \frac{1}{\phi(n)} \sum_{m|n} m^{2g}\mu(\tfrac{n}{m})$$

elde edilir.

p bir asal sayı olmak üzere, $n = p$ alınırsa $\phi(p) = p-1$ olduğundan

$$n_g(C_n) = \frac{1}{p-1}\sum_{m|p} m^{2g}\mu(\tfrac{n}{m})$$
$$= \frac{1}{p-1}(p^{2g}-1)$$
$$= \frac{p^{2g}-1}{p-1}$$

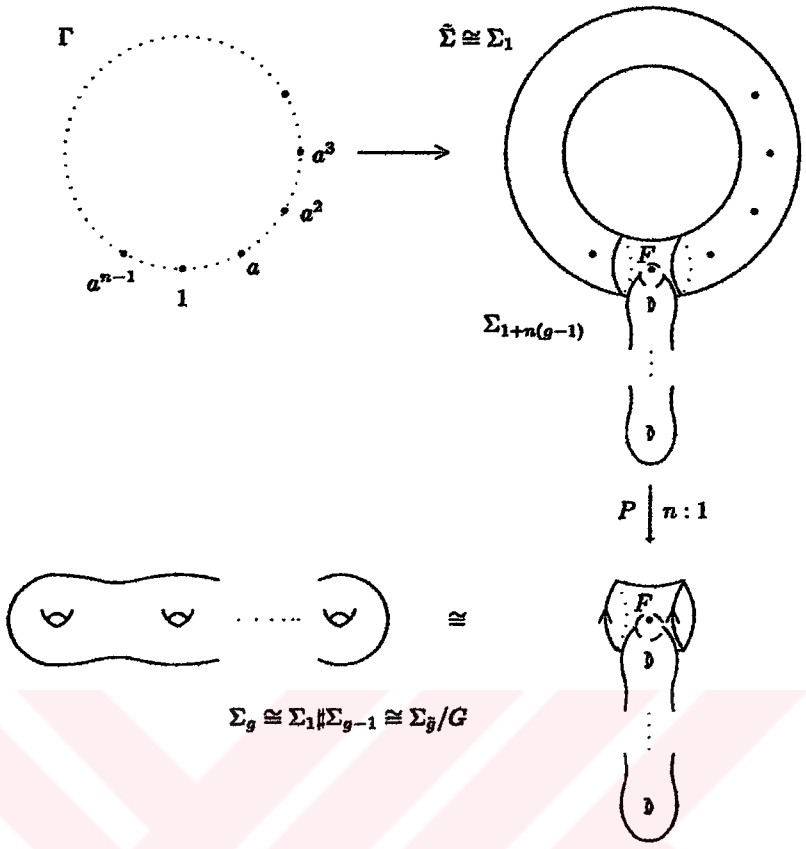
olarak bulunur. Böylece $\sum_g$ nin $\frac{p^{2g}-1}{p-1}$ tane izomorfik olmayan $\tilde{g} = 1+p(g-1)$ cinsli $p-$tabakalı düzgün dallanmamış $\sum_{\tilde{g}}$ örtüsü vardır. Örneğin; $g=1$ alırsak bu taktirde

$$n_1(C_p) = \frac{p^2-1}{p-1} = p+1$$

dir. Böylece $\sum_1$ in (yani torusun) $p+1$ tane $p-$tabakalı düzgün dallanmamış $\tilde{\Sigma}$ örtüsü vardır. Bu örtülerin her biri yönlendirilebilirdir ve her birinin Euler karakteristiği

$$K(\tilde{\Sigma}) = pK(\sum_1) = p.0 = 0$$

dır. Böylece her bir örtü yüzeyi yine bir torustur. Aşağıdaki şekil böyle bir örtüyü genel olarak açıklar (yani $G = C_n$ $(n \geq 2)$ ve $g \geq 1$ dir).



Şekil 3.3.1

a, C_n'nin bir üreteci olmak üzere, a'ya karşılık gelen C_n'nin Γ Cayley grafiğini alalım. Bu taktirde G, Γ üzerinde bir doğal etkiye sahiptir. $\tilde{\Sigma}$ ile Γ'nın bir kapalı tüp komşuluğunun sınırını gösterelim, bu taktirde G bu $\tilde{\Sigma} = \Sigma_1$ (bir torustur) yüzeyi üzerinde etkir (Γ üzerindeki doğal etkiden elde edilen etkidir). F'de bu yüzey üzerinde sınır eğrileri tanımlanmış G için temel bölge olsun. Bu taktirde elde edilen bölüm uzayı $\tilde{\Sigma}/G$ nin cinsi 1 dir, yani bölüm uzayı torustur. Böylece Σ_1 torusunun, yine Σ_1 torusu ile $n-$tabakalı düzgün dallanmamış örtüsü elde edilmiş olur.

Şimdi Σ_1 torusuna, cinsi $g-1$ olan Σ_{g-1} in n kopyasını her biri bir F temel bölgesi üzerinde olacak şekilde eklersek,

$$\sum_{g-1} \# \ldots \# \sum_{g-1} \# \sum_{1} \cong \sum_{\tilde{g}}, \quad \tilde{g} = 1+n(g-1)$$

elde edilir (burada # sembolü iki yüzeyin bağlantılı toplamını gösterir). Bu taktirde G'nin etkisi $\sum_{\tilde{g}}$ üzerinde bir serbest etkiye genişler. Bu etkiye göre bölüm uzayı

$$\sum_{1+n(g-1)} / G \cong \sum_{g}$$

dir. Böylece örtü grubu C_n olan $\sum_g$ 'nin $\sum_{1+n(g-1)}$ ile bir $n-$tabakalı düzgün dallanmamış örtüsü elde edilmiş olur.

Örnek 3.3.2 : $G = C_2 \times C_2 = V_4 = < x, y \mid x^2 = y^2 = 1 \ , \ xy = yx >$ Klein 4-grubu olsun. G'nin üç tane maksimal alt grubu vardır (bunlar mertebesi 2 olan devirli alt gruplardır) ve başka öz alt grubu yoktur. Tanım 1.2.1 ve tanım 1.2.2 ve teorem 1.2.3 ile

$$\mu(G) = 1 \ , \ \mu(C_2) = -1 \quad \text{ve} \quad \mu(C_1) = 3-1 = 2$$

dir. G değişmeli olduğundan, G'nin teorem 2.2.8 ile $|G| = 4$ tane indirgenemez lineer karakteri vardır. Böylece teorem 2.3.1 ile

$$\sigma_g(G) = 4^{2g}$$

dir. Böylece G ile ilgili aşağıdaki tabloyu, tablo 3.3.1, verebiliriz. Tabloda, H, G'nin alt grupları, $\#H$ ile böyle alt grupların sayısı, $\mu(H)$ ile H'ın ortak Möbius değeri, $|H|$ ile H'ın mertebesi, $\chi(1)$ ile H'ın indirgenemez karakterlerinin derecelerini ve $\sigma_g(H)$ ile de H'ın $\sigma_g(H)$ değeri gösterilmiştir.

