T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI

MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA SLANT REGLE YÜZEYLERİN GEOMETRİLERİ VE KARAKTERİZASYONLARI

Onur KAYA

Danışman
Prof. Dr. Mustafa KAZAZ



MANİSA-2020

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

28.07.2020
Onur KAYA

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ III
ŞEKİLLER DİZİNİ IV
TEŞEKKÜR V
ÖZET VI
ABSTRACT VII
1. GİRİŞ 1
2. GENEL BİLGİLER 2
2.1. Minkowski 3-uzayında Temel Kavramlar 2
2.2. Minkowski 3-uzayında Regle Yüzeylerin Diferansiyel Geometrisi 5
2.2.1. Spacelike Regle Yüzeylerin Frenet Formülleri 7
2.2.2. Anadoğruları Spacelike Olan Timelike Regle Yüzeylerin Frenet Formülleri 8
2.2.3. Anadoğruları Timelike Olan Timelike Regle Yüzeylerin Frenet Formülleri 9
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER 11
3.1. Öklid 3-uzayında Helisler ve Slant Helisler 11
3.2. Öklid 3-uzayında Slant Regle Yüzeyler 12
3.3. Minkowski 3-uzayında Helisler ve Slant Helisler 13
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA 15
4.1. Minkowski 3-uzayında Spacelike ve Timelike Slant Regle Yüzeyler 15
4.1.1. Spacelike ve Timelike q-slant Regle Yüzeyler 15
4.1.2. Spacelike ve Timelike h-slant Regle Yüzeyler 23
4.1.3. Spacelike ve Timelike a-slant Regle Yüzeyler 43
4.1.4. Minkowski 3-uzayında Slant Regle Yüzey Örnekleri 43
4.2. Minkowski 3-uzayında Spacelike ve Timelike Darboux Slant Regle Yüzeyler 46
4.2.1. Spacelike Darboux Slant Regle Yüzeyler 46
4.2.2. Anadoğruları Spacelike Olan Timelike Darboux Slant Regle Yüzeyler 48
4.2.3. Anadoğruları Timelike Olan Timelike Darboux Slant Regle Yüzeyler 52
4.2.4. Spacelike ve Timelike Slant Regle Yüzeyler Arasındaki İlişkiler . . . 56
4.2.5. Minkowski 3-uzayında Darboux Slant Regle Yüzey Örnekleri 58
4.3. Minkowski 3-uzayında Spacelike ve Timelike Slant Regle Yüzeylerin Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları 61
4.3.1. Spacelike Slant Regle Yüzeylerin Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları 61
4.3.2. Anadoğruları Spacelike Olan Timelike Slant Regle Yüzeylerin Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları 73
4.3.3. Anadoğruları Timelike Olan Timelike Slant Regle Yüzeylerin Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları 89

4.4. Minkowski 3-uzayında Açılabilir Spacelike ve Timelike Slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri . . . 106
4.4.1. Minkowski 3-uzayında Açılabilir Spacelike ve Timelike q-slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri . . . 106
4.4.1.1. Açılabilir Spacelike q-slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri 106
4.4.1.2. Anadoğruları Spacelike Olan Açılabilir Timelike q-slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri . . . 112
4.4.1.3. Anadoğruları Timelike Olan Açılabilir Timelike q-slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri . . . 120
4.4.2. Minkowski 3-uzayında Açılabilir Spacelike ve Timelike h-slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri . . . 128
4.4.2.1. Açılabilir Spacelike h-slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri 128
4.4.2.2. Anadoğruları Spacelike Olan Açılabilir Timelike h-slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri . . . 137
4.4.2.3. Anadoğruları Timelike Olan Açılabilir Timelike h-slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri . . . 146
4.4.3. Minkowski 3-uzayında Açılabilir Slant Regle Yüzey Örnekleri . . . 155
5. SONUÇ VE ÖNERİLER . . . 159
KAYNAKLAR . . . 160
ÖZGEÇMİŞ . . . 162

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

τ_α	$\vec{\alpha}$ eğrisinin burulma fonksiyonu
κ_α	$\vec{\alpha}$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu
s	$\vec{c}$ eğrisinin yay uzunluğu parametresi
$\vec{\alpha}$	Eğri
$\vec{n}$	Eğrinin birim asal normal vektörü
$\vec{b}$	Eğrinin birim binormal vektörü
$\vec{t}$	Eğrinin birim teğet vektörü
s_1	$\vec{k}_1$ eğrisinin yay uzunluğu parametresi
$\mathbb{E}_1^3$	Minkowski 3-uzayı
H_0^2	Minkowski 3-uzayında hiperbolik birim küre
S_1^2	Minkowski 3-uzayında Lorentziyen birim küre
$\mathbb{E}^3$	Öklid 3-uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
S	Regle yüzey
$\vec{q}$	Regle yüzeyin anadoğrularının birim doğrultu vektör alanı
$\vec{k}_1$	Regle yüzeyin anadoğrularının çizdiği küresel eğri
$\vec{c}$	Regle yüzeyin boğaz çizgisi
$\vec{w}$	Regle yüzeyin Darboux vektörü
$\vec{k}$	Regle yüzeyin dayanak eğrisi
$\vec{h}$	Regle yüzeyin merkez normal vektör alanı
$\vec{a}$	Regle yüzeyin merkez teğet vektör alanı
$\vec{r}$	Regle yüzeyin parametrizasyonu
κ	Regle yüzeyin yönlü konisinin konisel eğrilik fonksiyonu
d_S	S regle yüzeyinin dağılma parametresi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında Hiperbolik Birim Küre 4
Şekil 2.2. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında Lorentziyen Birim Küre 4
Şekil 4.1. S_1 anadoğruları spacelike olan timelike q-slant regle yüzeyi 44
Şekil 4.2. S_2 anadoğruları timelike olan timelike h-slant regle yüzeyi 45
Şekil 4.3. S_3 spacelike Darboux slant regle yüzeyi 59
Şekil 4.4. S_4 anadoğruları spacelike olan timelike Darboux slant regle yüzeyi . 59
Şekil 4.5. S_5 anadoğruları timelike olan timelike Darboux slant regle yüzeyi . . 60
Şekil 4.6. S_6 açılabilir spacelike q-slant regle yüzeyi 156
Şekil 4.7. S_7 anadoğruları timelike olan açılabilir timelike q-slant regle yüzeyi . 156
Şekil 4.8. S_8 açılabilir spacelike h-slant regle yüzeyi 157
Şekil 4.9. S_9 anadoğruları spacelike olan açılabilir timelike h-slant regle yüzeyi 158

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının belirlenme ve hazırlanma sürecinde bilgi ve tecrübesiyle bana her zaman destek olan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Mustafa KAZAZ'a teşekkürü bir borç bilirim. Aynı zamanda, bu süreçte yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU ile Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT'e ve bu çalışmayı destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na teşekkürlerimi sunarım.

Onur KAYA
Manisa, 2020

ÖZET

Doktora Tezi

Minkowski 3-uzayında Slant Regle Yüzeylerin Geometrileri ve Karakterizasyonları

Onur KAYA

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

Bu tez çalışması temel olarak Minkowski 3-uzayında eğriler ve yüzeyler geometrisi üzerine bir çalışmadır. İlk olarak Öklid ve Minkowski 3-uzaylarındaki temel kavramlar verilmiştir. Helis ve slant helis tanımları verilerek slant kavramı belirtilmiştir. Sonrasında, regle yüzeylerle ilgili temel kavramlar verilmiş ve slant kavramının regle yüzeylerle buluşması sonucu oluşturulan slant regle yüzeyler tanıtılmıştır.

Slant regle yüzeyler, Öklid 3-uzayında olduğu gibi Minkowski 3-uzayında da q-slant, h-slant ve a-slant olmak üzere üç farklı şekilde tanımlanmıştır. Bununla birlikte, Minkowski 3-uzayındaki vektörler, eğriler ve yüzeyler spacelike, timelike ve lightlike karakterine sahip olabilmektedir.

Bu tezde, spacelike ve timelike slant regle yüzeylerin geometrisi incelenmiştir. Spacelike ve timelike Darboux slant regle yüzeyler tanımlanmıştır ve bu tür yüzeylerle ilgili teoremler verilmiştir. Spacelike ve timelike slant regle yüzeyleri ve aynı zamanda bu yüzeylerin Frenet vektörleri tarafından çizilen slant regle yüzeyleri karakterize eden diferansiyel denklem karakterizasyonları çıkarılmıştır. Son olarak, açılabilir spacelike ve timelike q-slant ve h-slant regle yüzeyler ele alınmış ve bu tür yüzeylerin konum vektörleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Minkowski 3-uzayı, Eğriler teorisi, Yüzeyler teorisi, Slant regle yüzey, Slant helis, Helis, Konum vektörü.

2020, 163 sayfa

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

Geometries and Characterizations of Slant Ruled Surfaces in Minkowski 3-space

Onur KAYA

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

This thesis is basically a study on the geometry of curves and surfaces in Minkowski 3-space. First, basic information is given in the Euclidean and Minkowski 3-spaces. The definitions of helix and slant helix are presented and the concept of slant is stated. Later, basic notions regarding ruled surfaces are given and slant ruled surfaces are introduced which are formed by uniting the concept of slant with ruled surfaces.

Slant ruled surfaces are defined as three different types called q-slant, h-slant and a-slant in Minkowski 3-space as they are defined in the Euclidean 3-space. However, the vectors, curves and surfaces could be from spacelike, timelike and lightlike character in the Minkowski 3-space.

In this thesis, the geometry of spacelike and timelike slant ruled surfaces are investigated. Spacelike and timelike Darboux slant ruled surfaces are defined and theorems about such surfaces are given. Differential equation characterizations for spacelike and timelike slant ruled surfaces and for the slant ruled surfaces which are drawn by the Frenet vectors of such surfaces are deducted. Finally, spacelike and timelike q-slant and h-slant developable ruled surfaces and their position vectors are investigated.

Keywords: Minkowski 3-space, Theory of curves, Theory of surfaces, Slant ruled surface, Slant helix, Helix, Position vector.

2020, 163 pages

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometrinin temel konuları olan eğriler ve yüzeyler teorisi, geometrinin en önemli konuları olup geniş uygulama ve çalışma alanlarıyla matematikçiler tarafından çokça ilgi duyulan ve çalışılan konulardır. Eğriler teorisinde en çok ilgi çeken konular ise bazı özel eğriler olup bu eğrilerden en önemlisi helis eğrileridir. Helis eğrileri, teğetleri sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğriler olarak tanımlanmıştır [1]. 1802 yılında Lancret helisler üzerine bir sonuç ortaya koydu ancak bunun ispatı 1845 yılında Venant tarafından yapıldı [2]. Daha sonra helisler üzerine birçok matematikçi sayısız çalışmalar yaptılar ve bu çalışmalar sadece Öklid uzaylarında değil aynı zamanda Minkowski uzaylarında da yapıldı [3,4]. Yakın zamanda, Izumiya ve Takeuchi helislere benzer şekilde asal normal vektörleri sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğriler olarak slant helisleri tanımlamışlardır [5]. Sonrasında slant helisler de helisler gibi gerek Öklid gerekse Minkowski uzaylarında oldukça yaygın olarak çalışılmıştır [6–11].

Eğrilere benzer olarak, yüzeylerde de regle yüzeyler özellikle mimarlık ve mühendislik alanlarında yaygın kullanım alanlarına sahip olduklarından çokça çalışılan konulardandır [12–17]. Abdel-Baky, slant kavramını dual vektör analizi anlamında regle yüzeylere uygulamıştır [18]. Önder, regle yüzeylerin boğaz çizgisi boyunca hareket eden ortonormal çatıyı kullanarak slant kavramını regle yüzeylere uygulamıştır [19, 20]. Önder ve Kaya, Öklid 3-uzayında, slant regle yüzeylerin karakterizasyonlarıyla ve konum vektörleriyle ilgili çalışmalar yapmışlardır [21–25].

Bu tezin amacı, Minkowski 3-uzayında slant regle yüzeylerin geometrilerini incelemek, bu yüzeylerle ilgili karakterizasyonlar oluşturmak ve bu yüzeylerin konum vektörleri üzerine çalışma yapmaktır. Konum vektörlerinin belirlenmesi yeni yüzeylerin üretilmesi açısından önem arzeder. Bu sebeple, belirlenen konum vektörleri sayesinde Minkowski 3-uzayında sonsuz sayıda slant regle yüzey üretmek mümkün olacaktır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ ile ilgili temel kavramlar ve bu uzayda regle yüzeylerin diferansiyel geometrisi ile ilgili bilgiler verilecektir.

2.1. Minkowski 3-uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Minkowski 3-uzayında iki vektör $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere, bu uzayda iç çarpım fonksiyonu

$$\begin{gathered} \langle\, , \rangle : \mathbb{E}_1^3 \times \mathbb{E}_1^3 \to \mathbb{R} \\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 \end{gathered} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu iç çarpıma Minkowski (Lorentziyen) iç çarpımı denir [26].

Minkowski iç çarpım fonksiyonu pozitif tanımlı olmadığı için, bu uzaydaki vektörler üç farklı karaktere sahip olabilir.

Tanım 2.1.2. $\vec{x} \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere,

(i) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ veya $\vec{x} = \vec{0}$ ise $\vec{x}$ vektörüne spacelike,

(ii) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ ise $\vec{x}$ vektörüne timelike,

(iii) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ ise $\vec{x}$ vektörüne lightlike (null)

vektör denir [26].

I kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin açık bir alt aralığı ve $\vec{\alpha} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında regüler bir eğri olmak üzere, $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ eğrisinin karakteri

(i) $\dot{\vec{\alpha}}$ spacelike ise $\vec{\alpha}$ spacelike,

(ii) $\dot{\vec{\alpha}}$ timelike ise $\vec{\alpha}$ timelike,

(iii) $\dot{\vec{\alpha}}$ lightlike (null) ise $\vec{\alpha}$ lightlike (null),

şeklinde belirlenir. Burada $\dot{\vec{\alpha}} = \dfrac{d\vec{\alpha}}{ds}$ olup, s parametresi $\vec{\alpha}$ eğrisinin yay uzunluğu parametresidir [26] ve regüler eğri ifadesi ile birinci türevi sıfırdan farklı olan eğriler kastedilmiştir.

Tanım 2.1.3. Bir $\vec{x} \in \mathbb{E}_1^3$ vektörünün normu

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|}$$

ile tanımlanır. Eğer $\|\vec{x}\| = 1$ ise, bu vektöre birim vektör denir [26].

$\vec{\alpha} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında bir eğri olsun. $\vec{\alpha}$ eğrisinin türev formülleri aşağıdaki gibi verilir:

(i) $\vec{\alpha}$ eğrisi bir timelike eğri ise,

$$\begin{bmatrix} \vec{t}' \\ \vec{n}' \\ \vec{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_\alpha & 0 \\ \kappa_\alpha & 0 & \tau_\alpha \\ 0 & -\tau_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

olup, burada $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$, sırasıyla, $\vec{\alpha}$ eğrisinin teğet, asal normal, binormal vektör alanıdır ve $\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle = -1$, $\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 1$ şeklindedir. $\kappa_\alpha = \langle \vec{t}', \vec{n} \rangle$, $\tau_\alpha = \langle \vec{n}', \vec{b} \rangle$ fonksiyonları ise $\vec{\alpha}$ eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonlarıdır.

(ii) $\vec{\alpha}$ eğrisi asal normal vektörü spacelike olan bir spacelike eğri ise,

$$\begin{bmatrix} \vec{t}' \\ \vec{n}' \\ \vec{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_\alpha & 0 \\ -\kappa_\alpha & 0 & \tau_\alpha \\ 0 & \tau_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

olup, burada $\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = 1$, $\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = -1$ ve $\kappa_\alpha = \|\vec{t}'\|$, $\tau_\alpha = -\langle \vec{n}', \vec{b} \rangle$ şeklindedir.

(iii) $\vec{\alpha}$ eğrisi asal normal vektörü timelike olan bir spacelike eğri ise,

$$\begin{bmatrix} \vec{t}' \\ \vec{n}' \\ \vec{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_\alpha & 0 \\ \kappa_\alpha & 0 & \tau_\alpha \\ 0 & \tau_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

olup, burada $\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 1$, $\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = -1$ ve $\kappa_\alpha = \|\vec{t}'\|$, $\tau_\alpha = \langle \vec{n}', \vec{b} \rangle$ şeklindedir [26].

Tanım 2.1.4. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında hiperbolik ve Lorentziyen birim küreler, sırasıyla

$$H_0^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{E}_1^3 \mid \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = -1\} \tag{2.5}$$

ve

$$S_1^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{E}_1^3 \mid \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 1\} \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlı olup, grafikleri sırasıyla, Şekil 2.1 ve Şekil 2.2 ile verilmiştir [26].

Tanım 2.1.5. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında iki vektör $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerinin vektörel çarpımı

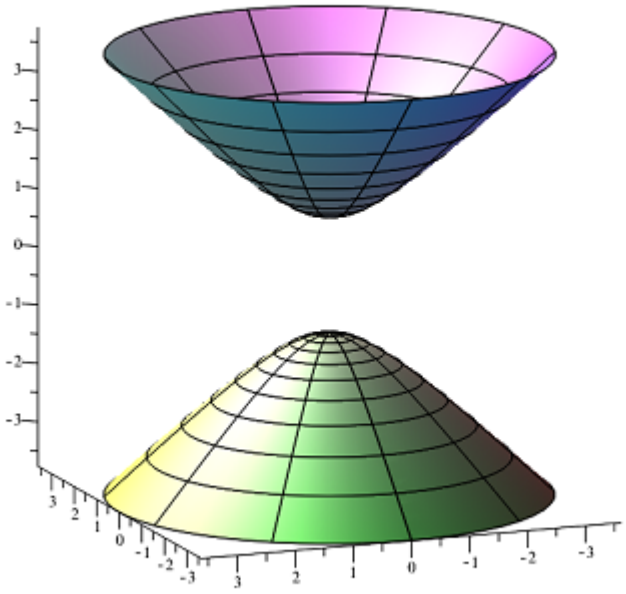
$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_3 y_2 - x_2 y_3, x_1 y_3 - x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

şeklinde tanımlıdır [26].

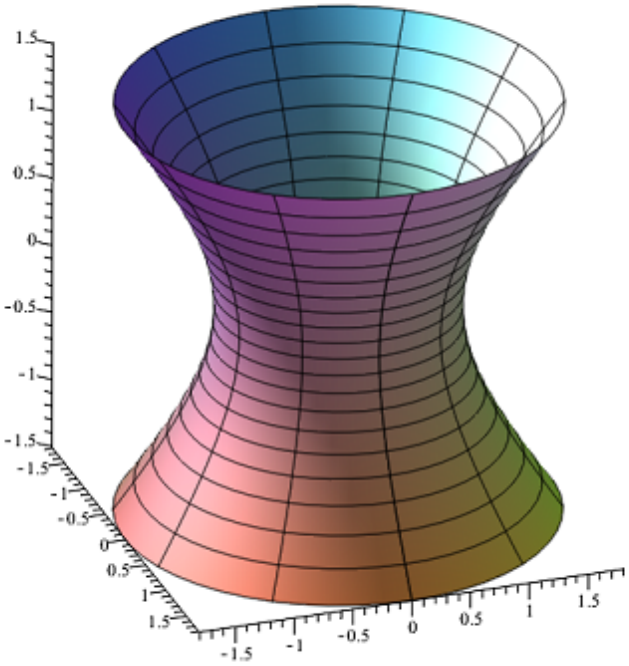
Teorem 2.1.6. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında üç vektör $\vec{x}, \vec{y}$ ve $\vec{z}$ olmak üzere bu vektörler arasında

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = -\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \vec{y} + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \vec{x}$$

bağıntısı vardır [27].



Şekil 2.1. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında Hiperbolik Birim Küre



Şekil 2.2. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında Lorentziyen Birim Küre

Lemma 2.1.7. $\mathbb{E}_1^3$ uzayındaki vektörler için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) İki timelike vektör birbirine dik olamaz.

(ii) İki lightlike (null) vektörün birbirlerine dik olmaları için gerek ve yeter şart bu vektörlerin lineer bağımlı olmalarıdır.

(iii) Bir timelike vektör ile bir lightlike (null) vektör birbirlerine dik olamaz [26].

Tanım 2.1.8. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında iki vektör $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ olmak üzere, bu vektörlerin arasındaki açılar, vektörlerin karakterizasyonlarına bağlı olarak,

(i) Hiperbolik açı: $\vec{x}$, $\vec{y}$ timelike ise $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \cosh\theta$,

(ii) Spacelike açı: $\vec{x}$, $\vec{y}$ spacelike ve gerdikleri düzlem spacelike ise $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \cos\theta$,

(iii) Merkez açı: $\vec{x}$, $\vec{y}$ spacelike ve gerdikleri düzlem timelike ise $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \cosh\theta$,

(iv) Lorentziyen açı: $\vec{x}$ spacelike ve $\vec{y}$ timelike ise $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \sinh\theta$,

şeklinde tanımlanır [27–29].