H	#H	$\mu(H)$	$\lvert H\rvert$	$\chi(1)$	$\sigma_g(H)$
$C_2 \times C_2$	1	1	4	1^4	4^{2g}
C_2	3	-1	2	1^2	2^{2g}
C_1	1	2	1	1	1

Tablo 3.3.1

Böylece (3.3.2) denkleminden

$$\phi_g(G) = 4^{2g} - 3.2^{2g} + 2$$

elde edilir. Diğer taraftan

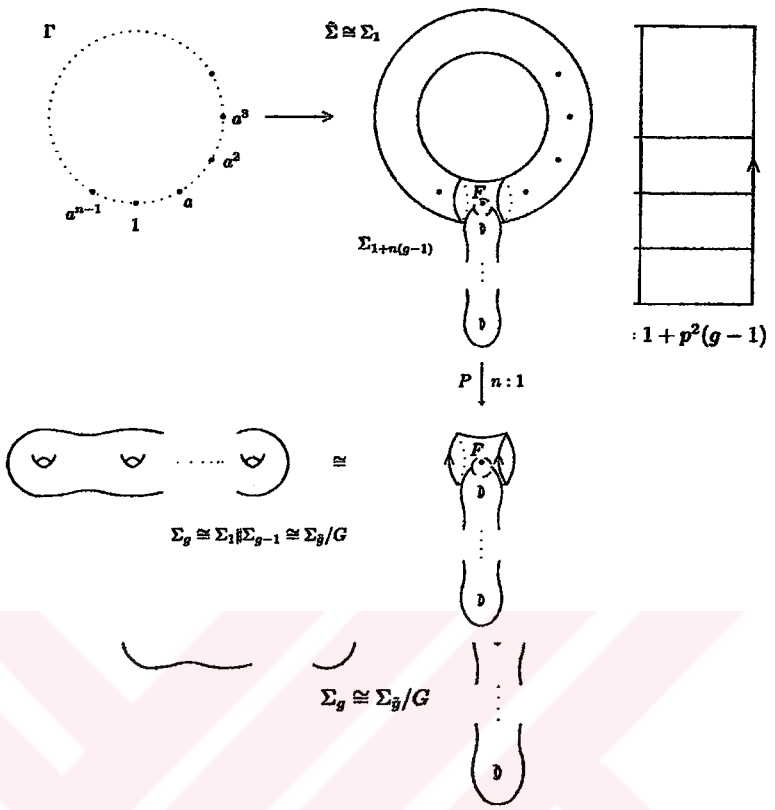
$$Aut(C_2 \times C_2) \cong S_3 \quad \text{(mertebesi 6 olan simetrik grup)}$$

olduğundan

$$n_g(G) = \frac{4^{2g} - 3.2^{2g} + 2}{6}$$

elde edilir.

Aşağıdaki şekil, şekil 3.3.2, genel durumda böyle bir örtüyü açıklar; yani $G = C_p \times C_p \quad (p \geq 2)$ ve $g \geq 1$ dir.



Şekil 3.3.2

Bir $\sum_1$ torusu olarak bir kare alırız. Bu taktirde $G = C_p \times C_p = < a,b \mid a^p = b^p = 1 \ , \ ab = ba >$, bu kare üzerinde etkir. Bu bize p^2 tane kare verir. Bunların her biri $\sum_1$ üzerinde G için temel bölgedir. Şimdi, eğer $\sum_1$ e $\sum_{g-1}$ nin p^2 kopyasını eklersek (her bir kare üzerine bir $\sum_{g-1}$) cinsi $\tilde{g} = 1 + p^2(g-1)$ olan bir $\sum_{\tilde{g}}$ yüzeyi elde edilir. Böylece G bu yüzey üzerinde etkir ve bölüm uzayı $\sum_{\tilde{g}} / G \cong \sum_g$ dır.

Örnek 3.3.3 : $G = D_n = < x, y \mid x^n = y^2 = (xy)^2 = 1 >$ mertebesi $2n$ olan dihedral grup olsun. D_n'nin her alt grubu ya devirlidir ya da yine dihedraldir. $m \mid n$ olan her m pozitif tamsayısı için mertebesi m olan ve $< x >$ de içerilen sadece bir tane devirli alt grup vardır. Bu alt grup $n = ml \quad (l \in \mathbb{Z})$ olmak üzere

$$C_m = < x^l >$$

dir. D_n'nin mertebesi $2m$ olan l tane dihedral alt grup vardır, bunlar $u = x^l$, $v = x^i y$, $0 \le i \le l-1$ olmak üzere

$$D_m = < u, v \mid u^m = v^2 = (uv)^2 = 1 >$$

alt gruplarıdır (n çift olduğunda, $C_2 \le C_n$ dönme grubu ile n tane yansıma $D_1 = < x^i y > \cong C_2$, $(0 \le i \le n-1)$ grupları arasındaki farkı ayırt edelim). Möbius fonksiyonunun tanımından her $m \mid n$ için

$$\mu(D_m) = \mu(\tfrac{n}{m}) \quad \text{ve} \quad \mu(C_m) = -\tfrac{n}{m}\,\mu(\tfrac{n}{m})$$

dir. 2.3.1 ve 2.3.2 örnekleri yardımıyla D_n'nin alt grupları ile ilgili aşağıdaki tabloyu verebiliriz.

H	#H	μ(H)	|H|	χ(1)	σ_g(H)
$C_m(m \mid n)$	1	$-\frac{n}{m}\mu(\frac{n}{m})$	m	$1^{(m)}$	m^{2g}
$D_m(m \mid n$ tek)	$\frac{n}{m}$	$\mu(\frac{n}{m})$	2m	$1^{(2)}, 2^{(\frac{m-1}{2})}$	$(2m)^{2g-1}(2+\frac{m-1}{2}2^{2-2g})$
$D_m(m \mid n$ çift)	$\frac{n}{m}$	$\mu(\frac{n}{m})$	2m	$1^{(4)}, 2^{(\frac{m-2}{2})}$	$(2m)^{2g-1}(4+\frac{m-2}{2}2^{2-2g})$

Tablo 3.3.2

Buradan (3.3.2) denkleminden

$$\begin{aligned}\phi_g(D_n) &= \sum_{H \le G} \sigma_g(H)\mu(H) \\ &= \sum_{\substack{H \le G \\ Devirli}} \sigma_g(H)\mu(H) + \sum_{\substack{H \le G \\ Dihedral}} \sigma_g(H)\mu(H) \\ &= \sum_{m|n} -\frac{n}{m}\mu(\frac{n}{m})m^{2g} + \sum_{\substack{m|n \\ tek}} \frac{n}{m}\mu(\frac{n}{m})(2m)^{2g-1}(2+\frac{m-1}{2}2^{2-2g}) \\ &+ \sum_{\substack{m|n \\ çift}} \frac{n}{m}\mu(\frac{n}{m})(2m)^{2g-1}(4+\frac{m-2}{2}2^{2-2g})\end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, D_n grubu mertebesi n olan $\phi(n)$ tane dönmeye karşılık gelen elemanlardan biri ve n tane yansımaya karşılık gelen elemanlardan birini içeren herhangi bir ikili tarafından üretildiğinden ve bu ikili diğer herhangi bir böyle ikiliyle tek bir otomorfizm ile dönüştürüldüğünden D_n'nin $n.\phi(n)$ tane otomorfizmi vardır. Böylece (3.3.3) formülünden,

$$n_g(D_n) = \frac{\phi_g(D_n)}{n\phi(n)}$$

elde edilir. Özellikle, eğer p bir tek asal sayı ise bu taktirde

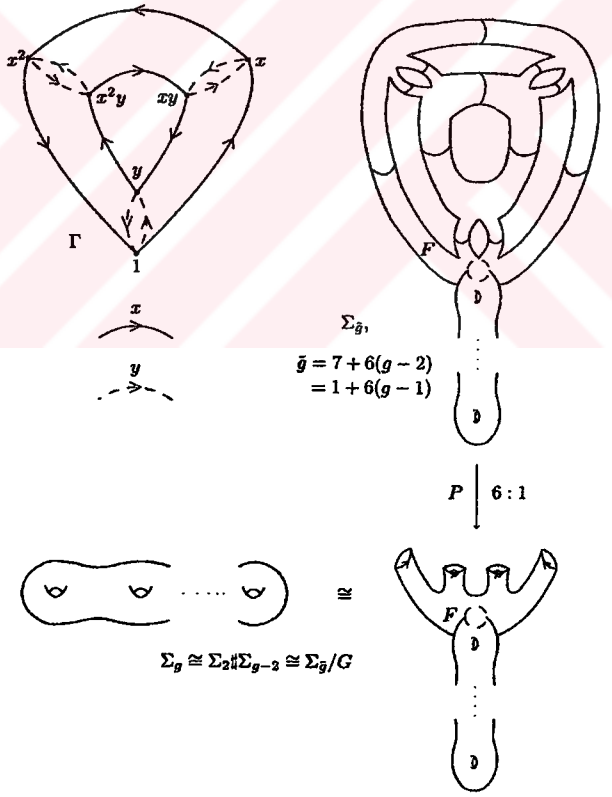
$$n_g(D_p) = \frac{-p2^{2g} + 2(2p)^{2g-1} + \frac{p-1}{2}(2p)^{2g-1}2^{2-2g} + p - p^{2g}}{p(p-1)}$$