Tanım 2.1.9. S, $\mathbb{E}_1^3$ uzayında bir yüzey olmak üzere, bu yüzeyin her noktasındaki yüzey normal vektörü timelike vektör ise S yüzeyine spacelike yüzey, spacelike vektör ise S yüzeyine timelike yüzey denir [26].

2.2. Minkowski 3-uzayında Regle Yüzeylerin Diferansiyel Geometrisi

Tanım 2.2.1. I_1 kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin bir açık aralığı ve bu aralık üzerinde tanımlı bir eğri $\vec{k} = \vec{k}(s)$ olsun. Bir birim vektör doğrultusunda verilmiş yönlü bir doğru $\vec{q} = \vec{q}(s)$ olmak üzere, bu doğru $\vec{k} = \vec{k}(s)$ eğrisi boyunca hareket etsin. Bu takdirde, başka bir $I_2 \subset \mathbb{R}$ açık aralığı için, bir S yüzeyinin parametrik ifadesi

$$\vec{r}(s, v) = \vec{k}(s) + v\vec{q}(s), \quad s \in I_1,\ v \in I_2 \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır. Bu yüzeye $\mathbb{E}_1^3$ uzayında bir regle yüzey denir [13, 14, 20].

(2.7) denklemindeki $\vec{k}$ eğrisine yüzeyin dayanak eğrisi, $\vec{q}$ vektörüne ise yüzeyin anadoğrularının doğrultu vektörü adı verilir. Eğer $\vec{q}$ sabitse, yüzey silindirik regle yüzey, aksi halde silindirik olmayan regle yüzey olarak adlandırılır.

Bir S regle yüzeyinin bir anadoğrusunu göz önüne alalım. Bu anadoğruya sonsuz yakın ikinci bir doğru ile ortak dikme ayaklarının ele aldığımız anadoğru üzerindeki ayağına boğaz noktası ve bu boğaz noktalarının geometrik yerine boğaz çizgisi denir. Boğaz çizgisini $\vec{c} = \vec{c}(s)$ ile gösterirsek, bu eğrinin denklemi

$$\vec{c}(s) = \vec{k}(s) - \frac{\langle \dot{\vec{k}}, \dot{\vec{q}} \rangle}{\langle \dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}} \rangle} \vec{q}(s) \tag{2.8}$$

ile verilir. Burada, s parametresi boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresidir ve $\dot{\vec{q}}$ ile belirtilen nokta türevi $\dot{\vec{q}} = \dfrac{d\vec{q}}{ds}$ şeklinde s yay uzunluğu parametresine göre olan türevdir. (2.8) denkleminden, bir regle yüzeyin dayanak eğrisinin boğaz çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\langle \dot{\vec{k}}, \dot{\vec{q}} \rangle = 0$ olmasıdır.

(2.8) denklemini göz önünde bulundurursak, (2.7) denklemi ile verilen regle yüzeyin parametrik denklemini, boğaz çizgisini kullanarak

$$\vec{r}(s, v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s) \tag{2.9}$$

ile vermek mümkündür.

(2.7) denklemiyle verilen regle yüzeyin dağılma parametresinin ifadesi

$$d_S = \frac{det(\dot{\vec{k}}, \vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\langle \dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}} \rangle}$$

şeklindedir. Eğer $det(\dot{\vec{k}}, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) = 0$ ise, bu takdirde aynı $\vec{q}$ anadoğrusunun tüm noktalarında normal vektörler aynıdır ve S yüzeyinin tekil olmayan noktalarında teğet düzlemler aynı kalır. Burada, tekil noktalar yüzey normal vektörünün sıfır vektörüne eşit olduğu noktalardır. Dolayısıyla, tekil olmayan noktalarda yüzey normal vektörü sıfır vektöründen farklıdır. Bu durumda, teğet düzlem yüzeye bir anadoğru boyunca temas eder. Böyle anadoğrulara *torsal* anadoğru denir. Eğer $det(\dot{\vec{k}}, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) \neq 0$ ise bu takdirde, S yüzeyinin teğet düzlemleri aynı anadoğru üzerindeki tüm noktalarda birbirinden farklıdır. Böyle anadoğrulara ise *torsal olmayan* anadoğru denir [17, 20].

Tanım 2.2.2. Minkowski 3-uzayında, bütün anadoğruları torsal olan bir regle yüzeye *açılabilir regle yüzey* denir. Aksi halde yüzey *aykırı (açılabilir olmayan) regle yüzey* olarak adlandırılır [17, 20].

Teorem 2.2.3. Minkowski 3-uzayındaki bir S regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart yüzeyin her noktasındaki dağılma parametresinin $d_S = 0$ olmasıdır [17, 20].

Açılabilir bir regle yüzeyin boğaz çizgisinin teğet vektörleri yüzeyin anadoğrularıyla çakışır. Böylece, boğaz çizgisinin teğet vektörü için

$$\frac{d\vec{c}}{ds} = \vec{q} \tag{2.10}$$

yazılabilir.

$\vec{h} = \dfrac{\dot{\vec{q}}}{\|\dot{\vec{q}}\|}$ ve $\vec{a} = \pm\dfrac{\vec{q}\times\dot{\vec{q}}}{\|\vec{q}\times\dot{\vec{q}}\|}$ ($\vec{a}$ timelike ise $+$, spacelike ise $-$) vektörleri, sırasıyla, S yüzeyinin merkez normal ve merkez teğet vektörleridir. Boğaz noktası C olmak üzere, $\{C; \vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ortonormal sistemine regle yüzeyin Frenet çatısı denir. Yüzeyin bir s_0 anadoğrusundan geçen ve $\vec{a}$ vektörüne dik olan düzleme asimptotik düzlem, s_0 anadoğrusundan geçen ve asimptotik düzleme dik olan düzleme ise merkez düzlem denir.

Tanım 2.2.4. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında, Frenet vektörleri ve bu vektörlerin türevleri lightlike (null) olmayan bir S regle yüzeyini göz önüne alalım. Frenet vektörlerinin karakterlerine göre S yüzeyi aşağıdaki şekilde sınıflandırılır:

(i) $\vec{q}$ spacelike, $\vec{h}$ timelike ve $\vec{a}$ spacelike vektör ise S yüzeyine spacelike regle yüzey denir.

(ii) $\vec{q}$ spacelike, $\vec{h}$ spacelike ve $\vec{a}$ timelike vektör ise S yüzeyine anadoğruları spacelike olan timelike regle yüzey denir.

(iii) $\vec{q}$ timelike, $\vec{h}$ spacelike ve $\vec{a}$ spacelike vektör ise S yüzeyine anadoğruları timelike olan timelike regle yüzey denir [13, 14, 20].

2.2.1. Spacelike Regle Yüzeylerin Frenet Formülleri

S regle yüzeyi Tanım 2.2.4'ün **(i)** şıkkında tanımlanan şekilde spacelike bir regle yüzey olsun. Yüzeyin c boğaz çizgisi üzerindeki Frenet çatısı da $\{C; \vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ile verilsin. Bu vektörler arasında,

$$\vec{q}\times\vec{h} = -\vec{a},\ \ \vec{h}\times\vec{a} = -\vec{q},\ \ \vec{a}\times\vec{q} = \vec{h}$$

eşitlikleri vardır ve $\langle\vec{q},\vec{q}\rangle = 1, \langle\vec{h},\vec{h}\rangle = -1, \langle\vec{a},\vec{a}\rangle = 1$ şeklindedir. Şimdi, S regle yüzeyinin bütün $\vec{q}(s)$ anadoğrularının bir O başlangıç noktasına taşındığını (bağlandığını)

düşünelim. Bu anadoğrular, O noktasında bir koni oluştururlar. Bu koniye yüzeyin yönlü konisi denir. $\vec{q}(s)$ vektörlerinin uç noktaları S_1^2 Lorentziyen birim küresi üzerinde bir $\vec{k}_1$ küresel timelike eğrisi çizerler. Bu eğri, S yüzeyinin Lorentziyen küresel göstergesi olarak adlandırılır ve yay parametresi s_1 ile gösterilir [29].

Teorem 2.2.5. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında, bir S spacelike regle yüzeyinin ve bu yüzeyin yönlü konisinin $\{O;\vec{q},\vec{h},\vec{a}\}$ Frenet çatısının vektörlerinin $\vec{k}_1$ küresel eğrisinin s_1 yay parametresine göre türev denklemleri

$$\begin{bmatrix}\vec{q}'\\ \vec{h}'\\ \vec{a}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&\kappa\\0&\kappa&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{q}\\ \vec{h}\\ \vec{a}\end{bmatrix} \tag{2.11}$$

şeklindedir. Burada $\kappa=\kappa(s_1)$ fonksiyonu $\kappa=-\langle\vec{a}',\vec{h}\rangle$ ile tanımlı yönlü koninin konisel eğrilik fonksiyonudur ve $\vec{q}'=\dfrac{d\vec{q}}{ds_1}$ türevi s_1 parametresine göre türevi belirtir [17, 30].

Tanım 2.2.6. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında, bir S spacelike regle yüzeyinin $\{O;\vec{q},\vec{h},\vec{a}\}$ çatısına göre Darboux ani dönme vektörü

$$\vec{w}=-\kappa\vec{q}+\vec{a} \tag{2.12}$$

ile tanımlı olup, $\vec{q}'=\vec{w}\times\vec{q},\vec{h}'=\vec{w}\times\vec{h},\vec{a}'=\vec{w}\times\vec{a}$ eşitlikleri sağlanır.

(2.12) eşitliğinden, Darboux ani dönme vektörünün Lorentziyen karakterini incelersek,

$$\langle\vec{w},\vec{w}\rangle=\kappa^2+1>0$$

olup, Darboux vektörü spacelike vektördür [17, 30].

2.2.2. Anadoğruları Spacelike Olan Timelike Regle Yüzeylerin Frenet Formülleri

S regle yüzeyi Tanım 2.2.4'ün **(ii)** şıkkında tanımlanan şekilde anadoğruları spacelike olan bir timelike regle yüzey olsun. Yüzeyin c boğaz çizgisi üzerindeki Frenet çatısı da $\{C;\vec{q},\vec{h},\vec{a}\}$ ile verilsin. Bu vektörler arasında,

$$\vec{q}\times\vec{h}=\vec{a},\ \ \vec{h}\times\vec{a}=-\vec{q},\ \ \vec{a}\times\vec{q}=-\vec{h}$$

eşitlikleri vardır ve $\langle\vec{q},\vec{q}\rangle=1,\langle\vec{h},\vec{h}\rangle=1,\langle\vec{a},\vec{a}\rangle=-1$ şeklindedir. Şimdi, S regle yüzeyinin bütün $\vec{q}(s)$ anadoğrularının bir O başlangıç noktasına taşındığını (bağlandığını) düşünelim. Bu anadoğrular, O noktasında bir koni oluştururlar. Bu koniye yüzeyin yönlü

konisi denir. $\vec{q}(s)$ vektörlerinin uç noktaları S_1^2 Lorentziyen birim küresi üzerinde bir $\vec{k}_1$ küresel timelike eğrisi çizerler. Bu eğri, S yüzeyinin Lorentziyen küresel göstergesi olarak adlandırılır ve yay parametresi s_1 ile gösterilir [29].

Teorem 2.2.7. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında, anadoğruları spacelike olan bir S timelike regle yüzeyinin ve bu yüzeyin yönlü konisinin $\{O;\vec{q},\vec{h},\vec{a}\}$ Frenet çatısının vektörlerinin $\vec{k}_1$ küresel eğrisinin s_1 yay parametresine göre türev denklemleri

$$\begin{bmatrix}\vec{q}'\\ \vec{h}'\\ \vec{a}'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & \kappa\\ 0 & \kappa & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{q}\\ \vec{h}\\ \vec{a}\end{bmatrix} \tag{2.13}$$

şeklindedir. Burada $\kappa = \kappa(s_1)$ fonksiyonu $\kappa = \langle \vec{a}', \vec{h}\rangle$ ile tanımlı yönlü koninin konisel eğrilik fonksiyonudur ve $\vec{q}' = \frac{d\vec{q}}{ds_1}$ türevi s_1 parametresine göre türevi belirtir [31].

Tanım 2.2.8. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında, anadoğruları spacelike olan bir S timelike regle yüzeyinin $\{O;\vec{q},\vec{h},\vec{a}\}$ çatısına göre Darboux ani dönme vektörü

$$\vec{w} = \kappa\vec{q} - \vec{a} \tag{2.14}$$

ile tanımlı olup, $\vec{q}' = \vec{w}\times\vec{q}, \vec{h}' = \vec{w}\times\vec{h}, \vec{a}' = \vec{w}\times\vec{a}$ eşitlikleri sağlanır.

(2.14) eşitliğinden, Darboux ani dönme vektörünün Lorentziyen karakterini incelersek,

$$\langle \vec{w}, \vec{w}\rangle = \kappa^2 - 1$$

olup, Darboux vektörünün karakteri için

$$\begin{cases}\kappa < -1 \text{ veya } \kappa > 1 \text{ ise } \vec{w} \text{ spacelike vektör ,}\\ -1 < \kappa < 1 \text{ ise } \vec{w} \text{ timelike vektör,}\end{cases}$$

sonucuna ulaşılır [31].

2.2.3. Anadoğruları Timelike Olan Timelike Regle Yüzeylerin Frenet Formülleri

S regle yüzeyi Tanım 2.2.4'ün **(iii)** şıkkında tanımlanan şekilde anadoğruları timelike olan bir timelike regle yüzey olsun. Yüzeyin c boğaz çizgisi üzerindeki Frenet çatısı da $\{C;\vec{q},\vec{h},\vec{a}\}$ ile verilsin. Bu vektörler arasında,

$$\vec{q}\times\vec{h} = -\vec{a},\ \ \vec{h}\times\vec{a} = \vec{q},\ \ \vec{a}\times\vec{q} = -\vec{h}$$

eşitlikleri vardır ve $\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle = -1, \langle \vec{h}, \vec{h} \rangle = 1, \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$ şeklindedir. Şimdi, S regle yüzeyinin bütün $\vec{q}(s)$ anadoğrularının bir O başlangıç noktasına taşındığını (bağlandığını) düşünelim. Bu anadoğrular, O noktasında bir koni oluştururlar. Bu koniye yüzeyin yönlü konisi denir. $\vec{q}(s)$ vektörlerinin uç noktaları H_0^2 hiperbolik birim küresi üzerinde bir $\vec{k}_1$ küresel spacelike eğrisi çizerler. Bu eğri, S yüzeyinin Lorentziyen küresel göstergesi olarak adlandırılır ve yay parametresi s_1 ile gösterilir [29].

Teorem 2.2.9. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında, anadoğruları timelike olan bir S timelike regle yüzeyinin ve bu yüzeyin yönlü konisinin $\{O; \vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısının vektörlerinin $\vec{k}_1$ küresel eğrisinin s_1 yay parametresine göre türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \vec{q}' \\ \vec{h}' \\ \vec{a}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{h} \\ \vec{a} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

şeklindedir. Burada $\kappa = \kappa(s_1)$ fonksiyonu $\kappa = -\langle \vec{a}', \vec{h} \rangle$ ile tanımlı yönlü koninin konisel eğrilik fonksiyonudur ve $\vec{q}' = \dfrac{d\vec{q}}{ds_1}$ türevi s_1 parametresine göre türevi belirtir [31].

Tanım 2.2.10. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında, anadoğruları timelike olan bir S timelike regle yüzeyinin $\{O; \vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ çatısına göre Darboux ani dönme vektörü

$$\vec{w} = -\kappa \vec{q} - \vec{a} \tag{2.16}$$

ile tanımlı olup, $\vec{q}' = \vec{w} \times \vec{q}, \vec{h}' = \vec{w} \times \vec{h}, \vec{a}' = \vec{w} \times \vec{a}$ eşitlikleri sağlanır.

(2.16) eşitliğinden, Darboux ani dönme vektörünün Lorentziyen karakterini incelersek,

$$\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 1 - \kappa^2$$

olup, Darboux vektörünün karakteri için

$$\begin{cases} -1 < \kappa < 1 \text{ ise } \vec{w} \text{ spacelike vektör ,} \\ \kappa < -1 \text{ veya } \kappa > 1 \text{ ise } \vec{w} \text{ timelike vektör,} \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır [31].

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bu bölümde helis, slant helis ve slant regle yüzeylerle ilgili bilgilere yer verilmiştir. Bu bölümde verilen tanımlar ve teoremler daha sonra Minkowski 3-uzayında slant regle yüzeyleri incelemek için kullanılacaktır.

3.1. Öklid 3-uzayında Helisler ve Slant Helisler

Slant regle yüzeylerin tanımlarına geçmeden önce helis tanımını verelim ve slant kavramının ortaya nasıl çıktığından bahsedelim.

Tanım 3.1.1. Öklid 3-uzayında regüler bir eğri $\vec{\alpha}$ ve $\vec{\alpha}$ eğrisinin teğet vektörü $\vec{t}$ olsun. Eğer $\vec{t}$ vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle \vec{t}, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0$$

olacak şekilde bir $\vec{u}$ vektörü varsa, $\vec{\alpha}$ eğrisine genel helis denir [2, 3].

Teorem 3.1.2. $\vec{\alpha} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ eğrisi, eğrilik ve burulma fonksiyonları, sırasıyla, κ_α ve τ_α olan ve üç kez türevlenebilen bir eğri olsun. Bu takdirde, $\vec{\alpha}$ eğrisinin bir genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \text{sabit}$$

olmasıdır [2, 3].

Genel helis tanımından yola çıkarak Izumiya ve Takeuchi slant helis kavramını aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

Tanım 3.1.3. $\mathbb{E}^3$ Öklid 3-uzayında regüler bir eğri $\vec{\alpha}$ ve $\vec{\alpha}$ eğrisinin asal normal vektörü $\vec{n}$ olsun. Eğer $\vec{n}$ vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapıyorsa, yani,

$$\langle \vec{n}, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0$$

olacak şekilde sabit bir $\vec{u}$ vektörü varsa, $\vec{\alpha}$ eğrisine slant helis denir [5].

Teorem 3.1.4. $\vec{\alpha} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ eğrisi, eğrilik ve burulma fonksiyonları, sırasıyla, κ_α ve τ_α olan regüler bir eğri olsun. Bu takdirde, $\vec{\alpha}$ eğrisinin bir slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa_\alpha^2}{(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \right)' = \text{sabit}$$

olmasıdır [5].

Slant helis tanımından yola çıkarak Önder, *slant* kavramını regle yüzeylere taşımış ve slant regle yüzeyleri tanımlamıştır [19].

3.2. Öklid 3-uzayında Slant Regle Yüzeyler

Tanım 3.2.1. S yüzeyi, Öklid 3-uzayında tanımlı bir regle yüzey, $\vec{c}(s)$ eğrisi, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s parametresi, boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi olsun. S yüzeyinin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu, sırasıyla, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve $\kappa \neq 0$ olmak üzere yüzeyin parametrik ifadesi

$$\vec{r}(s, v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s), \;\; \|\vec{q}(s)\| = 1,$$

ile verilsin. Bu takdirde, birim ve sabit bir vektör $\vec{u}$ olmak üzere, yüzeyin $\vec{q}$ anadoğrularının doğrultu vektörleri $\vec{u}$ vektörüyle sabit açı yapıyorsa, yani,

$$\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \cos\theta = \text{sabit}, \;\; \theta \in \left\{(0, \pi) - \frac{\pi}{2}\right\}$$

ise, S regle yüzeyine q-slant regle yüzey denir ve $\vec{u}$ vektörü de q-slant regle yüzeyin ekseni olarak adlandırılır [19, 21].

Tanım 3.2.2. S yüzeyi, Öklid 3-uzayında tanımlı bir regle yüzey, $\vec{c}(s)$ eğrisi, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s parametresi boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi olsun. S yüzeyinin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu, sırasıyla, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve $\kappa \neq 0$ olmak üzere yüzeyin parametrik ifadesi

$$\vec{r}(s, v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s), \;\; \|\vec{q}(s)\| = 1,$$

ile verilsin. Bu takdirde, birim ve sabit bir vektör $\vec{u}$ olmak üzere, yüzeyin $\vec{h}$ merkez normal vektörleri $\vec{u}$ vektörüyle sabit açı yapıyorsa, yani,

$$\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = \cos\varphi = \text{sabit}, \;\; \varphi \in \left\{(0, \pi) - \frac{\pi}{2}\right\}$$

ise, S regle yüzeyine h-slant regle yüzey denir ve $\vec{u}$ vektörü de h-slant regle yüzeyin ekseni olarak adlandırılır [19, 21].