$$= \frac{-p2^{2g} + 2^{2g}p^{2g-1} + (2^{2g-2}p^{2g} - 2^{2g-2}p^{2g-1})2^{2-2g} + p - p^{2g}}{p(p-1)}$$

$$= \frac{-p2^{2g} + 2^{2g}p^{2g-1} + p^{2g} - p^{2g-1} + p - p^{2g}}{p(p-1)}$$

$$= \frac{p^{2g-1}(2^{2g}-1)+p(1-2^{2g})}{p(p-1)}$$
$$= \frac{p^{2g-2}(2^{2g}-1)+(1-2^{2g})}{p-1}$$
$$= \frac{(2^{2g}-1)(p^{2g-2}-1)}{p-1}$$

elde edilir. Böylece $n_0(D_p) = n_1(D_p) = 0$ ve $n_2(D_p) = 15(p+1)$ dir. Yani; $g = 0$ ve $g = 1$ için örtü grubu D_n olan örtü yüzeyi yoktur. Fakat $g = 2$ için $\sum_2$ nin $15(p+1)$ tane farklı $2p-$tabakalı dallanmamış düzgün örtüsü vardır. Bu örtü yüzeylerinin cinsi $\tilde{g} = 1+2p$ dir. Örneğin; $p = 3$ ve $g = 2$ için $n_2(D_3) = 60$ dır. Aşağıdaki şekil, G için Γ Cayley grafiğinden elde edilen böyle bir örtüyü gösterir.

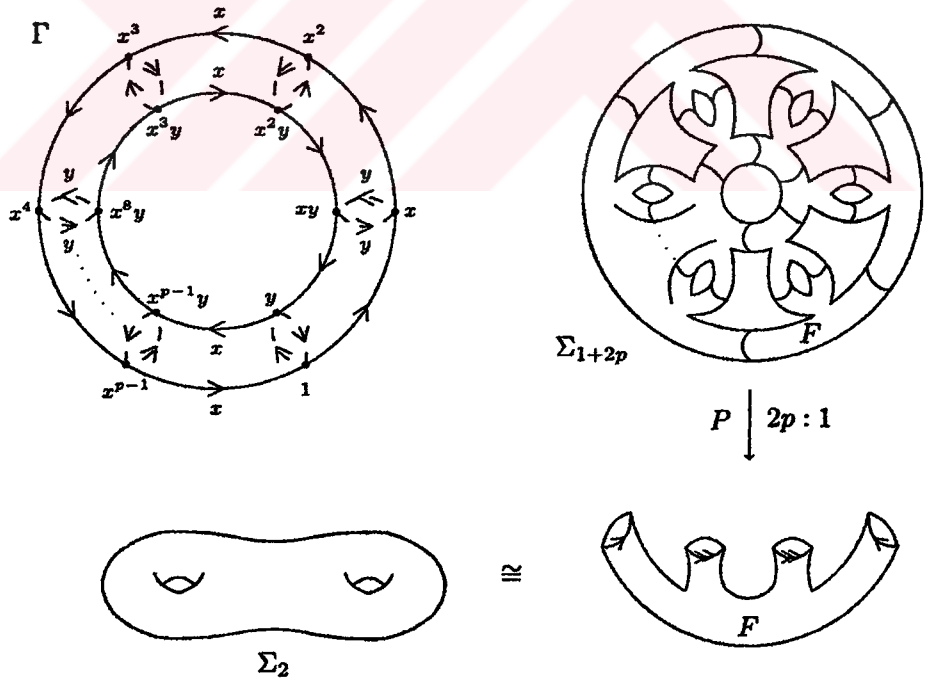


Şekil 3.3.3

Yine $G = D_3$ için Γ Cayley grafiğini alırız, bu taktirde G, Γ üzerinde etkir. $\sum_{\tilde{g}}$, Γ'nın bir kapalı tüp komşuluğunun sınırı olsun. Bu taktirde $\sum_{\tilde{g}}$ cinsi 7 olan bir yüzeydir ve G bu yüzey üzerinde etkir. F, bu yüzey üzerinde sınır eğrileri tanımlanmış G için bir temel bölge olsun. Bu taktirde bölüm uzayı $\sum_{\tilde{g}} / G$ nin cinsi 2 dir. Böylece $\sum_2$ nin bir $6-$tabakalı düzgün dallanmamış örtüsü elde edilir. Şimdi $\sum_7$ ye, her bir temel bölge üzerine bir tane olmak üzere, $\sum_{g-2}$ nin 6 kopyasını eklersek bu taktirde cinsi $1+6(g-1)$ olan yeni bir $\sum_{1+6(g-1)}$ yüzeyi elde edilir. G bu yeni yüzey üzerinde serbest etkiye sahiptir ve bölüm uzayı

$$\sum_{1+6(g-1)} / G \cong \sum_g$$

dir. Böylece $\sum_g$ nin cinsi $1+6(g-1)$ olan bir $6-$tabakalı örtüsü elde edilmiş olur. Benzer şekilde şekil 3.3.4, $G = D_p$ olması durumunu açıklar.



Şekil 3.3.4

Yine G için Γ Cayley grafiğini alırız. Γ'nın bir kapalı tüp komşuluğunun sınırını alalım. Bu, cinsi $1+2p$ olan bir yüzeydir. F sınır eğrileri tanımlı, G için temel bölge olsun. Bu taktirde $\sum_2$ nin bir $2p-$tabakalı düzgün dallanmamış örtüsünü elde ederiz. Şimdi, $\sum_{1+2p}$ ye $\sum_{g-2}$ nin $2p$ kopyasını eklersek (her bir temel bölge üzerine bir tane kopya)

$$2p\sum_{g-2} \# \sum_{1+2p} \cong \sum_{1+2p(g-1)} \cong \sum_{\tilde{g}}$$

elde edilir. Bu taktirde G, $\sum_{\tilde{g}}$ üzerinde serbest etkir ve bölüm uzayı

$$\sum_{\tilde{g}} / G \cong \sum_{g-2} \# \sum_2 \cong \sum_g$$

dir.

Örnek 3.3.4 : $G = \mathbb{Q}_8 = \{ \pm 1 , \pm i , \pm j , \pm k \}$ mertebesi 8 olan kuaterniyon grubu olsun. Burada

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad , \quad ij = k \quad , \quad jk = i \quad , \quad ki = j$$
$$ji = -k \quad , \quad kj = -i \quad , \quad ik = -j$$

dir. $\mathbb{Q}_8$'in üç tane maksimal alt grubu vardır. Bunlar mertebesi 4 olan $< i >, < j >$ ve $< k >$ devirli alt gruplarıdır. Bir tane mertebesi 2 olan $C_2 = \{ \pm 1 \}$ devirli alt grubu vardır. Bu alt grup maksimal alt grupların arakesitidir. $\mathbb{Q}_8$'in bunlardan başka öz alt grubu yoktur. Möbius fonksiyonunun tanımı ve teorem 1.2.3 ile,

$$\mu(\mathbb{Q}_8) = 1 \quad , \quad \mu(C_4) = -1 \quad , \quad \mu(C_2) = 3-1 = 2 \text{ ve } \mu(C_1) = 0$$

dır. Ayrıca örnek 2.3.1'den

$$\sigma_g(\mathbb{Q}_8) = 8^{2g-1}(4+2^{2-2g})$$

olduğunu biliyoruz. Böylece $\mathbb{Q}_8$ ile ilgili aşağıdaki tablo 3.3.3 verilebilir.

H	#H	$\mu(H)$	$\lvert H\rvert$	$\chi(1)$	$\sigma_g(H)$
Q_8	1	1	8	$1^4,2$	$8^{2g-1}(4+2^{2-2g})$
C_4	3	-1	4	1^4	4^{2g}
C_2	1	2	2	1^2	2^{2g}
C_1	1	0	1	1	1

Tablo 3.3.3

Buradan (3.3.2) denkleminden

$$\begin{aligned}\phi_g(G) &= 8^{2g-1}(4+2^{2-2g})-3.4^{2g}+2.2^{2g}\\ &= 2^{2g+1}(2^{2g}-1)(2^{2g-2}-1)\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $Aut(\mathbb{Q}_8)\cong S_4$ olduğunda $\left|Aut(\mathbb{Q}_8)\right| = 24$ dir. Böylece

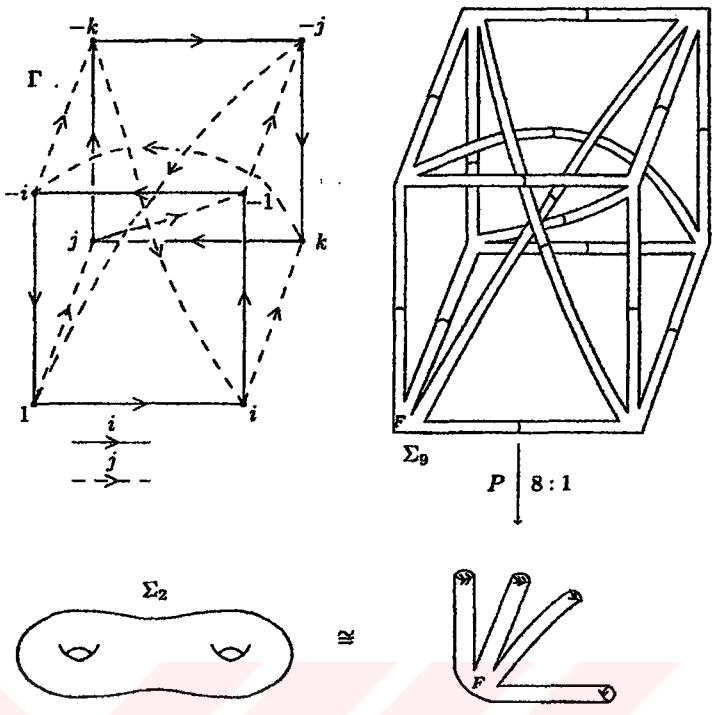
$$n_g(\mathbb{Q}_8) = \frac{2^{2g+1}(2^{2g}-1)(2^{2g-2}-1)}{24}$$

$$= \frac{1}{3}2^{2g-2}(2^{2g}-1)(2^{2g-2}-1)$$

bulunur. $g=0$ ve $g=1$ için $n_0(\mathbb{Q}_8)=n_1(\mathbb{Q}_8)=0$ olduğundan örtü mevcut değildir. $g=2$ için $n_2(\mathbb{Q}_8)=60$ olduğundan $\sum_2$ nin 60 tane farklı dallanmamış düzgün örtüsü vardır. Bu örtülerin cinsleri

$$\tilde{g} = 1+8(2-1) = 9$$

dır.



Şekil 3.3.5

$\sum_2$ torusu için bir küp alalım. Buna göre $G = \mathbb{Q}_8$ bu küp üzerinde etkir. Bu taktirde $\sum_2$ nin $8-$tabakalı düzgün dallanmamış örtüsü elde edilir. Buna göre $\sum_2$ nin her bir örtüsüne $g-2$ cinsli yüzey eklersek elde ettiğimiz yüzeyin cinsi $1+8(g-2)$ olur.

Örnek 3.3.5 : $G = A_4 = < x, y \mid x^3 = y^2 = (xy)^3 = 1 >$ mertebesi 12 olan tetrahedronun dönme grubu olsun (burada $x = (123)$, $y = (12)(34)$ permütasyonu olarak alınabilir). G'nin maksimal alt grupları bir tane V_4 (Klein $4-$grubu) ve dört tane mertebesi 3 olan $H \cong C_3$ devirli gruplardır. Böylece $\mu(A_4) = 1$, $\mu(V_4) = -1$ ve $\mu(H) = -1$ dir. Ayrıca C_1 bu beş tane maksimal alt grubun arakesiti olduğundan $\mu(C_1) = 5-1 = 4$ dir (not edelim ki, G'nin üç tane C_2 devirli alt grubu için $\mu(C_2) = 0$ dır). Diğer taraftan örnek 2.3.1'den

$$\sigma_g(A_4) = 12^{2g-1}(3+3^{2-2g})$$

dir. Böylece G'nin aşağıdaki tablosunu elde ederiz.

H	$\#H$	$\mu(H)$	$\lvert H\rvert$	$\chi(1)$	$\sigma_g(H)$
A_4	1	1	12	$1^3, 3$	$12^{2g-1}(3+3^{2-2g})$
V_4	1	-1	4	1^4	4^{2g}
C_3	4	-1	3	1^3	3^{2g}
C_2	3	0	2	1^2	2^{2g}
C_1	1	4	1	1	1

Tablo 3.3.4

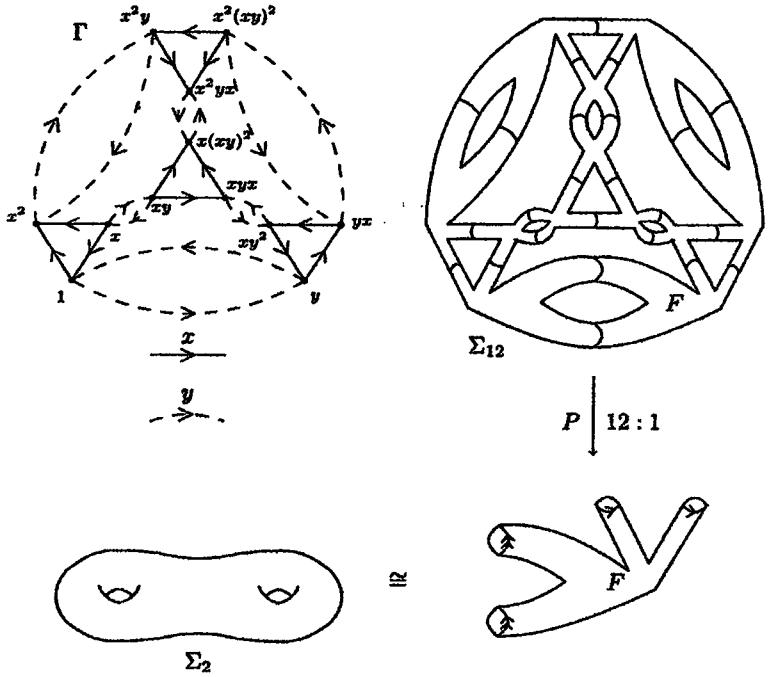
Buradan

$$\phi(A_4) = 12^{2g-1}(3+3^{2-2g}) - 4^{2g} - 4.3^{2g} + 4$$

dır. $Aut(A_4) \cong S_4$ olduğundan $\left|Aut(A_4)\right| = 24$ dür. Böylece (3.3.3) denkleminden

$$n_g(G) = \frac{1}{24}(12^{2g-1}(3+3^{2-2g}) - 4^{2g} - 4.3^{2g} + 4)$$
$$= \frac{1}{6}(3^{2g}-1)(4^{2g-2}-1)$$

bulunur. $g = 0$ ve $g = 1$ için $n_0(A_4) = 0$ ve $g = 2$ için ise $n_2(A_4) = 200$ dür.



Şekil 3.3.6

$g=0$ ve $g=1$ için örtü grubu A_4 olan örtü yüzeyi yoktur. Fakat $g=2$ için 200 tane farklı örtü vardır. $G=A_4$ için Γ Cayley grafiğini alalım. G, Γ üzerinde etkir. $\sum_{\tilde{g}}$ cinsi 13 olan bir yüzeydir. $\sum_{\tilde{g}}$, Γ'nın bir kapalı tüp komşuluğunun sınırı olsun. F, bu yüzey üzerinde sınır eğrileri tanımlanmış G için bir temel bölge olsun. Her bir temel bölgeye cinsi $g-2$ olan $\sum_{g-2}$ eklersek cinsi $\tilde{g}=1+12(g-2)$ olan yeni bir $\sum_{1+12(g-2)}$ yüzeyi elde ederiz. Böylece $\sum_2$ nin 12 katlı düzgün dallanmamış örtüsü elde edilir.