Tanım 3.2.3. S yüzeyi, $\mathbb{E}^3$ Öklid 3-uzayında tanımlı bir regle yüzey, $\vec{c}(s)$ eğrisi, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s parametresi boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi olsun. S yüzeyinin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu, sırasıyla, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve $\kappa \neq 0$ olmak

üzere yüzeyin parametrik ifadesi

$$\vec{r}(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s), \;\; \|\vec{q}(s)\| = 1,$$

ile verilsin. Bu takdirde, birim ve sabit bir vektör $\vec{u}$ olmak üzere, yüzeyin $\vec{a}$ merkez teğet vektörleri $\vec{u}$ vektörüyle sabit açı yapıyorsa, yani,

$$\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = \cos\psi = \text{sabit}, \;\; \psi \in \left\{ (0,\pi) - \frac{\pi}{2} \right\}$$

ise, S regle yüzeyine a-slant regle yüzey denir ve $\vec{u}$ vektörü de a-slant regle yüzeyin ekseni olarak adlandırılır [19, 21].

Tanım 3.2.4. S yüzeyi, $\mathbb{E}^3$ Öklid 3-uzayında tanımlı bir regle yüzey, $\vec{c}(s)$ eğrisi, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s parametresi boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi olsun. S yüzeyinin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu, sırasıyla, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve $\kappa \neq 0$ olmak üzere yüzeyin parametrik ifadesi

$$\vec{r}(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s), \;\; \|\vec{q}(s)\| = 1,$$

ile verilsin. Bu takdirde, birim ve sabit bir vektör $\vec{u}$ olmak üzere, yüzeyin $\vec{w}$ Darboux vektörü $\vec{u}$ vektörüyle sabit açı yapıyorsa, yani,

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \cos\phi = \text{sabit}, \;\; \phi \in \left\{ (0,\pi) - \frac{\pi}{2} \right\}$$

ise, S regle yüzeyine Darboux slant regle yüzey denir [21, 22].

3.3. Minkowski 3-uzayında Helisler ve Slant Helisler

Tanım 3.3.1. Minkowski 3-uzayında regüler bir eğri $\vec{\alpha}$ ve $\vec{\alpha}$ eğrisinin teğet vektörü $\vec{t}$ olsun. Eğer $\vec{t}$ vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle \vec{t}, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0$$

ise, $\vec{\alpha}$ eğrisine Minkowski 3-uzayında genel helis denir [4].

Teorem 3.3.2. Minkowski 3-uzayında, $\vec{\alpha} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ eğrisi, eğrilik ve burulma fonksiyonları, sırasıyla, κ_α ve τ_α olan ve üç kez türevlenebilen bir eğri olsun. Bu takdirde, $\vec{\alpha}$ eğrisinin bir genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \text{sabit}$$

olmasıdır [4].

Tanım 3.3.3. Minkowski 3-uzayında regüler bir eğri $\vec{\alpha}$ ve $\vec{\alpha}$ eğrisinin asal normal vektörü $\vec{n}$ olsun. Eğer $\vec{n}$ vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapıyorsa, yani,

$$\langle \vec{n}, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0$$

ise $\vec{\alpha}$ eğrisine Minkowski 3-uzayında slant helis denir.

Teorem 3.3.4. $\vec{\alpha} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^3$ eğrisi, eğrilik ve burulma fonksiyonları, sırasıyla, κ_α ve τ_α olan regüler bir eğri olsun. Bu takdirde, $\vec{\alpha}$ eğrisinin bir slant helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

(i) $\vec{\alpha}$ eğrisi asal normal vektörü spacelike olan spacelike bir eğri ise

$$\frac{\kappa_\alpha^2}{\left(\kappa_\alpha^2 - \tau_\alpha^2\right)^{3/2}} \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' = \text{sabit} \quad \text{veya} \quad \frac{\kappa_\alpha^2}{\left(\tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha^2\right)^{3/2}} \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' = \text{sabit}$$

(ii) $\vec{\alpha}$ eğrisi asal normal vektörü timelike olan spacelike bir eğri ise

$$\frac{\kappa_\alpha^2}{\left(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2\right)^{3/2}} \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' = \text{sabit}$$

(iii) $\vec{\alpha}$ eğrisi timelike bir eğri ise

$$\frac{\kappa_\alpha^2}{\left(\kappa_\alpha^2 - \tau_\alpha^2\right)^{3/2}} \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' = \text{sabit} \quad \text{veya} \quad \frac{\kappa_\alpha^2}{\left(\tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha^2\right)^{3/2}} \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' = \text{sabit}$$

olmasıdır [8].

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1. Minkowski 3-uzayında Spacelike ve Timelike Slant Regle Yüzeyler

Bu bölümde, Materyal ve Yöntemler bölümünde verilen tanımlar ve teoremler kullanılarak Minkowski 3-uzayında slant regle yüzeyler tanımlanacaktır ve bu yüzeylerin geometrisi incelenecektir. Bu incelemeler yapılırken, konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq$ kabul edilecektir. Bu kabul sonucu konoid tip yüzeyler inceleme dışı bırakılmıştır.

4.1.1. Spacelike ve Timelike q-slant Regle Yüzeyler

Tanım 4.1.1. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı bir spacelike (timelike) regle yüzey, $\vec{c}(s)$ eğrisi, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s parametresi boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi olsun. S yüzeyinin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu, sırasıyla, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve $\kappa \neq 0$ olmak üzere yüzeyin parametrik ifadesi

$$\vec{r}(s, v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s), \quad \|\vec{q}(s)\| = 1,$$

ile verilsin. Bu takdirde, birim ve sabit bir vektör $\vec{u}$ olmak üzere, yüzeyin $\vec{q}$ anadoğruları $\vec{u}$ vektörüyle sabit açı yapıyorsa, yani,

$$\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0$$

ise, S regle yüzeyine Minkowski 3-uzayında spacelike (timelike) q-slant regle yüzey denir ve $\vec{u}$ vektörü de q-slant regle yüzeyin ekseni olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.2. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı bir q-slant regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde,

(i) S yüzeyi spacelike q-slant regle yüzeyse

$$\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = -\frac{1}{\kappa} \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle$$

(ii) S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike q-slant regle yüzeyse

$$\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = \frac{1}{\kappa} \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle$$

(iii) S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike q-slant regle yüzeyse

$$\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = -\frac{1}{\kappa} \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: S yüzeyi q-slant regle yüzey olduğundan, Tanım 4.1.1'den,

(i) S yüzeyi spacelike q-slant regle yüzeyse

$$\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \text{sabit}$$

olup, bu ifadenin s_1 yay uzunluğu parametresine göre türevinden

$$\langle \vec{q}', \vec{u} \rangle + \langle \vec{q}, \vec{u}' \rangle = 0 \tag{4.1}$$

bulunur. $\vec{u}$ vektörü sabit olduğundan $\vec{u}' = 0$ ve (2.11) ile verilen türev formüllerinden $\vec{q}' = \vec{h}$ olup, (4.1) denklemi

$$\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = 0 \tag{4.2}$$

halini alır. (4.2) eşitliğinin s_1 parametresine göre türevinden

$$\langle \vec{h}', \vec{u} \rangle + \langle \vec{h}, \vec{u}' \rangle = 0 \tag{4.3}$$

elde edilir. $\vec{u}$ vektörü sabit olduğundan $\vec{u}' = 0$ ve (2.11) ile verilen türev formüllerinden $\vec{h}' = \vec{q} + \kappa \vec{a}$ olup, (4.3) denklemi

$$\langle \vec{q} + \kappa \vec{a}, \vec{u} \rangle = 0$$

şekline dönüşür. Bu ifade düzenlenerek istenilen

$$\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = -\frac{1}{\kappa} \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle$$

sonucuna ulaşılır.

(ii) S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike q-slant regle yüzeyse

$$\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \text{sabit}$$

olup, bu ifadenin s_1 yay uzunluğu parametresine göre türevinden

$$\langle \vec{q}', \vec{u} \rangle + \langle \vec{q}, \vec{u}' \rangle = 0 \tag{4.4}$$

bulunur. $\vec{u}$ vektörü sabit olduğundan $\vec{u}' = 0$ ve (2.13) ile verilen türev formüllerinden $\vec{q}' = \vec{h}$ olup, (4.4) denklemi

$$\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = 0 \tag{4.5}$$

halini alır. (4.5) eşitliğinin s_1 parametresine göre türevinden

$$\langle \vec{h}', \vec{u} \rangle + \langle \vec{h}, \vec{u}' \rangle = 0 \tag{4.6}$$

elde edilir. $\vec{u}$ vektörü sabit olduğundan $\vec{u}' = 0$ ve (2.13) ile verilen türev formüllerinden $\vec{h}' = -\vec{q} + \kappa\vec{a}$ olup, (4.6) denklemi

$$\langle -\vec{q} + \kappa\vec{a}, \vec{u} \rangle = 0$$

şekline dönüşür. Bu ifade düzenlenerek istenilen

$$\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = \frac{1}{\kappa} \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle$$

sonucuna ulaşılır.

(iii) S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike q-slant regle yüzeyse

$$\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \text{sabit}$$

olup, bu ifadenin s_1 yay uzunluğu parametresine göre türevinden

$$\langle \vec{q}', \vec{u} \rangle + \langle \vec{q}, \vec{u}' \rangle = 0 \tag{4.7}$$

bulunur. $\vec{u}$ vektörü sabit olduğundan $\vec{u}' = 0$ ve (2.15) ile verilen türev formüllerinden $\vec{q}' = \vec{h}$ olup, (4.7) denklemi

$$\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = 0 \tag{4.8}$$

halini alır. (4.8) eşitliğinin s_1 parametresine göre türevinden

$$\langle \vec{h}', \vec{u} \rangle + \langle \vec{h}, \vec{u}' \rangle = 0 \tag{4.9}$$

elde edilir. $\vec{u}$ vektörü sabit olduğundan $\vec{u}' = 0$ ve (2.15) ile verilen türev formüllerinden $\vec{h}' = \vec{q} + \kappa\vec{a}$ olup, (4.9) denklemi

$$\langle \vec{q} + \kappa\vec{a}, \vec{u} \rangle = 0$$

şekline dönüşür. Bu ifade düzenlenerek istenilen

$$\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = -\frac{1}{\kappa} \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.1.3. S yüzeyi, Minkowski 3-uzayında tanımlı bir q-slant regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, yüzeyin ekseninin denklemi, $\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \lambda$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

(i) S yüzeyi spacelike q-slant regle yüzeyse

$$\vec{u} = \lambda \vec{q} - \frac{\lambda}{\kappa} \vec{a}$$

(ii) S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike q-slant regle yüzeyse

$$\vec{u} = \lambda \vec{q} - \frac{\lambda}{\kappa} \vec{a}$$

(iii) S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike q-slant regle yüzeyse

$$\vec{u} = -\lambda \vec{q} - \frac{\lambda}{\kappa} \vec{a}$$

şeklindedir.

İspat: S yüzeyi q-slant regle yüzey olduğundan (4.2), (4.5) ve (4.8) denklemlerinden $\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = 0$ olup, $\vec{u}$ vektörü $\vec{h}$ vektörüne diktir. Böylece, $\lambda_1 = \lambda_1(s_1), \lambda_2 = \lambda_2(s_1)$ fonksiyonları s_1 parametresinin fonksiyonları olmak üzere,

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{q} + \lambda_2 \vec{a} \tag{4.10}$$

yazılabilir.

(i) S yüzeyi spacelike q-slant regle yüzey olsun. (4.10) denkleminin $\vec{q}$ vektörü ile iç çarpımından

$$\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda$$

ve benzer şekilde (4.10) denkleminin $\vec{a}$ vektörü ile iç çarpımından $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = \lambda_2$ olup, Teorem 4.1.2'den $\lambda_2 = -\frac{\lambda}{\kappa}$ bulunur. Bulunan değerler (4.10) denkleminde yerine yazılırsa istenen sonuca ulaşılır.

(ii) S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike q-slant regle yüzey olsun. (4.10) denkleminin $\vec{q}$ vektörü ile iç çarpımından

$$\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda$$

ve benzer şekilde (4.10) denkleminin $\vec{a}$ vektörü ile iç çarpımından $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = -\lambda_2$ olup, Teorem 4.1.2'den $\lambda_2 = -\dfrac{\lambda}{\kappa}$ bulunur. Bulunan değerler (4.10) denkleminde yerine yazılırsa istenen sonuca ulaşılır.

(iii) S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike q-slant regle yüzey olsun. (4.10) denkleminin $\vec{q}$ vektörü ile iç çarpımından

$$\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = -\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda$$

ve benzer şekilde (4.10) denkleminin $\vec{a}$ vektörü ile iç çarpımından $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = \lambda_2$ olup, Teorem 4.1.2'den $\lambda_2 = -\dfrac{\lambda}{\kappa}$ bulunur. Bulunan değerler (4.10) denkleminde yerine yazılırsa istenen sonuca ulaşılır. ■

Sonuç 4.1.4. S yüzeyi, Minkowski 3-uzayında tanımlı bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\kappa =$ sabit olmasıdır.

İspat:

(i) S yüzeyi spacelike regle yüzey olsun.

S yüzeyinin q-slant regle yüzey olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, Teorem 4.1.3'ten S yüzeyinin ekseni

$$\vec{u} = \lambda\vec{q} - \frac{\lambda}{\kappa}\vec{a}$$

olup, iki tarafın türevini alırsak

$$\begin{aligned} \vec{u}' = \lambda\vec{h} + \frac{\lambda\kappa'}{\kappa^2}\vec{a} - \frac{\lambda}{\kappa}\kappa\vec{h} &\Rightarrow 0 = \frac{\lambda\kappa'}{\kappa^2}\vec{a} \\ &\Rightarrow \kappa' = 0 \\ &\Rightarrow \kappa = \text{sabit} \end{aligned}$$

bulunur.

Tersine, $\kappa =$ sabit olsun. Yüzeyin eksenini

$$\vec{u} = \lambda\vec{q} - \frac{\lambda}{\kappa}\vec{a}$$

şeklinde seçip, iki tarafın türevini alırsak

$$\begin{aligned} \vec{u}' = \lambda\vec{h} - \frac{\lambda}{\kappa}\kappa\vec{h} &\Rightarrow \vec{u}' = 0 \\ &\Rightarrow \vec{u} = \text{sabit} \end{aligned}$$

bulunur. Aynı zamanda, $\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \lambda =$ sabit olup, S yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

(ii) S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike regle yüzey olsun.

S yüzeyinin q-slant regle yüzey olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, Teorem 4.1.3'ten S yüzeyinin ekseni

$$\vec{u} = \lambda \vec{q} - \frac{\lambda}{\kappa} \vec{a}$$

olup, iki tarafın türevini alırsak

$$\begin{aligned} \vec{u}' = \lambda \vec{h} + \frac{\lambda \kappa'}{\kappa^2} \vec{a} - \frac{\lambda}{\kappa} \kappa \vec{h} &\Rightarrow 0 = \frac{\lambda \kappa'}{\kappa^2} \vec{a} \\ &\Rightarrow \kappa' = 0 \\ &\Rightarrow \kappa = \text{sabit} \end{aligned}$$

bulunur.

Tersine, $\kappa =$ sabit olsun. Yüzeyin eksenini

$$\vec{u} = \lambda \vec{q} - \frac{\lambda}{\kappa} \vec{a}$$

şeklinde seçip, iki tarafın türevini alırsak

$$\begin{aligned} \vec{u}' = \lambda \vec{h} - \frac{\lambda}{\kappa} \kappa \vec{h} &\Rightarrow \vec{u}' = 0 \\ &\Rightarrow \vec{u} = \text{sabit} \end{aligned}$$

bulunur. Aynı zamanda, $\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \lambda =$ sabit olup, S yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

(iii) S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike regle yüzey olsun.

S yüzeyinin q-slant regle yüzey olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, Teorem 4.1.3'ten S yüzeyinin ekseni

$$\vec{u} = -\lambda \vec{q} - \frac{\lambda}{\kappa} \vec{a}$$

olup, iki tarafın türevini alırsak

$$\begin{aligned} \vec{u}' = -\lambda \vec{h} + \frac{\lambda \kappa'}{\kappa^2} \vec{a} + \frac{\lambda}{\kappa} \kappa \vec{h} &\Rightarrow 0 = \frac{\lambda \kappa'}{\kappa^2} \vec{a} \\ &\Rightarrow \kappa' = 0 \\ &\Rightarrow \kappa = \text{sabit} \end{aligned}$$

bulunur.

Tersine, $\kappa =$ sabit olsun. Yüzeyin eksenini

$$\vec{u} = -\lambda\vec{q} - \frac{\lambda}{\kappa}\vec{a}$$

şeklinde seçip, iki tarafın türevini alırsak

$$\vec{u}' = -\lambda\vec{h} + \frac{\lambda}{\kappa}\kappa\vec{h} \Rightarrow \vec{u}' = 0$$
$$\Rightarrow \vec{u} = \text{sabit}$$

bulunur. Aynı zamanda, $\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \lambda =$ sabit olup, S yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.1.5. S yüzeyi, Minkowski 3-uzayında tanımlı bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\det(\vec{q}', \vec{q}'', \vec{q}''') = 0$ olmasıdır.

İspat:

(i) S yüzeyi spacelike regle yüzey olsun. Bu takdirde, (2.11) denklemlerinden

$$\vec{q}' = \vec{h}$$
$$\vec{q}'' = \vec{q} + \kappa\vec{a}$$
$$\vec{q}''' = (1 + \kappa^2)\vec{h} + \kappa'\vec{a}$$

olup,

$$\det(\vec{q}', \vec{q}'', \vec{q}''') = -\kappa' \tag{4.11}$$

bulunur. Böylece, S yüzeyi q-slant regle yüzeyse Sonuç 4.1.4'ten $\kappa =$ sabit olup $\kappa' = 0$ olacağından $\det(\vec{q}', \vec{q}'', \vec{q}''') = 0$ elde edilir.

Tersine, $\det(\vec{q}', \vec{q}'', \vec{q}''') = 0$ olsun. Bu takdirde, (4.11) denkleminden $\kappa' = 0$ olup, $\kappa =$ sabit bulunur. Böylece, Sonuç 4.1.4'ten S yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

(ii) S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike regle yüzey olsun. Bu takdirde, (2.13) denklemlerinden

$$\vec{q}' = \vec{h}$$
$$\vec{q}'' = -\vec{q} + \kappa\vec{a}$$
$$\vec{q}''' = (\kappa^2 - 1)\vec{h} + \kappa'\vec{a}$$

olup,

$$\det(\vec{q}', \vec{q}'', \vec{q}''') = \kappa' \tag{4.12}$$

bulunur. Böylece, S yüzeyi q-slant regle yüzeyse Sonuç 4.1.4'ten $\kappa =$ sabit olup $\kappa' = 0$ olacağından $\det(\vec{q}', \vec{q}'', \vec{q}''') = 0$ elde edilir.

Tersine, $\det(\vec{q}', \vec{q}'', \vec{q}''') = 0$ olsun. Bu takdirde, (4.12) denkleminden $\kappa' = 0$ olup, $\kappa =$ sabit bulunur. Böylece, Sonuç 4.1.4'ten S yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

(iii) S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike regle yüzey olsun. Bu takdirde, (2.15) denklemlerinden

$$\vec{q}' = \vec{h}$$
$$\vec{q}'' = \vec{q} + \kappa\vec{a}$$
$$\vec{q}''' = (1 - \kappa^2)\vec{h} + \kappa'\vec{a}$$

olup,

$$\det(\vec{q}', \vec{q}'', \vec{q}''') = -\kappa' \tag{4.13}$$

bulunur. Böylece, S yüzeyi q-slant regle yüzeyse Sonuç 4.1.4'ten $\kappa =$ sabit olup $\kappa' = 0$ olacağından $\det(\vec{q}', \vec{q}'', \vec{q}''') = 0$ elde edilir.

Tersine, $\det(\vec{q}', \vec{q}'', \vec{q}''') = 0$ olsun. Bu takdirde, (4.13) denkleminden $\kappa' = 0$ olup, $\kappa =$ sabit bulunur. Böylece, Sonuç 4.1.4'ten S yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.1.6. S yüzeyi, Minkowski 3-uzayında tanımlı bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\det(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}''') = 0$ olmasıdır.