Örnek 3.3.6 : $G=S_4=<x,y \mid x^3=y^2=(xy)^4=1>$ $(x=(124)\ ,\ y=(13),$ böylece $xy=(1324)$ alabiliriz) mertebesi 24 olan octahedronun dönme grubu olsun. S_4'ün maksimal alt grupları bir tane A_4, üç tane mertebesi 8 olan $H\cong D_4$ dihedral alt gruplar ve dört tane mertebesi 6 olan $K\cong S_3\cong D_3$ simetrik gruplardır. Böylece

$$\mu(A_4) = \mu(H) = \mu(K) = -1$$

dır. Ayrıca, S_4'ün V_4'e izomorf olan dört tane alt grubu vardır, fakat sadece normal alt grup olan

$$V_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

maksimallerin bir arakesitidir. Bu alt grup A_4 ve üç tane $H \cong D_4$ maksimal alt grup tarafından içerilir. Böylece $\mu(V_4) = 4-3 = 1$ dir. Diğer üç normal olmayan V_4 (her biri bir maksimal $H \cong D_4$ de içerilir) alt grubu için $\mu(V_4) = 0$ dır. Üç tane C_4 devirli alt grubu (her biri bir maksimal $H \cong D_4$ alt grupta içerilir) maksimallerin arakesiti olmadığından $\mu(C_4) = 0$ dır. Dört tane C_3 devirli alt grubunun her biri A_4 ve bir S_3 maksimallerinde içerildiğinden $\mu(C_3) = 1$ dir. Dokuz tane C_2 alt grubu vardır, fakat üç tanesi A_4'de içerilir ve maksimallerin arakesitinde değildir, dolayısıyla $\mu(C_2) = 0$ dır. Diğer altı C_2 devirli alt grubunun her biri üç maksimalin (bir D_4 ve iki S_3) arakesitidir, böylece $\mu(C_2) = 3-1 = 2$ dir. Son olarak da tanımdan

$$\mu(S_4) = 1$$

ve

$$\mu(C_1) = -\sum_{S>C_1} \mu(S) = -(1+(-1)+3(-1)+4(-1)+3+4.1+6.2) = -12$$

dir. Örnek 2.3.1 den

$$\sigma_g(S_4) = 24^{2g-1}(2+2^{2-2g}+2.3^{2-2g})$$

olduğunu biliyoruz. Böylece S_4'ün alt grupları ile ilgili aşağıdaki tablo elde edilir.

H	$\#\ H$	$\mu\ (\ H\ )$	$\lvert H \rvert$	$\chi\ (\ 1\ )$	$\sigma_g(\ H\ )$
S_4	1	1	24	$1^2,\ 2\ ,\ 3^2$	$24^{2g-1}(\ 2+2^{2-2g}+2.3^{2-2g}$
A_4	1	−1	12	$1^3,\ 3$	$12^{2g-1}(\ 3+3^{2-2g})$
D_4	3	−1	8	$1^4,\ 2$	$8^{2g-1}(\ 4+2^{2-2g})$
S_3	4	−1	6	$1^2,\ 2$	$6^{2g-1}(\ 2+2^{2-2g})$
V_4	1	3	4	1^4	4^{2g}
C_3	4	1	3	1^3	3^{2g}
C_2	6	2	2	1^2	2^{2g}
C_1	1	−12	1	1	1

Tablo 3.3.5

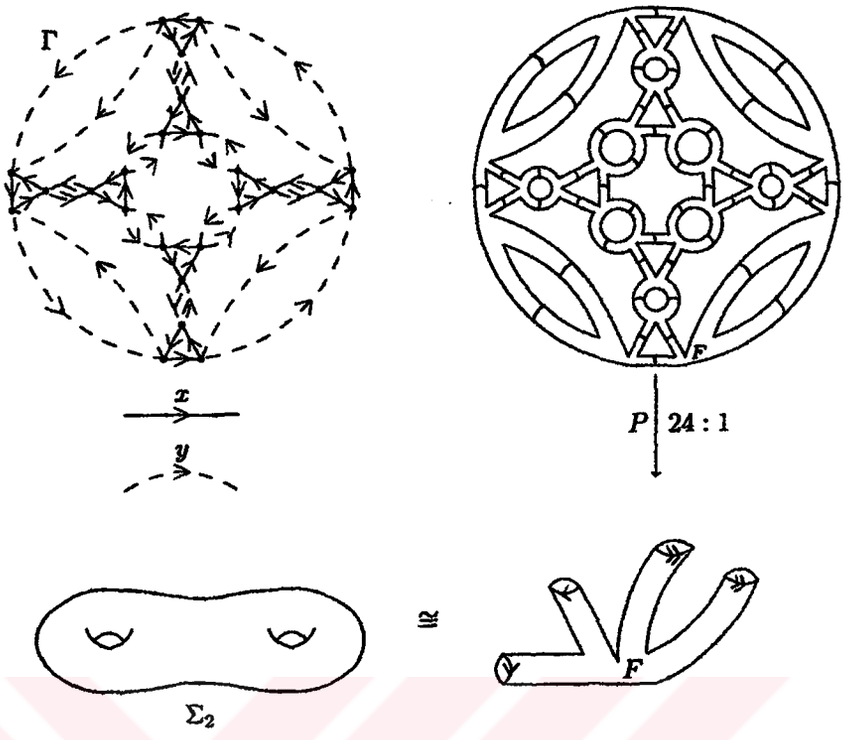
Buradan (3.3.2) denklemi ile

$$\phi_g(S_4)=\{\ 24^{2g-1}(2+2^{2-2g}+2.3^{2-2g})-12^{2g-1}(3+3^{2-2g})-3.8^{2g-1}(4+2^{2-2g})$$
$$-4.6^{2g-1}(2+2^{2-2g})+3.4^{2g}+4.3^{2g}+12.2^{2g}-12\ \}$$

elde edilir. Buradan da, $\left|Aut(S_4)\right|=24$ olduğundan

$$n_g(S_4)=\frac{1}{24}\phi_g(S_4)=\frac{1}{2}(2^{2g}-1)(3^{2g-2}-1)(4^{2g-2}-1)$$

elde edilir. $g=0$ ve $g=1$ için $n_0(S_4)=n_1(S_4)=0$ dır, fakat $g=2$ için $n_2(S_4)=900$ dür.



Şekil 3.3.7

$g=0$ ve $g=1$ için örtü grubu S_4 olan örtü yüzeyi yoktur. $g=2$ için örtü grubu S_4 olan 900 tane farklı örtü yüzeyi vardır. $G=S_4$ için Γ Cayley grafiğini alalım. G,Γ üzerinde etkir. $\sum_{\tilde{g}}$ cinsi 25 olan bir yüzeydir ve $\sum_{\tilde{g}}$, Γ'nın bir kapalı tüp komşuluğunun sınırını göstersin. F'de bu yüzey üzerinde sınır eğrileri tanımlanmış temel bölge olsun. Her bir temel bölgeye bir tane olmak üzere cinsi $g-2$ olan $\sum_{g-2}$ yüzeyini eklersek cinsi $\tilde{g}=1+24(g-2)$ olan $\sum_{1+24(g-2)}$ yüzeyini elde ederiz. Buna göre $\sum_2$ nin 24 katlı örtüsü elde edilmiş olur.

Örnek 3.3.7 : $G=A_5=<x=(12)(34)\ ,\ y=(235)\ \big|\ x^2=y^3=(xy)^5=1>$ mertebesi 60 olan icosahedronun dönme grubu olsun. A_5'in maksimal alt grupları beş tane A_4, altı tane D_5 ve on tane S_3 dür. Böylece $\mu(A_4)=\mu(D_5)=\mu(S_3)=-1$ dir. On tane C_3 devirli alt grubunun her biri üç maksimal alt grupta (bir S_3 ve iki A_4 de) içerildiğinden

$\mu(C_3) = 3-1 = 2$ dir. On beş tane C_2 devirli alt grubun her biri bir A_4, iki D_5 ve iki S_3 maksimalinin arakesiti olduğundan $\mu(C_3) = 5-1 = 4$ dür. Son olarak da

$$\mu(G) = 1$$

ve

$$\mu(C_1) = -\sum_{S>C_1} \mu(S) = -\{1+5(-1)+6(-1)+10(-1)+10.2+15.4\} = -60$$

dır. Ayrıca not edelim ki, altı tane C_5 devirli alt grubunun her biri bir maksimalde içerilir, yani maksimallerin arakesiti değildir, böylece $\mu(C_5) = 0$, beş tane V_4 alt grubunun her biri bir A_4 maksimalinde içerilir ve maksimallerin arakesiti değildir, böylece $\mu(V_4) = 0$ dır. Böylece A_5'in alt grupları ile ilgili aşağıdaki tablo elde edilir.