İspat:

(i) S yüzeyi spacelike regle yüzey olsun. Bu takdirde, (2.11) denklemlerinden

$$\vec{a}' = \kappa\vec{h}$$
$$\vec{a}'' = \kappa\vec{q} + \kappa'\vec{h} + \kappa^2\vec{a}$$
$$\vec{a}''' = 2\kappa'\vec{q} + (\kappa'' + \kappa^3 + \kappa)\vec{h} + 3\kappa\kappa'\vec{a}$$

olup,

$$\det(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}''') = -\kappa^3\kappa' \tag{4.14}$$

bulunur. Böylece, S yüzeyi q-slant regle yüzeyse Sonuç 4.1.4'ten $\kappa =$ sabit olup $\kappa' = 0$ olacağından $\det(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}''') = 0$ elde edilir.

Tersine, $\det(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}''') = 0$ olsun. Bu takdirde, (4.14) denkleminden $\kappa' = 0$ olup, $\kappa =$ sabit bulunur. Böylece, Sonuç 4.1.4'ten S yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

(ii) S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike regle yüzey olsun. Bu takdirde, (2.13) denklemlerinden

$$\vec{a}' = \kappa\vec{h}$$
$$\vec{a}'' = -\kappa\vec{q} + \kappa'\vec{h} + \kappa^2\vec{a}$$
$$\vec{a}''' = -2\kappa'\vec{q} + (\kappa'' + \kappa^3 - \kappa)\vec{h} + 3\kappa\kappa'\vec{a}$$

olup,

$$\det(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}''') = -\kappa^3\kappa' \tag{4.15}$$

bulunur. Böylece, S yüzeyi q-slant regle yüzeyse Sonuç 4.1.4'ten $\kappa =$ sabit olup $\kappa' = 0$ olacağından $\det(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}''') = 0$ elde edilir.

Tersine, $\det(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}''') = 0$ olsun. Bu takdirde, (4.15) denkleminden $\kappa' = 0$ olup, $\kappa =$ sabit bulunur. Böylece, Sonuç 4.1.4'ten S yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

(iii) S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike regle yüzey olsun. Bu takdirde, (2.15) denklemlerinden

$$\vec{a}' = -\kappa\vec{h}$$
$$\vec{a}'' = -\kappa\vec{q} - \kappa'\vec{h} - \kappa^2\vec{a}$$
$$\vec{a}''' = -2\kappa'\vec{q} + (-\kappa'' + \kappa^3 - \kappa)\vec{h} - 3\kappa\kappa'\vec{a}$$

olup,

$$\det(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}''') = \kappa^3\kappa' \tag{4.16}$$

bulunur. Böylece, S yüzeyi q-slant regle yüzeyse Sonuç 4.1.4'ten $\kappa =$ sabit olup $\kappa' = 0$ olacağından $\det(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}''') = 0$ elde edilir.

Tersine, $\det(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}''') = 0$ olsun. Bu takdirde, (4.16) denkleminden $\kappa' = 0$ olup, $\kappa =$ sabit bulunur. Böylece, Sonuç 4.1.4'ten S yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

4.1.2. Spacelike ve Timelike h-slant Regle Yüzeyler

Tanım 4.1.7. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı bir spacelike (timelike) regle yüzey, $\vec{c}(s)$ eğrisi, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s parametresi boğaz çizgisinin yay uzun-

luğu parametresi olsun. S yüzeyinin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu, sırasıyla, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve $\kappa \neq 0$ olmak üzere yüzeyin parametrik ifadesi

$$\vec{r}(s, v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s), \;\; \|\vec{q}(s)\| = 1,$$

ile verilsin. Bu takdirde, birim ve sabit bir vektör $\vec{u}$ olmak üzere, yüzeyin $\vec{h}$ merkez normal vektörü $\vec{u}$ vektörüyle sabit açı yapıyorsa, yani,

$$\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0$$

ise, S regle yüzeyine Minkowski 3-uzayında spacelike (timelike) h-slant regle yüzey denir.

Teorem 4.1.8. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde,

(i) S yüzeyi spacelike regle yüzeyse S yüzeyinin h-slant regle yüzey olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa'}{(\kappa^2 + 1)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0$$

(ii) S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike regle yüzeyse S yüzeyinin h-slant regle yüzey olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\textbf{(a)} \; \frac{\kappa'}{(\kappa^2 - 1)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0, \;\; \kappa < -1 \text{ veya } \kappa > 1$$
$$\textbf{(b)} \; \frac{\kappa'}{(1 - \kappa^2)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0, \;\; -1 < \kappa < 1$$

(iii) S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike regle yüzeyse S yüzeyinin h-slant regle yüzey olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\textbf{(a)} \; \frac{\kappa'}{(\kappa^2 - 1)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0, \;\; \kappa < -1 \text{ veya } \kappa > 1$$
$$\textbf{(b)} \; \frac{\kappa'}{(1 - \kappa^2)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0, \;\; -1 < \kappa < 1$$

olmasıdır.

İspat:

(i) S yüzeyi spacelike regle yüzey olsun. Şimdi, S yüzeyinin h-slant regle yüzey olduğunu kabul edelim. Tanım 4.1.7'den,

$$\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = m = \text{sabit} \neq 0, \;\; m \in \mathbb{R}$$

ve $b_1 = b_1(s_1), b_2 = b_2(s_1)$ olmak üzere

$$\vec{u} = b_1(s_1)\vec{q} + m\vec{h} + b_2(s_1)\vec{a}$$

yazılabilir. Burada $\vec{u}$ sabit vektör olduğundan, $\vec{u}$ vektörünün türevinden

$$(b_1' + m)\vec{q} + (b_1 + b_2\kappa)\vec{h} + (m\kappa + b_2')\vec{a} = 0 \tag{4.17}$$

bulunur. $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ çatısının vektörleri lineer bağımsız olduklarından (4.17) eşitliğinden

$$\begin{cases} b_1' + m = 0 \\ b_1 + b_2\kappa = 0 \\ m\kappa + b_2' = 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

sistemine ulaşılır. Bu sistemin ikinci denkleminden $b_1 = -b_2\kappa$ bulunur. $\vec{u}$ vektörü birim vektör olduğundan, $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \pm 1 &\Rightarrow b_1^2 - m^2 + b_2^2 = \pm 1 \\ &\Rightarrow b_1^2 + b_2^2 = m^2 \pm 1 = \text{sabit} \\ &\Rightarrow b_2^2\kappa^2 + b_2^2 = n^2 = \text{sabit} \\ &\Rightarrow b_2 = \pm \frac{n}{\sqrt{\kappa^2 + 1}} \end{aligned} \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.19) denkleminden bulduğumuz eşitliği (4.18) sisteminin üçüncü denkleminde yerine yazarsak, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$m\kappa \mp \frac{n\kappa\kappa'}{(\kappa^2 + 1)^{3/2}} = 0 \Rightarrow \frac{\kappa'}{(\kappa^2 + 1)^{3/2}} = \pm\frac{m}{n} = p = \text{sabit}$$

sonucuna ulaşılır.

Tersine,

$$\frac{\kappa'}{(\kappa^2 + 1)^{3/2}} = p = \text{sabit} \tag{4.20}$$

ve

$$\vec{u} = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + 1}}\vec{q} + p\vec{h} + \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + 1}}\vec{a} \tag{4.21}$$

olsun. (4.21) eşitliğinin türevi alınır ve (4.20) eşitliği kullanılırsa, $\vec{u}' = 0$ olup, $\vec{u}$ vektörü sabit vektör olarak bulunur. Aynı zamanda $\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = -p = \text{sabit}$ olup, Tanım 4.1.7'den S yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

(ii) (a) $\kappa < -1$ veya $\kappa > 1$ ise;

S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike regle yüzey olsun. Şimdi, S yüzeyinin h-slant regle yüzey olduğunu kabul edelim. Tanım 4.1.7'den,

$$\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = m = \text{sabit} \neq 0, \quad m \in \mathbb{R}$$

ve $b_1 = b_1(s_1), b_2 = b_2(s_1)$ olmak üzere

$$\vec{u} = b_1(s_1)\vec{q} + m\vec{h} + b_2(s_1)\vec{a}$$

yazılabilir. Burada $\vec{u}$ sabit vektör olduğundan, $\vec{u}$ vektörünün türevinden

$$(b_1' - m)\vec{q} + (b_1 + b_2\kappa)\vec{h} + (m\kappa + b_2')\vec{a} = 0 \tag{4.22}$$

bulunur. $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ çatısının vektörleri lineer bağımsız olduklarından (4.22) eşitliğinden

$$\begin{cases} b_1' - m = 0 \\ b_1 + b_2\kappa = 0 \\ m\kappa + b_2' = 0 \end{cases} \tag{4.23}$$

sistemine ulaşılır. Bu sistemin ikinci denkleminden $b_1 = -b_2\kappa$ bulunur. $\vec{u}$ vektörü birim vektör olduğundan, $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \pm 1 &\Rightarrow b_1^2 + m^2 - b_2^2 = \pm 1 \\ &\Rightarrow b_1^2 - b_2^2 = -m^2 \pm 1 = \text{sabit} \\ &\Rightarrow b_2^2\kappa^2 - b_2^2 = n^2 = \text{sabit} \\ &\Rightarrow b_2 = \pm \frac{n}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir. (4.24) denkleminden bulduğumuz eşitliği (4.23) sisteminin üçüncü denkleminde yerine yazarsak, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$m\kappa \mp \frac{n\kappa\kappa'}{(\kappa^2 - 1)^{3/2}} = 0 \Rightarrow \frac{\kappa'}{(\kappa^2 - 1)^{3/2}} = \pm\frac{m}{n} = p = \text{sabit}$$

sonucuna ulaşılır.

Tersine,

$$\frac{\kappa'}{(\kappa^2 - 1)^{3/2}} = p = \text{sabit} \tag{4.25}$$

ve

$$\vec{u} = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 1}}\vec{q} + p\vec{h} + \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - 1}}\vec{a} \tag{4.26}$$

olsun. (4.26) eşitliğinin türevi alınır ve (4.25) eşitliği kullanılırsa, $\vec{u}' = 0$ olup, $\vec{u}$ vektörü sabit vektör olarak bulunur. Aynı zamanda $\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = p =$ sabit olup, Tanım 4.1.7'den S yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

(b) $-1 < \kappa < 1$ ise;

S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike regle yüzey olmak üzere, S yüzeyinin h-slant regle yüzey olduğunu kabul edelim. Tanım 4.1.7'den,

$$\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = m = \text{sabit} \neq 0, \;\; m \in \mathbb{R}$$

ve $b_1 = b_1(s_1), b_2 = b_2(s_1)$ olmak üzere

$$\vec{u} = b_1(s_1)\vec{q} + m\vec{h} + b_2(s_1)\vec{a}$$

yazılabilir. Burada $\vec{u}$ sabit vektör olduğundan, $\vec{u}$ vektörünün türevinden

$$(b_1' - m)\vec{q} + (b_1 + b_2\kappa)\vec{h} + (m\kappa + b_2')\vec{a} = 0 \tag{4.27}$$

bulunur. $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ çatısının vektörleri lineer bağımsız olduklarından (4.27) eşitliğinden

$$\begin{cases} b_1' - m = 0 \\ b_1 + b_2\kappa = 0 \\ m\kappa + b_2' = 0 \end{cases} \tag{4.28}$$

sistemine ulaşılır. Bu sistemin ikinci denkleminden $b_1 = -b_2\kappa$ bulunur. $\vec{u}$ vektörü birim vektör olduğundan, $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \pm 1 &\Rightarrow b_1^2 + m^2 - b_2^2 = \pm 1 \\ &\Rightarrow b_1^2 - b_2^2 = -m^2 \pm 1 = \text{sabit} \\ &\Rightarrow b_2^2 - b_2^2\kappa^2 = n^2 = \text{sabit} \\ &\Rightarrow b_2 = \pm \frac{n}{\sqrt{1-\kappa^2}} \end{aligned} \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.29) denkleminden bulduğumuz eşitliği (4.28) sisteminin üçüncü denkleminde yerine yazarsak, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$m\kappa \pm \frac{n\kappa\kappa'}{(1-\kappa^2)^{3/2}} = 0 \Rightarrow \frac{\kappa'}{(1-\kappa^2)^{3/2}} = \mp\frac{m}{n} = p = \text{sabit}$$

sonucuna ulaşılır.

Tersine,

$$\frac{\kappa'}{(1-\kappa^2)^{3/2}} = p = \text{sabit} \tag{4.30}$$

ve

$$\vec{u} = \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}\vec{q} + p\vec{h} - \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}}\vec{a} \tag{4.31}$$

olsun. (4.31) eşitliğinin türevi alınır ve (4.30) eşitliği kullanılırsa, $\vec{u}' = 0$ olup, $\vec{u}$ vektörü sabit vektör olarak bulunur. Aynı zamanda $\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = p =$ sabit olup, Tanım 4.1.7'den S

yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

(iii) (a) $\kappa < -1$ veya $\kappa > 1$ ise;

S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike regle yüzey olsun. Şimdi, S yüzeyinin h-slant regle yüzey olduğunu kabul edelim. Tanım 4.1.7'den,

$$\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = m = \text{sabit} \neq 0, \;\; m \in \mathbb{R}$$

ve $b_1 = b_1(s_1), b_2 = b_2(s_1)$ olmak üzere

$$\vec{u} = b_1(s_1)\vec{q} + m\vec{h} + b_2(s_1)\vec{a}$$

yazılabilir. Burada $\vec{u}$ sabit vektör olduğundan, $\vec{u}$ vektörünün türevinden

$$(b_1' + m)\vec{q} + (b_1 - b_2\kappa)\vec{h} + (m\kappa + b_2')\vec{a} = 0 \tag{4.32}$$

bulunur. $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ çatısının vektörleri lineer bağımsız olduklarından (4.32) eşitliğinden

$$\begin{cases} b_1' + m = 0 \\ b_1 - b_2\kappa = 0 \\ m\kappa + b_2' = 0 \end{cases} \tag{4.33}$$

sistemine ulaşılır. Bu sistemin ikinci denkleminden $b_1 = b_2\kappa$ bulunur. $\vec{u}$ vektörü birim vektör olduğundan, $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \pm 1 &\Rightarrow -b_1^2 + m^2 + b_2^2 = \pm 1 \\ &\Rightarrow -b_1^2 + b_2^2 = -m^2 \pm 1 = \text{sabit} \\ &\Rightarrow b_2^2\kappa^2 - b_2^2 = n^2 = \text{sabit} \\ &\Rightarrow b_2 = \pm\frac{n}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \end{aligned} \tag{4.34}$$

elde edilir. (4.34) denkleminden bulduğumuz eşitliği (4.33) sisteminin üçüncü denkleminde yerine yazarsak, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$m\kappa \mp \frac{n\kappa\kappa'}{(\kappa^2 - 1)^{3/2}} = 0 \Rightarrow \frac{\kappa'}{(\kappa^2 - 1)^{3/2}} = \pm\frac{m}{n} = p = \text{sabit}$$

sonucuna ulaşılır.

Tersine,

$$\frac{\kappa'}{(\kappa^2 - 1)^{3/2}} = p = \text{sabit} \tag{4.35}$$

ve

$$\vec{u} = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 1}}\vec{q} + p\vec{h} + \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - 1}}\vec{a} \tag{4.36}$$

olsun. (4.36) eşitliğinin türevi alınır ve (4.35) eşitliği kullanılırsa, $\vec{u}' = 0$ olup, $\vec{u}$ vektörü sabit vektör olarak bulunur. Aynı zamanda $\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = p =$ sabit olup, Tanım 4.1.7'den S yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

(b) $-1 < \kappa < 1$ ise;

S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike regle yüzey olmak üzere, S yüzeyinin h-slant regle yüzey olduğunu kabul edelim. Tanım 4.1.7'den,

$$\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = m = \text{sabit} \neq 0, \quad m \in \mathbb{R}$$

ve $b_1 = b_1(s_1), b_2 = b_2(s_1)$ olmak üzere

$$\vec{u} = b_1(s_1)\vec{q} + m\vec{h} + b_2(s_1)\vec{a}$$

yazılabilir. Burada $\vec{u}$ sabit vektör olduğundan, $\vec{u}$ vektörünün türevinden

$$(b_1' + m)\vec{q} + (b_1 - b_2\kappa)\vec{h} + (m\kappa + b_2')\vec{a} = 0 \tag{4.37}$$

bulunur. $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ çatısının vektörleri lineer bağımsız olduklarından (4.37) eşitliğinden

$$\begin{cases} b_1' + m = 0 \\ b_1 - b_2\kappa = 0 \\ m\kappa + b_2' = 0 \end{cases} \tag{4.38}$$

sistemine ulaşılır. Bu sistemin ikinci denkleminden $b_1 = b_2\kappa$ bulunur. $\vec{u}$ vektörü birim vektör olduğundan, $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \pm 1 &\Rightarrow -b_1^2 + m^2 + b_2^2 = \pm 1 \\ &\Rightarrow -b_1^2 + b_2^2 = -m^2 \pm 1 = \text{sabit} \\ &\Rightarrow b_2^2 - b_2^2\kappa^2 = n^2 = \text{sabit} \\ &\Rightarrow b_2 = \pm \frac{n}{\sqrt{1-\kappa^2}} \end{aligned} \tag{4.39}$$

elde edilir. (4.39) denkleminden bulduğumuz eşitliği (4.38) sisteminin üçüncü denkleminde yerine yazarsak, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$m\kappa \pm \frac{n\kappa\kappa'}{(1-\kappa^2)^{3/2}} = 0 \Rightarrow \frac{\kappa'}{(1-\kappa^2)^{3/2}} = \mp\frac{m}{n} = p = \text{sabit}$$

sonucuna ulaşılır.

Tersine,

$$\frac{\kappa'}{(1-\kappa^2)^{3/2}} = p = \text{sabit} \tag{4.40}$$

ve

$$\vec{u} = -\frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}\vec{q} + p\vec{h} - \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}}\vec{a} \tag{4.41}$$

olsun. (4.41) eşitliğinin türevi alınır ve (4.40) eşitliği kullanılırsa, $\vec{u}' = 0$ olup, $\vec{u}$ vektörü sabit vektör olarak bulunur. Aynı zamanda $\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = p =$ sabit olup, Tanım 4.1.7'den S yüzeyi h-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.1.9. S yüzeyi, Minkowski 3-uzayında tanımlı bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, θ açısı $\vec{h}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki sabit açı olmak üzere

(i) S yüzeyi spacelike regle yüzey ve $\vec{u}$ spacelike vektör ise S yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa = \mp \frac{s_1}{\sqrt{\coth^2\theta - s_1^2}},$$

(ii) S yüzeyi spacelike regle yüzey ve $\vec{u}$ timelike vektör ise S yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa = \mp \frac{s_1}{\sqrt{\tanh^2\theta - s_1^2}},$$

(iii) S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike yüzey, $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike ise S yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa = \mp \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 - \tan^2\theta}},$$

(iv) S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike yüzey, $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike ise S yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa = \mp \frac{s_1}{\sqrt{\tanh^2\theta + s_1^2}},$$

(v) S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike yüzey ve $\vec{u}$ timelike vektör ise S yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa = \mp \frac{s_1}{\sqrt{\coth^2\theta + s_1^2}},$$

(vi) S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike yüzey, $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike ise S yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa = \mp \frac{s_1}{\sqrt{\tan^2\theta + s_1^2}},$$

(vii) S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike yüzey, $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike ise S yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa = \mp \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 - \tanh^2\theta}},$$

(viii) S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike yüzey ve $\vec{u}$ timelike vektör ise S yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa = \mp \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 - \coth^2\theta}},$$

olmasıdır.

İspat: **(i)** S yüzeyi spacelike h-slant regle yüzey ve $\vec{u}$ spacelike vektör olsun. Tanım 2.1.8'den, θ açısı $\vec{h}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki Lorentziyen açı olmak üzere

$$|\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle| = \sinh\theta \Rightarrow \langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = \mp \sinh\theta$$

elde edilir. Bu ifadenin türevinden

$$\langle \vec{q} + \kappa\vec{a}, \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = -\kappa \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle \tag{4.42}$$

olup, burada $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = x$ alınırsa, $\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = -\kappa x$ bulunur. Böylece, $\vec{u}$ vektörü

$$\vec{u} = -\kappa x \vec{q} \mp \sinh\theta \vec{h} + x\vec{a}$$

şeklinde yazılabilir. $\vec{u}$ birim olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1 &\Rightarrow \kappa^2 x^2 - \sinh^2\theta + x^2 = 1 \\ &\Rightarrow x^2(\kappa^2 + 1) = 1 + \sinh^2\theta \\ &\Rightarrow x^2 = \frac{\cosh^2\theta}{\kappa^2 + 1} \\ &\Rightarrow x = \mp \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\kappa^2 + 1}} \end{aligned} \tag{4.43}$$

olur. Bununla birlikte, (4.42) denkleminin ikinci türevinden

$$\begin{aligned}\langle \vec{h} + \kappa' \vec{a} + \kappa^2 \vec{h}, \vec{u} \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \vec{h}, \vec{u} \rangle + \kappa' \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle + \kappa^2 \langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \mp \sinh\theta + \kappa' x \mp \kappa^2 \sinh\theta = 0 \\ &\Rightarrow x = \pm \frac{(\kappa^2+1)\sinh\theta}{\kappa'}\end{aligned} \tag{4.44}$$

elde edilir. (4.43) ve (4.44) eşitliklerinden

$$\mp \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\kappa^2+1}} = \pm \frac{(\kappa^2+1)\sinh\theta}{\kappa'} \Rightarrow \mp \frac{\kappa'}{(\kappa^2+1)^{3/2}} = \pm \tanh\theta$$

olup, son eşitliğin integralinden

$$\mp \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+1}} = \pm \tanh\theta(s_1 + c), c \in \mathbb{R}$$

bulunur. Burada, $s_1 \to s_1 - c$ parametre değişimi yaparak c sabitini kolayca eleyebiliriz. Böylece, son eşitlikten

$$\mp \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+1}} = \pm \tanh\theta s_1 \Rightarrow \kappa = \mp \frac{s_1}{\sqrt{\coth^2\theta - s_1^2}}$$

sonucuna ulaşılır.