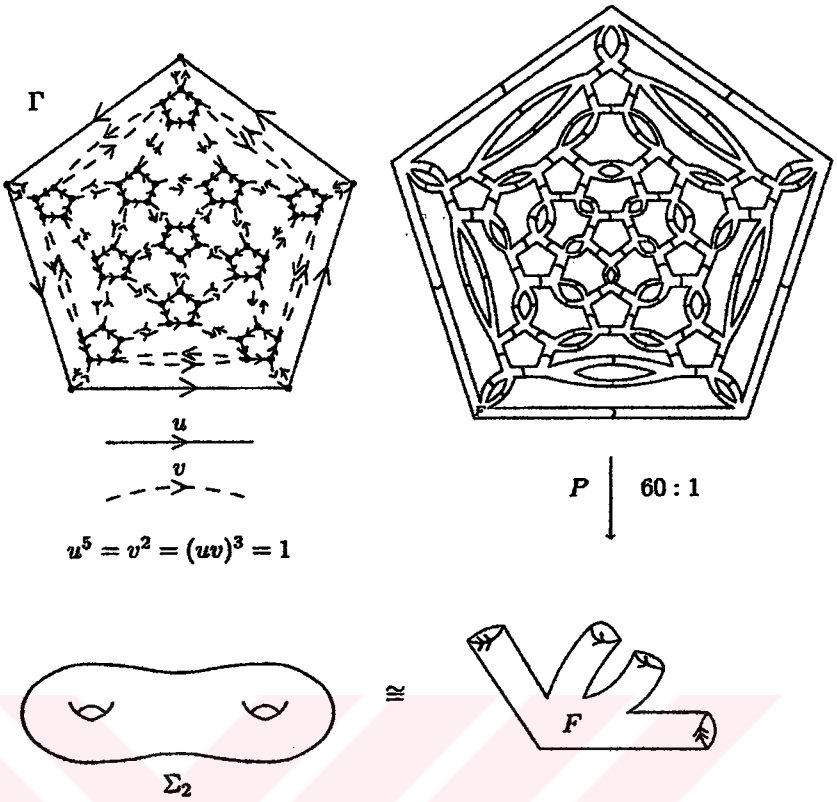
H	$\#H$	$\mu(H)$	$\lvert H \rvert$	$\chi(1)$	$\sigma_g(H)$
A_5	1	1	60	$1,3^2,4,5$	$60^{2g-1}(1+2.3^{2-2g}+4^{2-2g}+5^{2-2g})$
A_4	5	-1	12	$1^3,3$	$12^{2g-1}(3+3^{2-2g})$
D_5	6	-1	10	$1^2,2^2$	$10^{2g-1}(2+2.2^{2-2g})$
S_3	10	-1	6	$1^2,2$	$6^{2g-1}(2+2^{2-2g})$
C_3	10	2	3	1^3	3^{2g}
C_2	15	4	2	1^2	2^{2g}
C_1	1	-60	1	1	1

Tablo 3.3.6

$Aut(A_5) \cong S_5$ olduğundan $\left|Aut(A_5)\right| = 120$ dir. Buradan

$$n_g(A_5) = \frac{1}{120}\{60^{2g-1}(1+2.3^{2-2g}+4^{2-2g}+5^{2-2g}) - 5.12^{2g-1}(3+3^{2-2g}) - 6.10^{2g-1}(2+2.2^{2-2g}) - 10.6^{2g-1}(2+2^{2-2g}) + 20.3^{2g} + 60.2^{2g} - 60\}$$

olarak elde edilir. Böylece $n_0(A_5) = n_1(A_5) = 0$, fakat $n_2(A_5) = 2016$ dır.



Şekil 3.3.8

$g = 0$ ve $g = 1$ için örtü grubu A_5 olan örtü yüzeyi yoktur. $g = 2$ için örtü grubu A_5 olan 2016 tane farklı örtü yüzeyi vardır. $G = A_5$ için Γ Cayley grafiğini alalım. G, Γ üzerinde etkir. $\sum_{\tilde{g}}$ Γ'nın kapalı tüp komşuluğunun sınırı olsun. F'de bu yüzey üzerinde sınır eğrileri tanımlanmış temel bölgeyi göstersin. $\sum_{\tilde{g}}$ cinsi 61 olan bir yüzeydir ve G bu yüzey üzerinde etkir. $\sum_2$ nin 60 tabakalı düzgün dallanmamış örtüsü elde edilir. $\sum_{61}$ e her temel bölge üzerine bir tane olmak üzere $\sum_{g-2}$ nin 60 kopyasını eklersek bu taktirde $1+60(g-2)$ olan yeni bir $\sum_{1+60(g-2)}$ yüzeyi elde edilir.

2) Yönlendirilemeyen Yüzeyler

g cinsli yönlendirilemeyen $\sum_g^-$ yüzeyinin $\prod_g^-$ temel grubu bir tek

$$R_1^2 \ldots R_g^2 = 1$$

belirleyici bağıntısı ile $R_1, \ldots, R_g$ üreteçlerine sahiptir. Bölüm 2.3'de teorem 2.3.3 ile

$$r_1^2 \ldots r_g^2 = 1$$

denkleminin G'deki çözümlerinin

$$\sigma_g^-(G) = \left| Hom(\prod_g^-, G) \right|$$

sayısı için bir formül verilmiştir. $\prod_g^-$ den G üzerine epimorfilerin sayısını $\phi_g^-(G)$ ve farklı çekirdeklerin sayısını da $n_g^-(G)$ ile gösterelim. Yönlendirilebilir yüzeyler için elde edilen formüllere benzer olarak,

$$\phi_g^-(G) = \sum_{H \leq G} \sigma_g^-(H)\mu(H) \qquad (3.3.4)$$

ve

$$n_g^-(G) = \frac{\phi_g^-(G)}{\left| Aut(G) \right|} \qquad (3.3.5)$$

elde edilir. Böylece (3.3.5) formülü yönlendirilemeyen $\sum_g^-$ yüzeyinin $\tilde{\sum} \longrightarrow \sum_g^-$ dallanmamış $G-$örtülerinin denklik sınıflarının sayısını verir. $\tilde{\sum}$ nın Euler karakteristiği $\tilde{K}$ olmak üzere

$$\tilde{K} = |G|(2-g)$$

dir. $\tilde{\sum}$ nın cinsi $\tilde{g}$ olmak üzere,

i) eğer $\tilde{\sum}$ yönlendirilebilir ise bu taktirde

$$\tilde{g} = 1+\frac{1}{2}|G|(g-2),$$

ii) eğer $\tilde{\sum}$ yönlendirilemeyen ise bu taktirde

$$\tilde{g} = 2+|G|(g-2)$$

dir. Diğer taraftan $\sum_g^-$ nin bir örtüsünün yönlendirilebilir olup olmadığını belirleyebilmek için aşağıdaki kriter kullanılabilir [14].

$\sum_g^-$ nin bir $\tilde{\sum}$ $G-$örtüsü yönlendirilebilirdir ancak ve ancak karşılık gelen N çekirdeği Π_{g-1} in alt grubudur veya denk olarak G grubu r_i elemanlarının hiçbirini içermeyen 2 indeksli bir G^+ alt grubuna sahiptir [14].

Örnek 3.3.8 : $G = C_n = < a \mid a^n = 1 >$ mertebesi n olan devirli bir grup olsun. G nin her bir $H \cong C_m$ alt grubu için m tek olduğunda $\eta_m = 1$, m çift olduğunda ise $\eta_m = 2$ olmak üzere $\sigma_g^-(C_m) = \eta_m |C_m|^{g-1}$ dir. Buna göre, (3.3.4) denkleminden

$$\varphi_g^-(C_n) = \sum_{m|n} \mu(\frac{n}{m})\eta_m m^{g-1}$$

ve (3.3.5) denkleminden

$$n_g^-(C_n) = \frac{1}{\phi(n)} \sum_{m|n} \mu(\frac{n}{m})\eta_m m^{g-1}$$

dir. Özellikle p bir tek asal sayı ise bu taktirde,

$$n_g^-(C_p) = \frac{p^{g-1}-1}{p-1},$$

$\sum_g^-$ nin p-yapraklı düzgün dallanmamış örtülerinin sayısını verir. Bunların hepsi, cinsi $2+p(g-2)$ olan yönlendirilemez yüzeylerdir. $p=2$ olduğunda $n_g^-(C_2) = 2^g - 1$ tane böyle örtü vardır ve sadece bunlardan biri yönlendirilebilirdir (bu yönlendirilebilir yüzey, $\theta : \prod_g^- \longrightarrow C_2$, $R_1 \mapsto a$, . . . , $R_g \mapsto a$ epimorfisinin çekirdeğine karşılık gelir).

Örnek 3.3.9 : $G = D_n = < a,b \mid a^n = b^2 = 1 , b^{-1}ab = a^{-1} >$ $2n$ mertebeli dihedral grup olsun. $m \mid n$ olmak üzere D_n'nin her bir alt grubu ya C_m'e ya da D_m'e izomorftur. D_n'nin alt gruplarını gösteren tablo 3.3.2'den, örnek 2.3.2 ve (3.3.4) denkleminden

$$\phi_g^-(D_n) = \sum_{m \mid n} \mu(\frac{n}{m})\, m^{g-2}(m + \eta_m(2^g - 2))$$

şeklinde elde edilir. Buradan $\left| Aut(D_n) \right| = \phi(n)$ olduğundan (3.3.5) denklemi ile,

$$n_g^-(D_n) = \frac{1}{\phi(n)} \sum_{m \mid n} \mu(\frac{n}{m}) m^{g-2}(m + \eta_m(2^g - 2))$$

yazılır. Eğer $n = p$ ve p tek asal sayı ise bu taktirde,

$$n_g^-(D_p) = \frac{p^{g-1} + (2^g - 2)p^{g-2} - 2^g + 1}{p-1}$$

olur. Şimdi D_p nin indeksi 2 olan bir tek C_p alt grubu olduğundan, teorem 3.3.1'den bu örtülerden bazıları cinsi $\tilde{g} = 1 + p(g-2)$ olan yönlendirilebilir yüzeylerdir. D_p / C_p nin bütün elemanlarının kareleri 1 olduğundan, sabit olmayan

$$\{ R_1, , , , R_g \} \longrightarrow D_p / C_p$$

dönüşümlerini saymakla bu yönlendirilebilir örtülerin sayısını

$$\frac{1}{p\phi(p)}(p^g - p) = \frac{p^{g-1}-1}{p-1}$$

olarak buluruz.

Örnek 3.3.10 : $G = \mathbb{Q}_8 = < a,b \mid a^4 = 1 , a^2 = b^2 , b^{-1}ab = a^{-1} >$, mertebesi 8 olan $\mathbb{Q}_8$ kuaterniyon grubunu göz önüne alalım. Tablo 3.3.3'den, örnek 2.3.2'den ve (3.3.4) denkleminden

$$\begin{aligned}\phi_g^-(\mathbb{Q}_8) &= \sigma_g^-(\mathbb{Q}_8)\mu(\mathbb{Q}_8)+\sigma_g^-(C_4)\mu(C_4)+\sigma_g^-(C_2)\mu(C_2)+\sigma_g^-(C_1)\mu(C_1)\\ &= 8^{g-1}(4+(-1)^g.2^{2-g}).1-3.2^{2g-1}+2.2^g+0\\ &= 2^{2g-1}+(-1)^g.2^{2g-1}-3.2^{2g-1}+2^{g+1}\end{aligned}$$

elde edilir. $|Aut(\mathbb{Q}_8)| \cong S_4 = 24$ olduğuna göre buradan (3.3.5) denklemine göre

$$n_g^-(\mathbb{Q}_8) = \frac{1}{3.2^3}\left[2^{3g-1}+(-1)^g 2^{2g-1}-3.2^{2g-1}+2^{g+1}\right]$$

elde edilir. Eğer g çift ise,

$$\begin{aligned}n_g^-(\mathbb{Q}_8) &= \frac{1}{3}\left[2^{3g-4}+2^{2g-4}-3.2^{2g-4}-3.2^{2g-4}+2^{g-2}\right]\\ &= \frac{1}{3}2^{g-2}\left[2^{2g-2}-2^{g-1}+1\right]\end{aligned}$$

yazılabilir. Eğer g tek ise,

$$\begin{aligned}n_g^-(\mathbb{Q}_8) &= \frac{1}{3}2^{g-2}\left[2^{2g-2}-2^{2g-2}-3.2^{g-2}+1\right]\\ &= \frac{2^{g-2}}{3}\left[2^{g-1}-1\right]^2\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.3.11 : $G = A_4 = < x, y \mid x^3 = y^2 = (xy)^3 = 1 >$, mertebesi 12 olan bir grup olsun. A_4'ün alt gruplarını listeleyen tablo 3.3.4 , örnek 2.3.2'den ve (3.3.4) denkleminden

$$\begin{aligned}\phi_g^-(A_4) &= \sigma_g^-(A_4)\mu(A_4)+\sigma_g^-(V_4)\mu(V_4)+\sigma_g^-(C_3)\mu(C_3)+\sigma_g^-(C_2)\mu(C_2)+\sigma_g^-(C_1)\mu(C_1)\\ &= 12^{g-1}(1+3^{2-g}).1-1.4.4^{g-1}-4.3^{g-1}+4\\ &= 4.(4^{g-2}-1)(3^{g-1}-1)\end{aligned}$$

ve $\left|Aut(A_4)\right| \cong \left|S_4\right| = 24$ ise (3.3.5) denkleminden

$$n_g^-(A_4) = \frac{4.(4^{g-2}-1)(3^{g-1}-1)}{24} = \frac{1}{6}(4^{g-2}-1)(3^{g-1}-1)$$

elde edilir. Teorem 3.3.1'den A_4 ün indeksi 2 olan alt grubu olmadığından bütün örtüler, cinsi $\tilde{g} = 12g-22$ olan yönlendirilemeyen yüzeylerdir.

Örnek 3.3.12 : S_4 mertebesi 24 olan bir grup olsun. S_4'ün alt grupları tablo 3.3.5'de verilmiştir. (3.3.4) denklemi ile

$$\begin{aligned}\phi_g^-(S_4) &= \sigma_g^-(S_4)\mu(S_4)+\sigma_g^-(A_4)\mu(A_4)+\sigma_g^-(D_4)\mu(D_4)+\sigma_g^-(S_3)\mu(S_3)\\ &\quad +\sigma_g^-(V_4)\mu(V_4)+\sigma_g^-(C_3)\mu(C_3)+\sigma_g^-(C_2)\mu(C_2)+\sigma_g^-(C_1)\mu(C_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_g^-(S_4) &= 24^{g-1}(2+2^{2-g}+2.3^{2-g}).1+12^{g-1}(1+3^{2-g}).(-1)+8^{g-1}(4+2^{2-g}).(-3)\\ &\quad +6^{g-1}(2+2^{2-g}).(-4)+3.4^g+4.3^{g-1}+12.2^g-12\end{aligned}$$

dır. (3.3.5) denklemine göre

$$n_g^-(S_4)=\frac{1}{24}\left[\begin{array}{l}24^{g-1}(2+2^{2-g}+2.3^{2-g}).1+12^{g-1}(1+3^{2-g}).(-1)+8^{g-1}(4+2^{2-g}).(-3)\\+6^{g-1}(2+2^{2-g}).(-4)+3.4^g+4.3^{g-1}+12.2^g-12\end{array}\right]$$

$$=\frac{3.(2^{2g}-16)}{4}\left[3^{g-2}(2^g+1)-(2^g-1)\right]$$

elde edilir.