Tersine,

$$\kappa = \mp \frac{s_1}{\sqrt{\coth^2\theta - s_1^2}}$$

olsun. x değerini ise

$$x = \pm \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\kappa^2+1}} = \pm \sinh\theta \sqrt{\coth^2\theta - s_1^2} \tag{4.45}$$

olarak alalım. Böylece

$$\kappa x = -\sinh\theta s_1 \tag{4.46}$$

olur. $\vec{u}$ vektörünü

$$\vec{u} = -\kappa x \vec{q} - \sinh\theta \vec{h} + x\vec{a} \tag{4.47}$$

şeklinde yazalım. $\vec{u}$ vektörünün $\vec{h}$ vektörü ile sabit açı yaptığı açıktır, yani $\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = -\sinh\theta =$ sabit olur. Son olarak, (4.45) ve (4.46) eşitliklerini (4.47) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\vec{u} = \sinh\theta \left(s_1 \vec{q} - \vec{h} \pm \sqrt{\coth^2\theta - s_1^2}\vec{a} \right)$$

olup, bu ifadenin türevinden $\vec{u}' = 0$ elde edilir. Böylece, $\vec{u}$ sabit vektör olup, S yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

(ii) S yüzeyi spacelike h-slant regle yüzey ve $\vec{u}$ timelike vektör olsun. Tanım

2.1.8'den, θ açısı $\vec{h}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açı olmak üzere

$$\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = -\cosh\theta$$

elde edilir. Bu ifadenin türevinden

$$\langle \vec{q} + \kappa\vec{a}, \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = -\kappa \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle \tag{4.48}$$

olup, burada $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = x$ alınırsa, $\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = -\kappa x$ bulunur. Böylece, $\vec{u}$ vektörü

$$\vec{u} = -\kappa x\vec{q} + \cosh\theta\vec{h} + x\vec{a}$$

şeklinde yazılabilir. $\vec{u}$ birim olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = -1 &\Rightarrow \kappa^2 x^2 - \cosh^2\theta + x^2 = 1 \\ &\Rightarrow x^2(\kappa^2 + 1) = \cosh^2\theta - 1 \\ &\Rightarrow x^2 = \frac{\sinh^2\theta}{\kappa^2 + 1} \\ &\Rightarrow x = \mp\frac{\sinh\theta}{\sqrt{\kappa^2 + 1}} \end{aligned} \tag{4.49}$$

olur. Bununla birlikte, (4.48) denkleminin ikinci türevinden

$$\begin{aligned} \langle \vec{h} + \kappa'\vec{a} + \kappa^2\vec{h}, \vec{u} \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \vec{h}, \vec{u} \rangle + \kappa' \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle + \kappa^2 \langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow -\cosh\theta + \kappa' x - \kappa^2 \cosh\theta = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{(\kappa^2 + 1)\cosh\theta}{\kappa'} \end{aligned} \tag{4.50}$$

elde edilir. (4.49) ve (4.50) eşitliklerinden

$$\mp\frac{\sinh\theta}{\sqrt{\kappa^2 + 1}} = \frac{(\kappa^2 + 1)\cosh\theta}{\kappa'} \Rightarrow \frac{\kappa'}{(\kappa^2 + 1)^{3/2}} = \mp\coth\theta$$

olup, son eşitliğin integralinden

$$\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + 1}} = \mp\coth\theta(s_1 + c), c \in \mathbb{R}$$

bulunur. Burada, $s_1 \to s_1 - c$ parametre değişimi yaparak c sabitini kolayca eleyebiliriz. Böylece, son eşitlikten

$$\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + 1}} = \mp\coth\theta s_1 \Rightarrow \kappa = \mp\frac{s_1}{\sqrt{\tanh^2\theta - s_1^2}}$$

sonucuna ulaşılır.

Tersine,

$$\kappa = \mp\frac{s_1}{\sqrt{\tanh^2\theta - s_1^2}}$$

olsun. x değerini ise

$$x = \pm\frac{\sinh\theta}{\sqrt{\kappa^2+1}} = \pm\cosh\theta\sqrt{\tanh^2\theta - s_1^2} \tag{4.51}$$

olarak alalım. Böylece

$$\kappa x = -\cosh\theta s_1 \tag{4.52}$$

olur. $\vec{u}$ vektörünü

$$\vec{u} = -\kappa x\vec{q} - \cosh\theta\vec{h} + x\vec{a} \tag{4.53}$$

şeklinde yazalım. $\vec{u}$ vektörünün $\vec{h}$ vektörü ile sabit açı yaptığı açıktır, yani $\langle\vec{h},\vec{u}\rangle = -\cosh\theta =$ sabit olur. Son olarak, (4.51) ve (4.52) eşitliklerini (4.53) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\vec{u} = \cosh\theta\left(s_1\vec{q} - \vec{h} \pm \sqrt{\tanh^2\theta - s_1^2}\vec{a}\right)$$

olup, bu ifadenin türevinden $\vec{u}' = 0$ elde edilir. Böylece, $\vec{u}$ sabit vektör olup, S yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

(iii) S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike h-slant regle yüzey, $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h},\vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike olsun. Tanım 2.1.8'den, θ açısı $\vec{h}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki spacelike açı olmak üzere

$$\langle\vec{h},\vec{u}\rangle = \cos\theta$$

elde edilir. Bu ifadenin türevinden

$$\langle -\vec{q} + \kappa\vec{a},\vec{u}\rangle = 0 \Rightarrow \langle\vec{q},\vec{u}\rangle = \kappa\langle\vec{a},\vec{u}\rangle \tag{4.54}$$

olup, burada $\langle\vec{a},\vec{u}\rangle = x$ alınırsa, $\langle\vec{q},\vec{u}\rangle = \kappa x$ bulunur. Böylece, $\vec{u}$ vektörü

$$\vec{u} = \kappa x\vec{q} + \cos\theta\vec{h} - x\vec{a}$$

şeklinde yazılabilir. $\vec{u}$ birim olduğundan

$$\begin{aligned}\langle\vec{u},\vec{u}\rangle = 1 &\Rightarrow \kappa^2x^2 + \cos^2\theta - x^2 = 1\\ &\Rightarrow x^2(\kappa^2-1) = 1-\cos^2\theta\\ &\Rightarrow x^2 = \frac{\sin^2\theta}{\kappa^2-1}\\ &\Rightarrow x = \mp\frac{\sin\theta}{\sqrt{\kappa^2-1}}\end{aligned} \tag{4.55}$$

olur. Bununla birlikte, (4.54) denkleminin ikinci türevinden

$$\begin{aligned}\langle -\vec{h} + \kappa'\vec{a} + \kappa^2\vec{h}, \vec{u}\rangle = 0 \Rightarrow \langle -\vec{h}, \vec{u}\rangle + \kappa'\langle \vec{a}, \vec{u}\rangle + \kappa^2\langle \vec{h}, \vec{u}\rangle = 0 \\ \Rightarrow -\cos\theta + \kappa' x + \kappa^2\cos\theta = 0 \\ \Rightarrow x = \frac{(1-\kappa^2)\cos\theta}{\kappa'}\end{aligned} \tag{4.56}$$

elde edilir. (4.55) ve (4.56) eşitliklerinden

$$\mp\frac{\sin\theta}{\sqrt{\kappa^2-1}} = \frac{(1-\kappa^2)\cos\theta}{\kappa'} \Rightarrow \mp\frac{\kappa'}{(\kappa^2-1)^{3/2}} = -\cot\theta$$

olup, son eşitliğin integralinden

$$\pm\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2-1}} = -\cot\theta(s_1 + c), c \in \mathbb{R}$$

bulunur. Burada, $s_1 \to s_1 - c$ parametre değişimi yaparak c sabitini kolayca eleyebiliriz. Böylece, son eşitlikten

$$\pm\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2-1}} = -\cot\theta s_1 \Rightarrow \kappa = \mp\frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 - \tan^2\theta}}$$

sonucuna ulaşılır.

Tersine,

$$\kappa = \mp\frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 - \tan^2\theta}}$$

olsun. x değerini ise

$$x = \pm\frac{\sin\theta}{\sqrt{\kappa^2-1}} = \pm\cos\theta\sqrt{s_1^2 - \tan^2\theta} \tag{4.57}$$

olarak alalım. Böylece

$$\kappa x = -\cos\theta s_1 \tag{4.58}$$

olur. $\vec{u}$ vektörünü

$$\vec{u} = \kappa x\vec{q} - \cos\theta\vec{h} - x\vec{a} \tag{4.59}$$

şeklinde yazalım. $\vec{u}$ vektörünün $\vec{h}$ vektörü ile sabit açı yaptığı açıktır, yani $\langle \vec{h}, \vec{u}\rangle = -\cos\theta =$ sabit olur. Son olarak, (4.57) ve (4.58) eşitliklerini (4.59) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\vec{u} = \cos\theta\left(-s_1\vec{q} - \vec{h} \mp \sqrt{s_1^2 - \tan^2\theta}\vec{a}\right)$$

olup, bu ifadenin türevinden $\vec{u}' = 0$ elde edilir. Böylece, $\vec{u}$ sabit vektör olup, S yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

(iv) S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike h-slant regle yüzey, $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike olsun. Tanım 2.1.8'den, θ açısı $\vec{h}$

ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki merkez açı olmak üzere

$$|\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle| = \cosh\theta \Rightarrow \langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = \mp \cosh\theta$$

elde edilir. Bu ifadenin türevinden

$$\langle -\vec{q} + \kappa\vec{a}, \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \kappa \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle \tag{4.60}$$

olup, burada $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = x$ alınırsa, $\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \kappa x$ bulunur. Böylece, $\vec{u}$ vektörü

$$\vec{u} = \kappa x \vec{q} \mp \cosh\theta \vec{h} - x\vec{a}$$

şeklinde yazılabilir. $\vec{u}$ birim olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1 &\Rightarrow \kappa^2 x^2 + \cosh^2\theta - x^2 = 1 \\ &\Rightarrow x^2(\kappa^2 - 1) = 1 - \cosh^2\theta \\ &\Rightarrow x^2 = \frac{\sinh^2\theta}{1-\kappa^2} \\ &\Rightarrow x = \mp \frac{\sinh\theta}{\sqrt{1-\kappa^2}} \end{aligned} \tag{4.61}$$

olur. Bununla birlikte, (4.60) denkleminin ikinci türevinden

$$\begin{aligned} \langle -\vec{h} + \kappa'\vec{a} + \kappa^2\vec{h}, \vec{u} \rangle = 0 &\Rightarrow \langle -\vec{h}, \vec{u} \rangle + \kappa' \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle + \kappa^2 \langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \pm\cosh\theta + \kappa' x \mp \kappa^2 \cosh\theta = 0 \\ &\Rightarrow x = \mp \frac{(1-\kappa^2)\cosh\theta}{\kappa'} \end{aligned} \tag{4.62}$$

elde edilir. (4.61) ve (4.62) eşitliklerinden

$$\mp \frac{\sinh\theta}{\sqrt{1-\kappa^2}} = \mp \frac{(1-\kappa^2)\cosh\theta}{\kappa'} \Rightarrow \mp \frac{\kappa'}{(1-\kappa^2)^{3/2}} = \mp \coth\theta$$

olup, son eşitliğin integralinden

$$\mp \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} = \mp \coth\theta(s_1 + c), c \in \mathbb{R}$$

bulunur. Burada, $s_1 \to s_1 - c$ parametre değişimi yaparak c sabitini kolayca eleyebiliriz. Böylece, son eşitlikten

$$\mp \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} = \mp \coth\theta s_1 \Rightarrow \kappa = \mp \frac{s_1}{\sqrt{\tanh^2\theta + s_1^2}}$$

sonucuna ulaşılır.

Tersine,

$$\kappa = \mp \frac{s_1}{\sqrt{\tanh^2\theta + s_1^2}}$$

olsun. x değerini ise

$$x = \pm\frac{\sinh\theta}{\sqrt{1-\kappa^2}} = \pm\cosh\theta\sqrt{\tanh^2\theta + s_1^2} \tag{4.63}$$

olarak alalım. Böylece

$$\kappa x = -\cosh\theta s_1 \tag{4.64}$$

olur. $\vec{u}$ vektörünü

$$\vec{u} = \kappa x\vec{q} - \cosh\theta\vec{h} - x\vec{a} \tag{4.65}$$

şeklinde yazalım. $\vec{u}$ vektörünün $\vec{h}$ vektörü ile sabit açı yaptığı açıktır, yani $\langle\vec{h},\vec{u}\rangle = -\cosh\theta =$ sabit olur. Son olarak, (4.63) ve (4.64) eşitliklerini (4.65) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\vec{u} = \cosh\theta\left(-s_1\vec{q} - \vec{h} \mp \sqrt{\tanh^2\theta + s_1^2}\vec{a}\right)$$

olup, bu ifadenin türevinden $\vec{u}' = 0$ elde edilir. Böylece, $\vec{u}$ sabit vektör olup, S yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

(v) S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike h-slant regle yüzey ve $\vec{u}$ timelike vektör olsun. Tanım 2.1.8'den, θ açısı $\vec{h}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki Lorentziyen açı olmak üzere

$$|\langle\vec{h},\vec{u}\rangle| = \sinh\theta \Rightarrow \langle\vec{h},\vec{u}\rangle = \mp\sinh\theta$$

elde edilir. Bu ifadenin türevinden

$$\langle -\vec{q} + \kappa\vec{a},\vec{u}\rangle = 0 \Rightarrow \langle\vec{q},\vec{u}\rangle = \kappa\langle\vec{a},\vec{u}\rangle \tag{4.66}$$

olup, burada $\langle\vec{a},\vec{u}\rangle = x$ alınırsa, $\langle\vec{q},\vec{u}\rangle = \kappa x$ bulunur. Böylece, $\vec{u}$ vektörü

$$\vec{u} = \kappa x\vec{q} \mp \sinh\theta\vec{h} - x\vec{a}$$

şeklinde yazılabilir. $\vec{u}$ birim olduğundan

$$\begin{aligned}\langle\vec{u},\vec{u}\rangle = -1 &\Rightarrow \kappa^2x^2 + \sinh^2\theta - x^2 = -1\\ &\Rightarrow x^2(1-\kappa^2) = 1 + \sinh^2\theta\\ &\Rightarrow x^2 = \frac{\cosh^2\theta}{1-\kappa^2}\\ &\Rightarrow x = \mp\frac{\cosh\theta}{\sqrt{1-\kappa^2}}\end{aligned} \tag{4.67}$$

olur. Bununla birlikte, (4.66) denkleminin ikinci türevinden

$$\begin{aligned}\langle -\vec{h} + \kappa'\vec{a} + \kappa^2\vec{h}, \vec{u}\rangle = 0 \Rightarrow \langle -\vec{h}, \vec{u}\rangle + \kappa'\langle \vec{a}, \vec{u}\rangle + \kappa^2\langle \vec{h}, \vec{u}\rangle = 0 \\ \Rightarrow \pm\sinh\theta + \kappa' x \mp \kappa^2 \sinh\theta = 0 \\ \Rightarrow x = \mp\frac{(1-\kappa^2)\sinh\theta}{\kappa'}\end{aligned} \tag{4.68}$$

elde edilir. (4.67) ve (4.68) eşitliklerinden

$$\mp\frac{\cosh\theta}{\sqrt{1-\kappa^2}} = \mp\frac{(1-\kappa^2)\sinh\theta}{\kappa'} \Rightarrow \mp\frac{\kappa'}{(1-\kappa^2)^{3/2}} = \mp\tanh\theta$$

olup, son eşitliğin integralinden

$$\mp\frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} = \mp\tanh\theta(s_1 + c), c \in \mathbb{R}$$

bulunur. Burada, $s_1 \to s_1 - c$ parametre değişimi yaparak c sabitini kolayca eleyebiliriz. Böylece, son eşitlikten

$$\mp\frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} = \mp\tanh\theta s_1 \Rightarrow \kappa = \mp\frac{s_1}{\sqrt{\coth^2\theta + s_1^2}}$$

sonucuna ulaşılır.

Tersine,

$$\kappa = \mp\frac{s_1}{\sqrt{\coth^2\theta + s_1^2}}$$

olsun. x değerini ise

$$x = \pm\frac{\cosh\theta}{\sqrt{1-\kappa^2}} = \pm\sinh\theta\sqrt{\coth^2\theta + s_1^2} \tag{4.69}$$

olarak alalım. Böylece

$$\kappa x = -\sinh\theta s_1 \tag{4.70}$$

olur. $\vec{u}$ vektörünü

$$\vec{u} = \kappa x\vec{q} - \sinh\theta\vec{h} - x\vec{a} \tag{4.71}$$

şeklinde yazalım. $\vec{u}$ vektörünün $\vec{h}$ vektörü ile sabit açı yaptığı açıktır, yani $\langle \vec{h}, \vec{u}\rangle = -\sinh\theta =$ sabit olur. Son olarak, (4.69) ve (4.70) eşitliklerini (4.71) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\vec{u} = \sinh\theta\left(-s_1\vec{q} - \vec{h} \mp \sqrt{\coth^2\theta + s_1^2}\vec{a}\right)$$

olup, bu ifadenin türevinden $\vec{u}' = 0$ elde edilir. Böylece, $\vec{u}$ sabit vektör olup, S yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

(vi) S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike h-slant regle yüzey, $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike olsun. Tanım 2.1.8'den, θ açısı $\vec{h}$

ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki spacelike açı olmak üzere

$$\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = \cos\theta$$

elde edilir. Bu ifadenin türevinden

$$\langle \vec{q} + \kappa\vec{a}, \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = -\kappa \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle \tag{4.72}$$

olup, burada $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = x$ alınırsa, $\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = -\kappa x$ bulunur. Böylece, $\vec{u}$ vektörü

$$\vec{u} = \kappa x\vec{q} + \cos\theta\vec{h} + x\vec{a}$$

şeklinde yazılabilir. $\vec{u}$ birim olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1 &\Rightarrow -\kappa^2 x^2 + \cos^2\theta + x^2 = 1 \\ &\Rightarrow x^2(1-\kappa^2) = 1 - \cos^2\theta \\ &\Rightarrow x^2 = \frac{\sin^2\theta}{1-\kappa^2} \\ &\Rightarrow x = \mp\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\kappa^2}} \end{aligned} \tag{4.73}$$

olur. Bununla birlikte, (4.72) denkleminin ikinci türevinden

$$\begin{aligned} \langle \vec{h} + \kappa'\vec{a} - \kappa^2\vec{h}, \vec{u} \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \vec{h}, \vec{u} \rangle + \kappa' \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle - \kappa^2 \langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \cos\theta + \kappa' x - \kappa^2 \cos\theta = 0 \\ &\Rightarrow x = -\frac{(1-\kappa^2)\cos\theta}{\kappa'} \end{aligned} \tag{4.74}$$

elde edilir. (4.73) ve (4.74) eşitliklerinden

$$\mp\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\kappa^2}} = -\frac{(1-\kappa^2)\cos\theta}{\kappa'} \Rightarrow \mp\frac{\kappa'}{(1-\kappa^2)^{3/2}} = -\cot\theta$$

olup, son eşitliğin integralinden

$$\mp\frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} = -\cot\theta(s_1 + c), c \in \mathbb{R}$$

bulunur. Burada, $s_1 \to s_1 - c$ parametre değişimi yaparak c sabitini kolayca eleyebiliriz. Böylece, son eşitlikten

$$\mp\frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}} = -\cot\theta s_1 \Rightarrow \kappa = \mp\frac{s_1}{\sqrt{\tan^2\theta + s_1^2}}$$

sonucuna ulaşılır.

Tersine,

$$\kappa = \mp\frac{s_1}{\sqrt{\tan^2\theta + s_1^2}}$$

olsun. x değerini ise

$$x = \pm\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\kappa^2}} = \pm\cos\theta\sqrt{\tan^2\theta + s_1^2} \tag{4.75}$$

olarak alalım. Böylece

$$\kappa x = -\cos\theta s_1 \tag{4.76}$$

olur. $\vec{u}$ vektörünü

$$\vec{u} = \kappa x\vec{q} + \cos\theta\vec{h} + x\vec{a} \tag{4.77}$$

şeklinde yazalım. $\vec{u}$ vektörünün $\vec{h}$ vektörü ile sabit açı yaptığı açıktır, yani $\langle\vec{h},\vec{u}\rangle = \cos\theta =$ sabit olur. Son olarak, (4.75) ve (4.76) eşitliklerini (4.77) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\vec{u} = \cos\theta\left(-s_1\vec{q} + \vec{h} \pm \sqrt{\tan^2\theta + s_1^2}\vec{a}\right)$$

olup, bu ifadenin türevinden $\vec{u}' = 0$ elde edilir. Böylece, $\vec{u}$ sabit vektör olup, S yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

(vii) S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike h-slant regle yüzey, $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h},\vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike olsun. Tanım 2.1.8'den, θ açısı $\vec{h}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki merkez açı olmak üzere

$$|\langle\vec{h},\vec{u}\rangle| = \cosh\theta \Rightarrow \langle\vec{h},\vec{u}\rangle = \mp\cosh\theta$$

elde edilir. Bu ifadenin türevinden

$$\langle\vec{q} + \kappa\vec{a},\vec{u}\rangle = 0 \Rightarrow \langle\vec{q},\vec{u}\rangle = -\kappa\langle\vec{a},\vec{u}\rangle \tag{4.78}$$

olup, burada $\langle\vec{a},\vec{u}\rangle = x$ alınırsa, $\langle\vec{q},\vec{u}\rangle = -\kappa x$ bulunur. Böylece, $\vec{u}$ vektörü

$$\vec{u} = \kappa x\vec{q} \mp \cosh\theta\vec{h} + x\vec{a}$$

şeklinde yazılabilir. $\vec{u}$ birim olduğundan

$$\begin{aligned}\langle\vec{u},\vec{u}\rangle = 1 &\Rightarrow -\kappa^2x^2 + \cosh^2\theta + x^2 = 1\\ &\Rightarrow x^2(\kappa^2-1) = \cosh^2\theta - 1\\ &\Rightarrow x^2 = \frac{\sinh^2\theta}{\kappa^2-1}\\ &\Rightarrow x = \mp\frac{\sinh\theta}{\sqrt{\kappa^2-1}}\end{aligned} \tag{4.79}$$

olur. Bununla birlikte, (4.78) denkleminin ikinci türevinden

$$\begin{aligned}\langle \vec{h} + \kappa' \vec{a} - \kappa^2 \vec{h}, \vec{u} \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \vec{h}, \vec{u} \rangle + \kappa' \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle - \kappa^2 \langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \mp \cosh\theta + \kappa' x \pm \kappa^2 \cosh\theta = 0 \\ &\Rightarrow x = \mp \frac{(\kappa^2 - 1)\cosh\theta}{\kappa'}\end{aligned} \tag{4.80}$$

elde edilir. (4.79) ve (4.80) eşitliklerinden

$$\mp \frac{\sinh\theta}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} = \mp \frac{(\kappa^2 - 1)\cosh\theta}{\kappa'} \Rightarrow \mp \frac{\kappa'}{(\kappa^2 - 1)^{3/2}} = \mp \coth\theta$$

olup, son eşitliğin integralinden

$$\pm \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} = \mp \coth\theta (s_1 + c), c \in \mathbb{R}$$

bulunur. Burada, $s_1 \to s_1 - c$ parametre değişimi yaparak c sabitini kolayca eleyebiliriz. Böylece, son eşitlikten

$$\mp \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} = \mp \coth\theta s_1 \Rightarrow \kappa = \mp \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 - \tanh^2\theta}}$$

sonucuna ulaşılır.

Tersine,

$$\kappa = \mp \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 - \tanh^2\theta}}$$

olsun. x değerini ise

$$x = \pm \frac{\sinh\theta}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} = \pm \cosh\theta \sqrt{s_1^2 - \tanh^2\theta} \tag{4.81}$$

olarak alalım. Böylece

$$\kappa x = -\cosh\theta s_1 \tag{4.82}$$

olur. $\vec{u}$ vektörünü

$$\vec{u} = \kappa x \vec{q} + \cosh\theta \vec{h} + x\vec{a} \tag{4.83}$$

şeklinde yazalım. $\vec{u}$ vektörünün $\vec{h}$ vektörü ile sabit açı yaptığı açıktır, yani $\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = \cosh\theta =$ sabit olur. Son olarak, (4.81) ve (4.82) eşitliklerini (4.83) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\vec{u} = \cosh\theta \left(-s_1 \vec{q} + \vec{h} \pm \sqrt{s_1^2 - \tanh^2\theta} \vec{a} \right)$$

olup, bu ifadenin türevinden $\vec{u}' = 0$ elde edilir. Böylece, $\vec{u}$ sabit vektör olup, S yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

(viii) S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike h-slant regle yüzey ve $\vec{u}$ timelike vektör olsun. Tanım 2.1.8'den, θ açısı $\vec{h}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki Lorentziyen açı

olmak üzere

$$|\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle| = \sinh\theta \Rightarrow \langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = \mp \sinh\theta$$

elde edilir. Bu ifadenin türevinden

$$\langle \vec{q} + \kappa\vec{a}, \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = -\kappa \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle \tag{4.84}$$

olup, burada $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = x$ alınırsa, $\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = -\kappa x$ bulunur. Böylece, $\vec{u}$ vektörü

$$\vec{u} = \kappa x \vec{q} \mp \sinh\theta \vec{h} + x\vec{a}$$

şeklinde yazılabilir. $\vec{u}$ birim olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = -1 &\Rightarrow -\kappa^2 x^2 + \sinh^2\theta + x^2 = -1 \\ &\Rightarrow x^2(\kappa^2 - 1) = \sinh^2\theta + 1 \\ &\Rightarrow x^2 = \frac{\cosh^2\theta}{\kappa^2 - 1} \\ &\Rightarrow x = \mp \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \end{aligned} \tag{4.85}$$

olur. Bununla birlikte, (4.84) denkleminin ikinci türevinden

$$\begin{aligned} \langle \vec{h} + \kappa'\vec{a} - \kappa^2\vec{h}, \vec{u} \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \vec{h}, \vec{u} \rangle + \kappa' \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle - \kappa^2 \langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \mp \sinh\theta + \kappa' x \pm \kappa^2 \sinh\theta = 0 \\ &\Rightarrow x = \mp \frac{(\kappa^2 - 1)\sinh\theta}{\kappa'} \end{aligned} \tag{4.86}$$

elde edilir. (4.85) ve (4.86) eşitliklerinden

$$\mp \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} = \mp \frac{(\kappa^2 - 1)\sinh\theta}{\kappa'} \Rightarrow \mp \frac{\kappa'}{(\kappa^2 - 1)^{3/2}} = \mp \tanh\theta$$

olup, son eşitliğin integralinden

$$\pm \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} = \mp \tanh\theta (s_1 + c), c \in \mathbb{R}$$

bulunur. Burada, $s_1 \to s_1 - c$ parametre değişimi yaparak c sabitini kolayca eleyebiliriz. Böylece, son eşitlikten

$$\mp \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} = \mp \tanh\theta s_1 \Rightarrow \kappa = \mp \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 - \coth^2\theta}}$$

sonucuna ulaşılır.

Tersine,

$$\kappa = \mp \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 - \coth^2\theta}}$$

olsun. x değerini ise

$$x = \pm \frac{\cosh\theta}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} = \pm \sinh\theta \sqrt{s_1^2 - \coth^2\theta} \tag{4.87}$$

olarak alalım. Böylece

$$\kappa x = -\sinh\theta s_1 \tag{4.88}$$

olur. $\vec{u}$ vektörünü

$$\vec{u} = \kappa x\vec{q} + \sinh\theta\vec{h} + x\vec{a} \tag{4.89}$$

şeklinde yazalım. $\vec{u}$ vektörünün $\vec{h}$ vektörü ile sabit açı yaptığı açıktır, yani $\langle\vec{h},\vec{u}\rangle = \sinh\theta =$ sabit olur. Son olarak, (4.87) ve (4.88) eşitliklerini (4.89) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\vec{u} = \sinh\theta\left(-s_1\vec{q} + \vec{h} \pm \sqrt{s_1^2 - \coth^2\theta}\vec{a}\right)$$

olup, bu ifadenin türevinden $\vec{u}' = 0$ elde edilir. Böylece, $\vec{u}$ sabit vektör olup, S yüzeyi h-slant regle yüzeydir. ■

4.1.3. Spacelike ve Timelike a-slant Regle Yüzeyler

Tanım 4.1.10. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı bir spacelike (timelike) regle yüzey, $\vec{c}(s)$ eğrisi, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s parametresi boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi olsun. S yüzeyinin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu, sırasıyla, $\{\vec{q},\vec{h},\vec{a}\}$ ve $\kappa \neq 0$ olmak üzere yüzeyin parametrik ifadesi

$$\vec{r}(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s), \;\; \|\vec{q}(s)\| = 1,$$

ile verilsin. Bu takdirde, birim ve sabit bir vektör $\vec{u}$ olmak üzere, yüzeyin $\vec{a}$ merkez teğet vektörü $\vec{u}$ vektörüyle sabit açı yapıyorsa, yani,

$$\langle\vec{a},\vec{u}\rangle = \text{sabit} \neq 0$$

ise, S regle yüzeyine Minkowski 3-uzayında spacelike (timelike) a-slant regle yüzey denir.

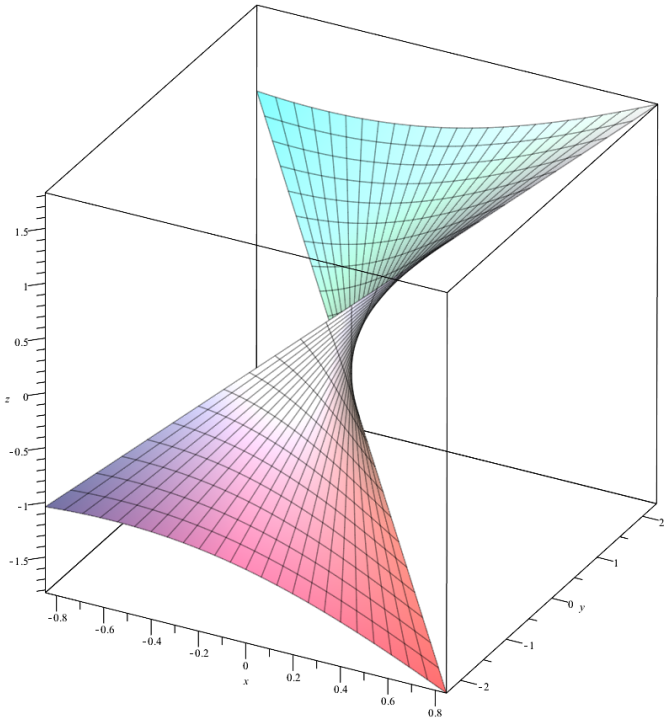
Teorem 4.1.3 ve Sonuç 4.1.4'ten görüldüğü üzere, bir S yüzeyinin a-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin q-slant regle yüzey olmasıdır. Dolayısıyla, q-slant regle yüzeyler için verilen karakterizasyonlar a-slant regle yüzeyler için de verilebilir.

4.1.4. Minkowski 3-uzayında Slant Regle Yüzey Örnekleri

Örnek 4.1.11. Minkowski 3-uzayında anadoğruları spacelike olan timelike bir S_1 regle yüzeyi

$$\vec{r}_1(s_1, v) = (0, 0, s_1) + v\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sinh(\sqrt{3}s_1), \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\cosh(\sqrt{3}s_1)\right)$$

parametrizasyonuyla verilsin. Bu takdirde, (2.13) denklemleri kullanılarak $\kappa = -2$ bulunur ve Sonuç 4.1.4'ten S_1 yüzeyi q-slant regle yüzeydir. Bu yüzeyin grafiği Şekil 4.1 ile verilmiştir.



Şekil 4.1. S_1 anadoğruları spacelike olan timelike q-slant regle yüzeyi

Örnek 4.1.12. Minkowski 3-uzayında anadoğruları timelike olan timelike bir S_2 regle yüzeyinin boğaz çizgisi $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$,

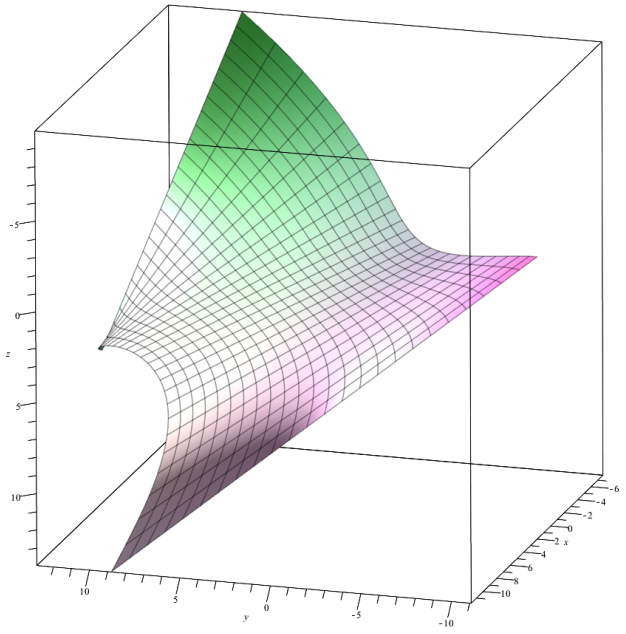
$$\begin{cases} c_1 = \cosh\theta \int \left[\int \cos\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arccosh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \cosh\theta \int \left[\int \sin\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arccosh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_3 = \sinh\theta \int s_1 ds_1 \end{cases}$$

ve anadoğruları $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$,

$$\begin{cases} q_1 = \cosh\theta \int \cos\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arccosh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \cosh\theta \int \sin\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arccosh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_3 = \sinh\theta s_1 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\vec{r}_2(s_1, v) = \vec{c}(s_1) + v\vec{q}(s_1)$$



Şekil 4.2. S_2 anadoğruları timelike olan timelike h-slant regle yüzeyi

parametrizasyonuyla verilsin. $\theta = \pi/4$ alınıp, Teorem 2.2.9 kullanılarak gerekli işlemler yapıldığında

$$\kappa = \frac{\tanh \frac{\pi}{4} s_1}{\sqrt{\tanh^2 \frac{\pi}{4} s_1^2 - 1}}$$

olup

$$\frac{\kappa'}{(\kappa^2 - 1)^{3/2}} = \tanh \frac{\pi}{4} = \text{sabit}$$

bulunur. Böylece, Teorem 4.1.8'den, S_2 yüzeyi h-slant regle yüzeydir. Bu yüzeyin grafiği Şekil 4.2 ile verilmiştir.

4.2. Minkowski 3-uzayında Spacelike ve Timelike Darboux Slant Regle Yüzeyler

Bu bölümde, spacelike ve timelike Darboux slant regle yüzeyler tanımlanacak ve bu yüzeylerle ilgili teoremler verilecektir. Bununla birlikte, bu yüzeyler ile q-slant, h-slant ve a-slant regle yüzeyler arasındaki ilişkiler incelenecektir.

4.2.1. Spacelike Darboux Slant Regle Yüzeyler

Tanım 4.2.1. S yüzeyi, Minkowski 3-uzayında tanımlı bir spacelike regle yüzey, $\vec{c}(s)$ eğrisi, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s parametresi boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi olsun. S yüzeyinin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu, sırasıyla, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve $\kappa \neq 0$ olmak üzere yüzeyin parametrik ifadesi

$$\vec{r}(s, v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s), \;\; \|\vec{q}(s)\| = 1,$$

ile verilsin. Bu takdirde, birim ve sabit bir vektör $\vec{u}$ olmak üzere, yüzeyin $\vec{w}$ Darboux vektörü $\vec{u}$ vektörüyle sabit açı yapıyorsa, yani,

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0$$

ise, S regle yüzeyine Minkowski 3-uzayında spacelike Darboux slant regle yüzey denir.

Teorem 4.2.2. S yüzeyi, Minkowski 3-uzayında tanımlı bir spacelike regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyi spacelike Darboux slant regle yüzey ise κ sabittir.

İspat: S yüzeyi spacelike Darboux slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Tanım 4.2.1'den,

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0$$

olup, bu eşitliğin s_1 yay parametresine göre türevinden

$$\begin{aligned} \langle \vec{w}', \vec{u} \rangle = 0 &\Rightarrow \langle (-\kappa\vec{q} + \vec{a})', \vec{u} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \kappa' \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \kappa = \text{sabit} \\ \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Burada, $\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = 0$ olduğunu varsayalım. $\vec{u}$ vektörü $\vec{q}$ vektörüne dik olduğundan $\vec{h}, \vec{a}$ vektörlerinin gerdiği düzlemde kalacağından, $a_1 = a_1(s_1), a_2 = a_2(s_1)$

düzgün fonksiyonlar olmak üzere

$$\vec{u} = a_1\vec{h} + a_2\vec{a}$$

yazılabilir. $\vec{u}$ vektörü sabit vektör olduğundan, son eşitliğin türevinden

$$a_1\vec{q} + (a_1' + a_2\kappa)\vec{h} + (a_1\kappa + a_2')\vec{a} = 0$$

olup, $a_1 = a_2 = 0$ elde edilir. Bu durumda $\vec{u} = 0$ olacağından bu bir çelişkidir ve $\kappa' = 0$ yani $\kappa =$ sabit olmalıdır. ■

Sonuç 4.2.3. S yüzeyi, Minkowski 3-uzayında tanımlı bir spacelike regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa =$ sabit $\neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyinin spacelike Darboux slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\vec{w}$ ve $\vec{u}$ vektörlerinin arasındaki θ açısının sabit olmasıdır.

İspat: S spacelike Darboux slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Tanım 4.2.1'den $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle =$ sabit $\neq 0$ ve $\|\vec{u}\| = 1$ olur. Ayrıca $\kappa =$ sabit olduğundan (2.12) eşitliğinden $\|\vec{w}\| = \sqrt{\kappa^2 + 1}$ olup $\|\vec{w}\| =$ sabittir. Şimdi, $\vec{w}$ ve $\vec{u}$ vektörlerinin arasındaki θ açısının durumunu inceleyelim. $\vec{u}$ vektörünün Lorentziyen karakterine göre üç durum oluşur.

(i) $\vec{u}$ vektörü spacelike vektör ve $\vec{w}$, $\vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike ise,

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \|\vec{w}\|\|\vec{u}\| \cos\theta$$

olup, $\cos\theta =$ sabit $\Rightarrow \theta =$ sabit elde edilir.

(ii) $\vec{u}$ vektörü spacelike vektör ve $\vec{w}$, $\vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike ise,

$$|\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle| = \|\vec{w}\|\|\vec{u}\| \cosh\theta$$

olup, $\cosh\theta =$ sabit $\Rightarrow \theta =$ sabit elde edilir.

(iii) $\vec{u}$ vektörü timelike vektör ise

$$|\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle| = \|\vec{w}\|\|\vec{u}\| \sinh\theta$$

olup, $\sinh\theta =$ sabit $\Rightarrow \theta =$ sabit elde edilir.

Tersine, $\vec{w}$ ve $\vec{u}$ vektörlerinin arasındaki θ açısı sabit olsun. Gerek şartın ispatına benzer şekilde, $\vec{u}$ vektörünün Lorentziyen karakterine göre üç durum oluşur.

(i) $\vec{u}$ vektörü spacelike vektör ve $\vec{w}$, $\vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike ise,

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{w}\|\|\vec{u}\|}$$

olup, θ sabit olduğundan $\cos\theta$ da sabit olacağından $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$ = sabit bulunur. Böylece Tanım 4.2.1'den S yüzeyi spacelike Darboux slant regle yüzeydir.

(ii) $\vec{u}$ vektörü spacelike vektör ve $\vec{w}$, $\vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike ise,

$$\cosh\theta = \frac{|\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{w}\|\|\vec{u}\|}$$

olup, θ sabit olduğundan $\cosh\theta$ da sabit olacağından $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$ = sabit bulunur. Böylece Tanım 4.2.1'den S yüzeyi spacelike Darboux slant regle yüzeydir.