Örnek 3.3.13 : $G=A_5=<x=(12)(34)\ ,\ y=(235)\ \big|\ x^2=y^3=(xy)^5=1>$ mertebesi 60 olan bir grup olsun. A_5'in alt gruplarını gösteren tablo 3.3.6'dan ve (3.3.4) denkleminden

$$\phi_g^-(A_5)=\sigma_g^-(A_5)\mu(A_5)+\sigma_g^-(A_4)\mu(A_4)+\sigma_g^-(D_5)\mu(D_5)+\sigma_g^-(S_3)\mu(S_3)$$
$$+\sigma_g^-(C_3)\mu(C_3)+\sigma_g^-(C_2)\mu(C_2)++\sigma_g^-(C_1)\mu(C_1)$$

$$\phi_g^-(A_5)=60^{g-1}(1+2.3^{2-g}+4^{2-g}+5^{2-g}).1-5.12^{g-1}(1+3^{2-g})-6.10^{g-1}(2+2^{3-g})$$
$$-6.10^{g-1}(2+2^{3-g})-10.6^{g-1}(2+2^{2-g})+20.3^{g-1}+60.2^g-60$$

yazılır. $\left|Aut(A_5)\right|\cong\left|S_5\right|=120$ olduğundan (3.3.5) denkleminden

$$n_g^-(A_5)=\frac{1}{120}\left[\begin{array}{l}60^{g-1}(1+2.3^{2-g}+4^{2-g}+5^{2-g}).1-5.12^{g-1}(1+3^{2-g})-6.10^{g-1}(2+2^{3-g})\\-6.10^{g-1}(2+2^{3-g})-10.6^{g-1}(2+2^{2-g})+20.3^{g-1}+60.2^g-60\end{array}\right]$$

bulunur. Teorem 3.3.1'den, A_5'in indeksi 2 olan alt grubu olmadığından bu örtülerin hepsi yönlendirilemeyendir.

3) Delinmiş Yüzeyler

Örnek 3.3.14 : i) p asal olmak üzere $p-$tabakalı düzgün dallanmış örtülerin sayısını hesaplayalım. Örnek 2.3.4'de

$$[a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] x_1 \ldots x_r = 1$$

denkleminin çözümlerinin sayısının

$$\sigma_{g,r}(G) = p^{2g-1}((p-1)^r + (-1)^r(p-1))$$

olduğunu görmüştük (yani; $\prod_{g,r}$'den C_p'ye homomorfilerin sayısıdır). $r \geq 1$ olduğundan bu çözümlerin hepsi G'yi üretir, böylece bu sayı epimorfilerin sayısıyla aynıdır. $Epi(\prod_{g,r}, C_p)$ üzerinde bileşke ile etkiyen $Aut(C_p)$'nin yörüngelerinin $|Epi(\prod_{g,r}, C_p)| / |Aut(C_p)|$ sayısı farklı örtülerin sayısına eşit olduğundan $p^{2g-1}((p-1)^{r-1} + (-1)^r)$ tane $\sum_g$ nin örtüsü vardır (verilen r tane dallanma noktasıyla birlikte). Böylece $r = 1, 2, 3, \ldots$ için örtülerin sayısı $0, p^{2g}, p^{2g}(p-2), \ldots$ dir. Örneğin; $G = C_3 = < a \mid a^3 = 1 >$ $g = 1$ ve $r = 3$ tane denk olmayan örtüsü vardır. Delinmiş bir $\sum_{g,r}$ yüzeyinin karakteristiği $K = 2-2g-r$ olduğundan $K(\sum_{1,3}) = -3$ dir. Böylece delinmiş örtü yüzeyinin karakteristiği $\tilde{K} = 3.(-3) = -9$ dur. Bu yüzey üç deliklidir, her biri $\sum_{1,3}$ deki her deliğin üzerinde yer alır. Böylece onun $\tilde{g}$ cinsi $2-2\tilde{g}-3 = -9$ formülünden $\tilde{g} = 4$ elde edilir.

ii) Yönlendirilemeyen durumu göz önüne alalım:

$G = C_p$ $(p > 2)$ olsun. Bu durumda

$$r_1^2 \ldots r_g^2 x_1 \ldots x_r = 1$$

denkleminin çözümlerinin sayısını örnek 2.3.4'de

$$p^{g-1}(p-1)^r$$

olarak bulmuştuk. Böylece $\left|Aut(C_p)\right| = p-1$ ile bölersek $\sum^{-}_{g,r}$ nin örtülerinin sayısı

$$p^{g-1}(p-1)^{r-1}$$

olarak elde edilir.

Şimdi de $G = C_2$ olsun. Bu durumda yine örnek 2.3.4'den

$$r_1^2 \ldots r_g^2 x_1 \ldots x_r = 1$$

denkleminin çözümlerinin sayısını

$$2^{g-1}\{1+(-1)^r\}$$

olarak hesaplamıştık. $\left|Aut(C_2)\right| = 1$ olduğundan, $\sum^{-}_{g,r}$ nin farklı örtülerinin sayısı

$$2^{g-1}\{1+(-1)^r\}$$

olarak elde edilir. Böylece örtülerin sayısı

$$n^{-}_{g,r}(C_2) = \begin{cases} 0 & , \ r \ tek \ ise \\ 2^g & , \ r \ çift \ ise \end{cases}$$

dır.

KAYNAKLAR

[1] M.A.Armstrong, Basic Topology, Springer – Verlag, New York, (1983).

[2] M.J.Collins, Representations and Characters of Finite Groups, *Cambridge University Press*, Cambridge – New York, (1990).

[3] W.Fulton, Algebraic Topology, Springer – Verlag, New York, (1995), A First Course.

[4] D.Gorenstein, Finite Groups, *Chelsea Publishing Company*, New York, (1980), Second Edition.

[5] P.Hall, The Eulerian Function of a Group, *Quarterely J.Math.*, Oxford **7** (1936), 134 - 151.

[6] M.Hamermesh, Group Theory and its Application to Physical Problems, *Addision-Wesley*, Reading-London (1961).

[7] G.H.Hardy and E.M.Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, *Clarendon Press*, Oxford (1979), Fifth Edition.

[8] I.M. Isaacs, Character Theory of Finite Groups, *Academic Press*, New York, (1976).

[9] D.L.Johnson, Topics in the Theory of Group Presentations, L.M.S.Lecture Note Series **42** (1980), *Cambridge University Press*.

[10] G.A.Jones, Counting Normal Subgroup of Non-Euclidean Crystallographic Groups, *Math. Scond.*, to appear.

[11] G.A.Jones, Characters and Surfaces: A Survey Preprint, *Southampton*, (1996).

[12] G.A.Jones and D.Singerman, Complex Functions, *Cambridge University Press,* (1987).

[13] G.A.Jones, Enumeration of Homomorfphism and Surface – Coverings, *Quarterely J.Math.*, Oxford (2), **46** (1995), 485 – 507.

[14] M.Kazaz, Regular Coverings and Cayley Graph, to appear in.

[15] W.S.Massey, A Basic Course in Algebraic Toplogy, *Springer – Verlag*, New York, (1991).

[16] J.J.Rotman, An Introduction to the Theory of Groups, *Springer – Verlag*, New York / Berlin, (1995), Fourth Edition.

[17] J.P.Serre, Linear Representations of Finite Groups, *Springer – Verlag*, New York / Berlin, (1977).

[18] H.J.Zassenhause, The Theory of Groups, *Chelsea Publishing Company*, New York, (1958).

[19] H.Zieschang, E.Vogt and H.D.Coldewey, Surfaces and Planar Discontinuous Groups, Lecture Notes in Mathematics, 835, *Springer – Verlag*, Berlin – New York, (1980).

Özgeçmiş

Adı Soyadı : Ayşe Tuğba GÜROĞLU

Doğum Yeri : Manisa - Merkez

Doğum Tarihi : 01.03.1976

Medeni Hali : Bekar

Eğitimi

1987, İlkokul, Ali Rıza Çevik İlköğretim Okulu, Manisa

1990, Ortaokul, Atatürk Ortaokulu, Manisa

1993, Lise, Manisa Lisesi, Manisa

1998, Lisans, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Yürütülen Görevler : Haziran 1999'da C.B.Ü Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başlayan A.Tuğba GÜROĞLU halen bu görevde çalışmaya devam etmektedir.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