(iii) $\vec{u}$ vektörü timelike vektör ise

$$\sinh\theta = \frac{|\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{w}\|\|\vec{u}\|}$$

olup, θ sabit olduğundan $\sinh\theta$ da sabit olacağından $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$ = sabit bulunur. Böylece Tanım 4.2.1'den S yüzeyi spacelike Darboux slant regle yüzeydir. ■

Sonuç 4.2.4. S yüzeyi, Minkowski 3-uzayında tanımlı bir spacelike regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyi spacelike Darboux slant regle yüzey ise $\det(\vec{w}, \vec{w}', \vec{w}'') = 0$ eşitliği sağlanır.

İspat: S yüzeyi spacelike regle yüzey olduğundan, (2.12) eşitliğinden $\vec{w} = -\kappa\vec{q} + \vec{a}$ olup, buradan

$$\vec{w}' = -\kappa'\vec{q} \quad \text{ve} \quad \vec{w}'' = -\kappa''\vec{q} - \kappa'\vec{h}$$

olup,

$$\det(\vec{w}, \vec{w}', \vec{w}'') = -(\kappa')^2 \tag{4.90}$$

bulunur. S yüzeyi spacelike Darboux slant regle yüzey olduğundan Teorem 4.2.2'den $\kappa =$ sabit olup (4.90) eşitliğinden $\det(\vec{w}, \vec{w}', \vec{w}'') = 0$ elde edilir. ■

4.2.2. Anadoğruları Spacelike Olan Timelike Darboux Slant Regle Yüzeyler

Tanım 4.2.5. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları spacelike olan bir timelike regle yüzey, $\vec{c}(s)$ eğrisi, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s parametresi boğaz

çizgisinin yay uzunluğu parametresi olsun. S yüzeyinin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu, sırasıyla, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve $\kappa \neq 0$ olmak üzere yüzeyin parametrik ifadesi

$$\vec{r}(s, v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s), \;\; \|\vec{q}(s)\| = 1,$$

ile verilsin. Bu takdirde, birim ve sabit bir vektör $\vec{u}$ olmak üzere, yüzeyin $\vec{w}$ Darboux vektörü $\vec{u}$ vektörüyle sabit açı yapıyorsa, yani,

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0$$

ise, S regle yüzeyine Minkowski 3-uzayında anadoğruları spacelike olan timelike Darboux slant regle yüzey denir.

Teorem 4.2.6. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları spacelike olan bir timelike regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyi anadoğruları spacelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzey ise κ sabittir.

İspat: S yüzeyi anadoğruları spacelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Tanım 4.2.5'ten,

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0$$

olup, bu eşitliğin s_1 yay parametresine göre türevinden

$$\begin{aligned} \langle \vec{w}', \vec{u} \rangle = 0 &\Rightarrow \langle (\kappa\vec{q} - \vec{a})', \vec{u} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \kappa' \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \kappa = \text{sabit} \\ \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Burada, $\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = 0$ olduğunu varsayalım. $\vec{u}$ vektörü $\vec{q}$ vektörüne dik olduğundan $\vec{h}, \vec{a}$ vektörlerinin gerdiği düzlemde kalacağından, $a_1 = a_1(s_1), a_2 = a_2(s_1)$ düzgün fonksiyonlar olmak üzere

$$\vec{u} = a_1\vec{h} + a_2\vec{a}$$

yazılabilir. $\vec{u}$ vektörü sabit vektör olduğundan, son eşitliğin türevinden

$$-a_1\vec{q} + (a_1' + a_2\kappa)\vec{h} + (a_1\kappa + a_2')\vec{a} = 0$$

olup, $a_1 = a_2 = 0$ elde edilir. Bu durumda $\vec{u} = 0$ olacağından bu bir çelişkidir ve $\kappa' = 0$ yani $\kappa =$ sabit olmalıdır. ■

Sonuç 4.2.7. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları spacelike olan bir timelike regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa = \text{sabit} \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyinin anadoğruları spacelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\vec{w}$ ve $\vec{u}$ vektörlerinin arasındaki θ açısının sabit olmasıdır.

İspat: S yüzeyi anadoğruları spacelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Tanım 4.2.5'ten $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0$ ve $\|\vec{u}\| = 1$ olur. Ayrıca $\kappa = \text{sabit}$ olduğundan (2.14) eşitliğinden $\|\vec{w}\| = \sqrt{\kappa^2 - 1}$ olup $\|\vec{w}\| = \text{sabittir}$. Şimdi, $\vec{w}$ ve $\vec{u}$ vektörlerinin arasındaki θ açısının durumunu inceleyelim. $\vec{w}$ ve $\vec{u}$ vektörlerinin Lorentziyen karakterlerine göre aşağıdaki beş durum oluşur.

(i) $\vec{w}$ ve $\vec{u}$ vektörleri spacelike ve bu vektörlerin gerdikleri düzlem spacelike ise,

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \|\vec{w}\| \|\vec{u}\| \cos\theta$$

olup, $\cos\theta = \text{sabit} \Rightarrow \theta = \text{sabit}$ elde edilir.

(ii) $\vec{w}$ ve $\vec{u}$ vektörleri spacelike ve bu vektörlerin gerdikleri düzlem timelike ise,

$$|\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle| = \|\vec{w}\| \|\vec{u}\| \cosh\theta$$

olup, $\cosh\theta = \text{sabit} \Rightarrow \theta = \text{sabit}$ elde edilir.

(iii) $\vec{w}$ vektörü spacelike vektör, $\vec{u}$ vektörü timelike vektör ise

$$|\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle| = \|\vec{w}\| \|\vec{u}\| \sinh\theta$$

olup, $\sinh\theta = \text{sabit} \Rightarrow \theta = \text{sabit}$ elde edilir.

(iv) $\vec{w}$ vektörü timelike vektör, $\vec{u}$ vektörü spacelike vektör ise

$$|\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle| = \|\vec{w}\| \|\vec{u}\| \sinh\theta$$

olup, $\sinh\theta = \text{sabit} \Rightarrow \theta = \text{sabit}$ elde edilir.

(v) $\vec{w}$ vektörü timelike vektör, $\vec{u}$ vektörü timelike vektör ise

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = -\|\vec{w}\| \|\vec{u}\| \cosh\theta$$

olup, $\cosh\theta = \text{sabit} \Rightarrow \theta = \text{sabit}$ elde edilir.

Tersine, $\vec{w}$ ve $\vec{u}$ vektörlerinin arasındaki θ açısı sabit olsun. Gerek şartın ispatına benzer şekilde, $\vec{w}$ ve $\vec{u}$ vektörlerinin Lorentziyen karakterlerine göre beş durum oluşur.

(i) $\vec{w}$ ve $\vec{u}$ vektörleri spacelike ve bu vektörlerin gerdikleri düzlem spacelike ise,

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{w}\|\|\vec{u}\|}$$

olup, θ sabit olduğundan $\cos\theta$ da sabit olacağından $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$ = sabit bulunur. Böylece Tanım 4.2.5'ten S yüzeyi anadoğruları spacelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzeydir.

(ii) $\vec{w}$ ve $\vec{u}$ vektörleri spacelike ve bu vektörlerin gerdikleri düzlem timelike ise,

$$\cosh\theta = \frac{|\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{w}\|\|\vec{u}\|}$$

olup, θ sabit olduğundan $\cosh\theta$ da sabit olacağından $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$ = sabit bulunur. Böylece Tanım 4.2.5'ten S yüzeyi anadoğruları spacelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzeydir.

(iii) $\vec{w}$ vektörü spacelike vektör, $\vec{u}$ vektörü timelike vektör ise

$$\sinh\theta = \frac{|\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{w}\|\|\vec{u}\|}$$

olup, θ sabit olduğundan $\sinh\theta$ da sabit olacağından $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$ = sabit bulunur. Böylece Tanım 4.2.5'ten S yüzeyi anadoğruları spacelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzeydir.

(iv) $\vec{w}$ vektörü timelike vektör, $\vec{u}$ vektörü spacelike vektör ise

$$\sinh\theta = \frac{|\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{w}\|\|\vec{u}\|}$$

olup, θ sabit olduğundan $\sinh\theta$ da sabit olacağından $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$ = sabit bulunur. Böylece Tanım 4.2.5'ten S yüzeyi anadoğruları spacelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzeydir.

(v) $\vec{w}$ vektörü timelike vektör, $\vec{u}$ vektörü timelike vektör ise

$$\cosh\theta = -\frac{\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{w}\|\|\vec{u}\|}$$

olup, θ sabit olduğundan $\cosh\theta$ da sabit olacağından $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$ = sabit bulunur. Böylece Tanım 4.2.5'ten S yüzeyi anadoğruları spacelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.2.8. S yüzeyi, Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları spacelike olan bir timelike regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyi anadoğruları spacelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzey ise $\det(\vec{w}, \vec{w}', \vec{w}'') = 0$ eşitliği sağlanır.

İspat: S yüzeyi anadoğruları spacelike olan bir timelike regle yüzey olduğundan, (2.14) eşitliğinden $\vec{w} = \kappa\vec{q} - \vec{a}$ olup, buradan

$$\vec{w}' = \kappa'\vec{q} \quad \text{ve} \quad \vec{w}'' = \kappa''\vec{q} + \kappa'\vec{h}$$

olup,

$$\det(\vec{w}, \vec{w}', \vec{w}'') = (\kappa')^2 \tag{4.91}$$

bulunur. S yüzeyi anadoğruları spacelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzey olduğundan Teorem 4.2.6'dan $\kappa =$ sabit olup (4.91) eşitliğinden $\det(\vec{w}, \vec{w}', \vec{w}'') = 0$ elde edilir. ■

4.2.3. Anadoğruları Timelike Olan Timelike Darboux Slant Regle Yüzeyler

Tanım 4.2.9. S yüzeyi, Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları timelike olan bir timelike regle yüzey, $\vec{c}(s)$ eğrisi, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s parametresi boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi olsun. S yüzeyinin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu, sırasıyla, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve $\kappa \neq 0$ olmak üzere yüzeyin parametrik ifadesi

$$\vec{r}(s, v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s), \;\; \|\vec{q}(s)\| = 1,$$

ile verilsin. Bu takdirde, birim ve sabit bir vektör $\vec{u}$ olmak üzere, yüzeyin $\vec{w}$ Darboux vektörü $\vec{u}$ vektörüyle sabit açı yapıyorsa, yani,

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0$$

ise, S regle yüzeyine Minkowski 3-uzayında anadoğruları timelike olan timelike Darboux slant regle yüzey denir.

Teorem 4.2.10. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları timelike olan bir timelike regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyi anadoğruları timelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzey ise κ sabittir.

İspat: S yüzeyi anadoğruları timelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Tanım 4.2.9'dan,

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0$$

olup, bu eşitliğin s_1 yay parametresine göre türevinden

$$\begin{aligned} \langle \vec{w}', \vec{u} \rangle = 0 &\Rightarrow \langle (-\kappa \vec{q} - \vec{a})', \vec{u} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow -\kappa' \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \kappa = \text{sabit} \\ \langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Burada, $\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = 0$ olduğunu varsayalım. $\vec{u}$ vektörü $\vec{q}$ vektörüne dik olduğundan $\vec{h}, \vec{a}$ vektörlerinin gerdiği düzlemde kalacağından, $a_1 = a_1(s_1), a_2 = a_2(s_1)$ düzgün fonksiyonlar olmak üzere

$$\vec{u} = a_1 \vec{h} + a_2 \vec{a}$$

yazılabilir. $\vec{u}$ vektörü sabit vektör olduğundan, son eşitliğin türevinden

$$a_1 \vec{q} + (a_1' - a_2 \kappa) \vec{h} + (a_1 \kappa + a_2') \vec{a} = 0$$

olup, $a_1 = a_2 = 0$ elde edilir. Bu durumda $\vec{u} = 0$ olacağından bu bir çelişkidir ve $\kappa' = 0$ yani $\kappa =$ sabit olmalıdır. ■

Sonuç 4.2.11. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları timelike olan bir timelike regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa =$ sabit $\neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyinin anadoğruları timelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\vec{w}$ ve $\vec{u}$ vektörlerinin arasındaki θ açısının sabit olmasıdır.

İspat: S yüzeyi anadoğruları timeelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Tanım 4.2.9'dan $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle =$ sabit $\neq 0$ ve $\|\vec{u}\| = 1$ olur. Ayrıca $\kappa =$ sabit olduğundan (2.16) eşitliğinden $\|\vec{w}\| = \sqrt{1 - \kappa^2}$ olup $\|\vec{w}\| =$ sabittir. Şimdi, $\vec{w}$ ve $\vec{u}$ vektörlerinin arasındaki θ açısının durumunu inceleyelim. $\vec{w}$ ve $\vec{u}$ vektörlerinin Lorentziyen karakterlerine göre aşağıdaki beş durum oluşur.

(i) $\vec{w}$ vektörü spacelike vektör, $\vec{u}$ vektörü spacelike vektör ve $\vec{w}$, $\vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike ise,

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \|\vec{w}\| \|\vec{u}\| \cos\theta$$

olup, $\cos\theta =$ sabit $\Rightarrow \theta =$ sabit elde edilir.

(ii) $\vec{w}$ vektörü spacelike vektör, $\vec{u}$ vektörü spacelike vektör ve $\vec{w}$, $\vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike ise,

$$|\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle| = \|\vec{w}\|\|\vec{u}\| \cosh\theta$$

olup, $\cosh\theta =$ sabit $\Rightarrow \theta =$ sabit elde edilir.

(iii) $\vec{w}$ vektörü spacelike vektör, $\vec{u}$ vektörü timelike vektör ise

$$|\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle| = \|\vec{w}\|\|\vec{u}\| \sinh\theta$$

olup, $\sinh\theta =$ sabit $\Rightarrow \theta =$ sabit elde edilir.

(iv) $\vec{w}$ vektörü timelike vektör, $\vec{u}$ vektörü spacelike vektör ise

$$|\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle| = \|\vec{w}\|\|\vec{u}\| \sinh\theta$$

olup, $\sinh\theta =$ sabit $\Rightarrow \theta =$ sabit elde edilir.

(v) $\vec{w}$ vektörü timelike vektör, $\vec{u}$ vektörü timelike vektör ise

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = -\|\vec{w}\|\|\vec{u}\| \cosh\theta$$

olup, $\cosh\theta =$ sabit $\Rightarrow \theta =$ sabit elde edilir.

Tersine, $\vec{w}$ ve $\vec{u}$ vektörlerinin arasındaki θ açısı sabit olsun. Gerek şartın ispatına benzer şekilde, $\vec{w}$ ve $\vec{u}$ vektörlerinin Lorentziyen karakterlerine göre beş durum oluşur.

(i) $\vec{w}$ vektörü spacelike vektör, $\vec{u}$ vektörü spacelike vektör ve $\vec{w}$, $\vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike ise,

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{w}\|\|\vec{u}\|}$$

olup, θ sabit olduğundan $\cos\theta$ da sabit olacağından $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle =$ sabit bulunur. Böylece Tanım 4.2.9'dan S yüzeyi anadoğruları timelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzeydir.

(ii) $\vec{w}$ vektörü spacelike vektör, $\vec{u}$ vektörü spacelike vektör ve $\vec{w}$, $\vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike ise,

$$\cosh\theta = \frac{|\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{w}\|\|\vec{u}\|}$$

olup, θ sabit olduğundan $\cosh\theta$ da sabit olacağından $\langle\vec{w},\vec{u}\rangle$ = sabit bulunur. Böylece Tanım 4.2.9'dan S yüzeyi anadoğruları timelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzeydir.

(iii) $\vec{w}$ vektörü spacelike vektör, $\vec{u}$ vektörü timelike vektör ise

$$\sinh\theta = \frac{|\langle\vec{w},\vec{u}\rangle|}{\|\vec{w}\|\|\vec{u}\|}$$

olup, θ sabit olduğundan $\sinh\theta$ da sabit olacağından $\langle\vec{w},\vec{u}\rangle$ = sabit bulunur. Böylece Tanım 4.2.9'dan S yüzeyi anadoğruları timelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzeydir.

(iv) $\vec{w}$ vektörü timeelike vektör, $\vec{u}$ vektörü spacelike vektör ise

$$\sinh\theta = \frac{|\langle\vec{w},\vec{u}\rangle|}{\|\vec{w}\|\|\vec{u}\|}$$

olup, θ sabit olduğundan $\sinh\theta$ da sabit olacağından $\langle\vec{w},\vec{u}\rangle$ = sabit bulunur. Böylece Tanım 4.2.9'dan S yüzeyi anadoğruları timelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzeydir.

(v) $\vec{w}$ vektörü timeelike vektör, $\vec{u}$ vektörü timelike vektör ise

$$\cosh\theta = -\frac{\langle\vec{w},\vec{u}\rangle}{\|\vec{w}\|\|\vec{u}\|}$$

olup, θ sabit olduğundan $\cosh\theta$ da sabit olacağından $\langle\vec{w},\vec{u}\rangle$ = sabit bulunur. Böylece Tanım 4.2.9'dan S yüzeyi anadoğruları timelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzeydir. ■

Sonuç 4.2.12. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları timelike olan bir timelike regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q},\vec{h},\vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyi anadoğruları spacelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzey ise $\det(\vec{w},\vec{w}',\vec{w}'') = 0$ eşitliği sağlanır.

İspat: S yüzeyi anadoğruları timelike olan bir timelike regle yüzey olduğundan, (2.16) eşitliğinden $\vec{w} = -\kappa\vec{q} - \vec{a}$ olup, buradan

$$\vec{w}' = -\kappa'\vec{q} \quad \text{ve} \quad \vec{w}'' = -\kappa''\vec{q} - +\kappa'\vec{h}$$

olup,

$$\det(\vec{w},\vec{w}',\vec{w}'') = -(\kappa')^2 \tag{4.92}$$

bulunur. S yüzeyi anadoğruları timelike olan bir timelike Darboux slant regle yüzey olduğundan Teorem 4.2.10'dan $\kappa =$ sabit olup (4.92) eşitliğinden $\det(\vec{w}, \vec{w}', \vec{w}'') = 0$ elde edilir. ■

4.2.4. Spacelike ve Timelike Slant Regle Yüzeyler Arasındaki İlişkiler

Bu bölümde, Minkowski 3-uzayında spacelike ve timelike Darboux slant regle yüzeyler ile q-slant, h-slant ve a-slant regle yüzeyler arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Teorem 4.2.13. Minkowski 3-uzayındaki her S spacelike (timelike) Darboux slant regle yüzeyi aynı zamanda bir spacelike (timelike) q-slant (ya da a-slant) regle yüzeydir.

İspat: S yüzeyi spacelike (timelike) Darboux slant regle yüzey olsun. Teorem 4.2.2'den (Teorem 4.2.6'dan ve Teorem 4.2.10'dan) S yüzeyinin eğrilik fonksiyonu $\kappa =$ sabittir. Böylece, $\kappa =$ sabit olduğundan Sonuç 4.1.4'ten S yüzeyi aynı zamanda bir q-slant (ya da a-slant) regle yüzeydir. ■

Teorem 4.2.14. Minkowski 3-uzayındaki bir S yüzeyi eğer spacelike (timelike) h-slant regle yüzey ise S yüzeyi aynı zamanda, aynı eksenli bir spacelike (timelike) Darboux slant regle yüzey olamaz.

İspat: **(i)** S yüzeyi spacelike h-slant regle yüzey olsun.

$$\frac{\kappa'}{(\kappa^2+1)^{3/2}} = p = \text{sabit}$$

olmak üzere (4.21) eşitliğinden S yüzeyinin ekseni

$$\vec{u} = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+1}}\vec{q} + p\vec{h} + \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+1}}\vec{a} \tag{4.93}$$

ile verilir. Darboux vektörünün $\vec{w} = -\kappa\vec{q} + \vec{a}$ olduğu göz önünde bulundurulursa $\|\vec{w}\| = \sqrt{\kappa^2+1}$ olup (4.93) eşitliği

$$\vec{u} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} + p\vec{h}$$

şekline dönüşür. Bu eşitliğin $\vec{w}$ ile iç çarpımından

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \|\vec{w}\| = \sqrt{\kappa^2+1}$$

elde edilir. Böylece, son eşitlikten, S yüzeyinin aynı eksenli bir spacelike Darboux slant regle yüzey olması için $\kappa =$ sabit olması gerektiği görülür. Bu durumda, $p = 0$ olup

(4.93) eşitliğinden $\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = 0$ bulunur ki bu da Tanım 4.1.7 ile çelişir. Böylece S yüzeyi aynı eksenli bir spacelike Darboux slant regle yüzey olamaz.

(ii) S yüzeyi anadoğruları spacelike olan bir timelike h-slant regle yüzey olsun.

$$\frac{\kappa'}{(\kappa^2-1)^{3/2}} = p = \text{sabit}$$

olmak üzere (4.26) eşitliğinden S yüzeyinin ekseni

$$\vec{u} = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2-1}}\vec{q} - p\vec{h} - \frac{1}{\sqrt{\kappa^2-1}}\vec{a} \tag{4.94}$$

ile verilir. Darboux vektörünün $\vec{w} = \kappa\vec{q} - \vec{a}$ olduğu göz önünde bulundurulursa $\|\vec{w}\| = \sqrt{\kappa^2-1}$ olup (4.94) eşitliği

$$\vec{u} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} - p\vec{h}$$

şekline dönüşür. Bu eşitliğin $\vec{w}$ ile iç çarpımından

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \|\vec{w}\| = \sqrt{\kappa^2-1}$$

elde edilir. Böylece, son eşitlikten, S yüzeyinin aynı eksenli anadoğruları spacelike olan timelike bir Darboux slant regle yüzey olması için $\kappa = $ sabit olması gerektiği görülür. Bu durumda, $p = 0$ olup (4.94) eşitliğinden $\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = 0$ bulunur ki bu da Tanım 4.1.7 ile çelişir. Böylece S yüzeyi aynı eksenli anadoğruları spacelike olan timelike bir Darboux slant regle yüzey olamaz.

(iii) S yüzeyi anadoğruları timelike olan bir timelike h-slant regle yüzey olsun.

$$\frac{\kappa'}{(1-\kappa^2)^{3/2}} = p = \text{sabit}$$

olmak üzere (4.41) eşitliğinden S yüzeyinin ekseni

$$\vec{u} = -\frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}\vec{q} + p\vec{h} - \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}}\vec{a} \tag{4.95}$$

ile verilir. Darboux vektörünün $\vec{w} = -\kappa\vec{q} - \vec{a}$ olduğunu göz önünde bulundurursak $\|\vec{w}\| = \sqrt{1-\kappa^2}$ olup (4.95) eşitliği

$$\vec{u} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} + p\vec{h}$$

şekline dönüşür. Bu eşitliğin $\vec{w}$ ile iç çarpımından

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \|\vec{w}\| = \sqrt{1-\kappa^2}$$

elde edilir. Böylece, son eşitlikten, S yüzeyinin aynı eksenli anadoğruları timelike olan timelike bir Darboux slant regle yüzey olması için $\kappa = $ sabit olması gerektiği görülür.

Bu durumda, $p = 0$ olup (4.95) eşitliğinden $\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = 0$ bulunur ki bu da Tanım 4.1.7 ile çelişir. Böylece S yüzeyi aynı eksenli anadoğruları timelike olan timelike bir Darboux slant regle yüzey olamaz. ■

4.2.5. Minkowski 3-uzayında Darboux Slant Regle Yüzey Örnekleri

Bu kısımda Minkowski 3-uzayında spacelike ve timelike Darboux slant regle yüzeylere örnekler verilecektir.

Örnek 4.2.15. Minkowski 3-uzayında S_3 yüzeyi

$$\vec{r}_3(s,v) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh(s\sqrt{2}), \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh(s\sqrt{2})\right) + v\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh(s\sqrt{2}), \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh(s\sqrt{2})\right)$$

parametrizasyonuyla verilen spacelike regle yüzey olsun. Bu takdirde, yüzeyin Frenet vektörleri

$$\begin{cases} \vec{q} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh(s_1\sqrt{2}), \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh(s_1\sqrt{2})\right), \\ \vec{h} = \left(0, \sinh(s_1\sqrt{2}), \cosh(s_1\sqrt{2})\right), \\ \vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh(s_1\sqrt{2}), -\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh(s_1\sqrt{2})\right), \end{cases}$$

şeklindedir ve $\kappa = -1$ bulunur. Buradan, (2.12) eşitliğinden, $\vec{w} = (\sqrt{2}, 0, 0)$ elde edilir. $\vec{u}$ vektörünü $\vec{u} = (1,0,0)$ şeklinde seçersek, $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \sqrt{2} =$ sabit olur. Böylece, Tanım 4.2.1'den S_3 yüzeyi Minkowski 3-uzayında spacelike Darboux slant regle yüzeydir. S_3 yüzeyinin grafiği Şekil 4.3 ile verilmiştir.

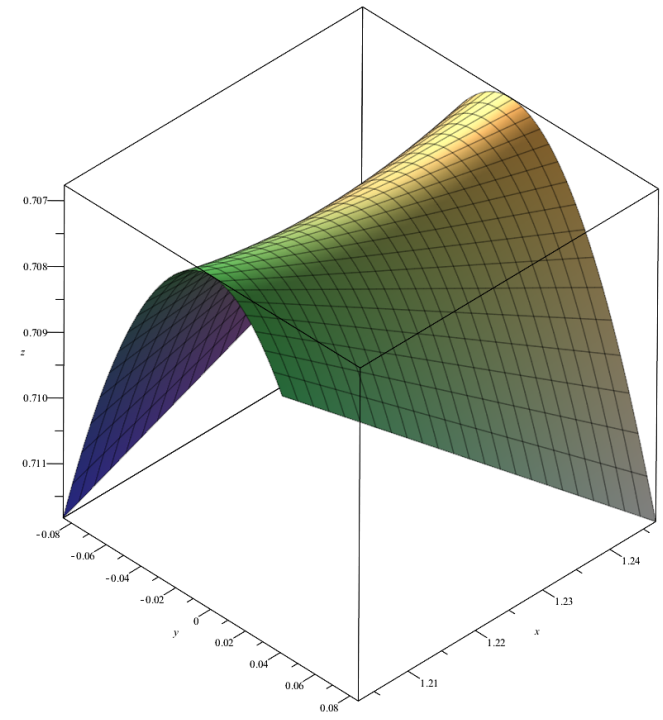
Örnek 4.2.16. Minkowski 3-uzayında S_4 yüzeyi

$$\vec{r}_4(s,v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), 0\right) + v\left(\sqrt{2}\sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), \sqrt{2}\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), 1\right)$$

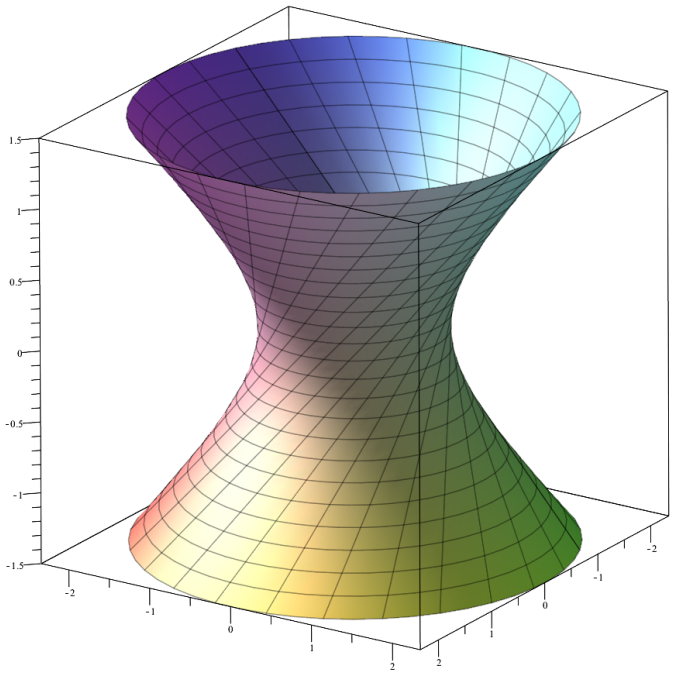
parametrizasyonuyla verilen anadoğruları spacelike olan timelike regle yüzey olsun. Bu takdirde, yüzeyin Darboux vektörü $\vec{w} = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ olur. $\vec{u}$ vektörünü $\vec{u} = (0,0,1)$ şeklinde seçersek, $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} =$ sabit bulunur. Böylece, Tanım 4.2.5'ten S_4 yüzeyi Minkowski 3-uzayında anadoğruları spacelike olan timelike Darboux slant regle yüzeydir. S_4 yüzeyinin grafiği Şekil 4.4 ile verilmiştir.

Örnek 4.2.17. Minkowski 3-uzayında S_5 yüzeyi

$$\vec{r}_5(s,v) = (\cos(s), -\sin(s), 1) + v\left(\sin(s), \cos(s), \sqrt{2}\right).$$

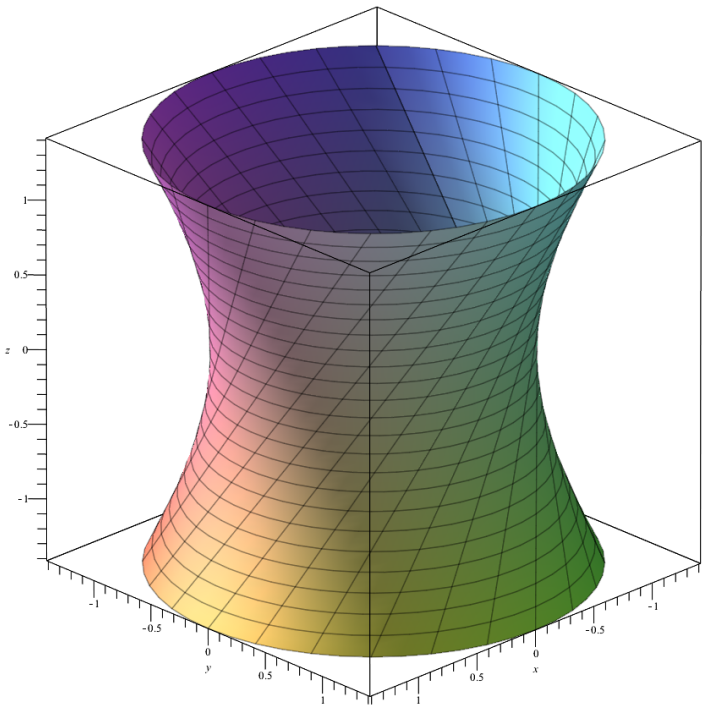


Şekil 4.3. S_3 spacelike Darboux slant regle yüzeyi



Şekil 4.4. S_4 anadoğruları spacelike olan timelike Darboux slant regle yüzeyi

parametrizasyonuyla verilen anadoğruları timelike olan timelike regle yüzey olsun. Bu takdirde, yüzeyin Darboux vektörü $\vec{w} = (0, 0, 1)$ olur. $\vec{u}$ vektörünü $\vec{u} = (\sqrt{2}, 0, 1)$ şeklinde seçersek, $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = -1 =$ sabit bulunur. Böylece, Tanım 4.2.9'dan S_5 yüzeyi Minkowski 3-uzayında anadoğruları timelike olan timelike Darboux slant regle yüzeydir. S_5 yüzeyinin grafiği Şekil 4.5 ile verilmiştir.



Şekil 4.5. S_5 anadoğruları timelike olan timelike Darboux slant regle yüzeyi

4.3. Minkowski 3-uzayında Spacelike ve Timelike Slant Regle Yüzeylerin Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları

Bu bölümde, Minkowski 3-uzayındaki bir regle yüzeyin yönlü konisinin elemanlarını anadoğru kabul eden yüzeyleri, bu yüzeylerin çatılarını ve türlerini inceleyeceğiz. Slant regle yüzey olmaları durumunda çatı elemanlarını kullanarak bu yüzeyleri karakterize eden diferansiyel denklemler oluşturacağız.

Minkowski 3-uzayındaki bir S_q regle yüzeyinin $\vec{h}$ merkez normal vektörü tarafından çizilen regle yüzeyi S_h ve $\vec{a}$ merkez teğet vektörü tarafından çizilen regle yüzeyi S_a ile gösterelim. Bu yüzeylerin Frenet çatıları, sırasıyla, $\{\vec{q}_h, \vec{h}_h, \vec{a}_h\}$, $\{\vec{q}_a, \vec{h}_a, \vec{a}_a\}$, konisel eğrilik fonksiyonları κ_h, κ_a ve yay uzunluğu parametreleri s_h, s_a olsun.

S_q yüzeyinin türüne göre S_h ve S_a yüzeylerinin türü de değişeceğinden dolayı, bu durumları ve bu durumlara ait diferansiyel denklem karakterizasyonlarının çıkarılışını farklı başlıklar altında inceleyeceğiz.

4.3.1. Spacelike Slant Regle Yüzeylerin Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları

Minkowski 3-uzayında spacelike bir $S = S_q$ regle yüzeyini göz önüne alalım. Bu yüzeyin konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa = \kappa_q$ ve yay uzunluğu parametresi $s_1 = s_q$ olsun. Bu durumda, (2.11) denklemleri

$$\begin{bmatrix} d\vec{q}/ds_q \\ d\vec{h}/ds_q \\ d\vec{a}/ds_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_q \\ 0 & \kappa_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{h} \\ \vec{a} \end{bmatrix} \tag{4.96}$$

şekline dönüşür. Burada, $\kappa_q = -\langle d\vec{a}/ds_q, \vec{h}\rangle$ şeklindedir.

Teorem 4.3.1. Minkowski 3-uzayında, S_q spacelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q yüzeyinin $\vec{h}$ merkez normal vektörü tarafından çizilen S_h yüzeyi anadoğruları timelike olan bir timelike regle yüzeydir ve S_q ile S_h regle yüzeylerinin konisel eğrilik fonksiyonları arasında

$$\kappa_h = \mp \frac{\kappa_q'}{(1+\kappa_q^2)^{3/2}} \tag{4.97}$$

bağıntısı vardır. S_h yüzeyinin Frenet türev formülleri ise

$$\begin{bmatrix} d\vec{q_h}/ds_h \\ d\vec{h_h}/ds_h \\ d\vec{a_h}/ds_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_h \\ 0 & -\kappa_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q_h} \\ \vec{h_h} \\ \vec{a_h} \end{bmatrix} \tag{4.98}$$

ile verilir.

İspat: S_q regle yüzeyinin boğaz çizgisi $\vec{c}(s)$ ve boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi s olmak üzere, S_h yüzeyinin denklemi

$$\vec{r}_h(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{h}(s), \quad \|\vec{h}(s)\| = 1$$

ile verilir. S_h regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}_h, \vec{h}_h, \vec{a}_h\}$ olduğundan, bu yüzeyin anadoğrusu olan $\vec{q_h}$ vektörü

$$\vec{q_h} = \vec{h}$$

olur ve bu vektör timelike vektördür. Bu eşitliğin s_h yay uzunluğu parametresine göre türevini alırsak, zincir kuralı ve (4.96) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{q_h}}{ds_h} = \vec{h}_h \Rightarrow \vec{h}_h &= \frac{d\vec{q_h}}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_h} \\ &= (\vec{q} + \kappa_q\vec{a})\frac{ds_q}{ds_h} \end{aligned}$$

bulunur. $\|\vec{h}_h\| = 1$ olduğundan, son eşitlikten

$$\frac{ds_q}{ds_h} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\kappa_q^2}}$$

elde edilir. Böylece, yüzeyin $\vec{h}_h$ vektörü, S_q yüzeyinin çatı elemanları cinsinden

$$\vec{h}_h = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\kappa_q^2}}(\vec{q} + \kappa_q\vec{a})$$

şeklinde yazılır ve spacelike vektördür. Buradan görülür ki, S_h yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike regle yüzeydir. Son olarak, $\vec{a}_h$ merkez teğet vektörü için ise

$$\vec{a}_h = -\vec{q}_h \times \vec{h}_h = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\kappa_q^2}}(\kappa_q\vec{q} - \vec{a})$$

olup, bu vektör spacelike vektördür. Böylece, S_h yüzeyinin Frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} d\vec{q_h}/ds_h \\ d\vec{h_h}/ds_h \\ d\vec{a_h}/ds_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_h \\ 0 & -\kappa_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q_h} \\ \vec{h_h} \\ \vec{a_h} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada, $\kappa_h = -\langle d\vec{a}_h/ds_h, \vec{h}_h\rangle$ olup,

$$\begin{aligned}\kappa_h &= -\langle d\vec{a}_h/ds_h, \vec{h}_h\rangle \\ &= -\left\langle \frac{d\vec{a}_h}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_h}, \vec{h}_h \right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{\kappa_q'}{(1+\kappa_q^2)^2}(\vec{q}+\kappa_q\vec{a}), \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\kappa_q^2}}(\vec{q}+\kappa_q\vec{a}) \right\rangle \\ &= \mp\frac{\kappa_q'}{(1+\kappa_q^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. ■

Teorem 4.3.1'den aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.3.2. S_q regle yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olmasıdır.

İspat: S_q yüzeyi h-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Teorem 4.1.8'in (i) şıkkından

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2+1)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0$$

ve aynı zamanda, (4.97) eşitliğinden

$$\kappa_h = \mp\frac{\kappa_q'}{(1+\kappa_q^2)^{3/2}}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan, $\kappa_h =$ sabit olup, Sonuç 4.1.4'ten S_h yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

Tersine, S_h yüzeyi q-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_h =$ sabit bulunur. Böylece, (4.97) eşitliğinden

$$\kappa_h = \mp\frac{\kappa_q'}{(1+\kappa_q^2)^{3/2}} = \text{sabit}$$

elde edilir. Buradan, Teorem 4.1.8'in (i) şıkkından S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.3. Minkowski 3-uzayında, S_q spacelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q yüzeyinin $\vec{a}$ merkez teğet vektörü tarafından çizilen S_a yüzeyi spacelike regle yüzeydir ve S_q ile S_a regle yüzeylerinin konisel eğrilik fonksiyonları arasında

$$\kappa_a = \mp\frac{1}{\kappa_q} \tag{4.99}$$

bağıntısı vardır. S_a yüzeyinin Frenet türev formülleri ise

$$\begin{bmatrix} d\vec{q}_a/ds_a \\ d\vec{h}_a/ds_a \\ d\vec{a}_a/ds_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_a \\ 0 & \kappa_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_a \\ \vec{h}_a \\ \vec{a}_a \end{bmatrix} \tag{4.100}$$

ile verilir.

İspat: S_q regle yüzeyinin boğaz çizgisi $\vec{c}(s)$ ve boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi s olmak üzere, S_a yüzeyinin denklemi

$$\vec{r}_a(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{a}(s), \quad \|\vec{a}(s)\| = 1$$

ile verilir. S_a regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}_a, \vec{h}_a, \vec{a}_a\}$ olduğundan, bu yüzeyin anadoğrusu olan $\vec{q}_a$ vektörü

$$\vec{q}_a = \vec{a}$$

olur ve bu vektör spacelike vektördür. Bu eşitliğin s_a yay uzunluğu parametresine göre türevini alırsak, zincir kuralı ve (4.96) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{q}_a}{ds_a} = \vec{h}_a \Rightarrow \vec{h}_a &= \frac{d\vec{q}_a}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_a} \\ &= \kappa_q\vec{h}\frac{ds_q}{ds_a} \end{aligned}$$

bulunur. $\|\vec{h}_a\| = 1$ olduğundan, son eşitlikten

$$\frac{ds_q}{ds_a} = \pm\frac{1}{\kappa_q}$$

elde edilir. Böylece, yüzeyin $\vec{h}_a$ vektörü, S_q yüzeyinin çatı elemanları cinsinden

$$\vec{h}_a = \pm\vec{h}$$

şeklinde yazılır ve timelike vektördür. Buradan görülür ki, S_a yüzeyi spacelike regle yüzeydir. Son olarak, $\vec{a}_a$ merkez teğet vektörü için ise

$$\vec{a}_a = -\vec{q}_a \times \vec{h}_a = \mp\vec{a} \times \vec{h} = \mp\vec{q}$$

olup, bu vektör spacelike vektördür. Böylece, S_a yüzeyinin Frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} d\vec{q}_a/ds_a \\ d\vec{h}_a/ds_a \\ d\vec{a}_a/ds_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_a \\ 0 & \kappa_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_a \\ \vec{h}_a \\ \vec{a}_a \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada, $\kappa_a = -\langle d\vec{a}_a/ds_a, \vec{h}_a\rangle$ olup,

$$\begin{aligned}\kappa_a &= -\langle d\vec{a}_a/ds_a, \vec{h}_a\rangle \\ &= -\left\langle \frac{d\vec{a}_a}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_a}, \vec{h}_a \right\rangle \\ &= -\left\langle -\frac{1}{\kappa_q}\vec{h}, \pm\vec{h} \right\rangle \\ &= \mp\frac{1}{\kappa_q}\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. ■

Teorem 4.3.4. S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_a regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olmasıdır.

İspat: S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzey ise, Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q =$ sabit olur. Böylece (4.99) eşitliğinden $\kappa_a = \mp\frac{1}{\kappa_q}$ olup, buradan $\kappa_a =$ sabit bulunur. Dolayısıyla, Sonuç 4.1.4 gereğince S_a yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

Tersine, S_a yüzeyi q-slant regle yüzey olsun. Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_a =$ sabit olur. (4.99) eşitliğinden $\kappa_a = \mp\frac{1}{\kappa_q}$ olup, buradan $\kappa_q =$ sabit bulunur. Böylece, Sonuç 4.1.4 gereğince S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.5. Minkowski 3-uzayında, S_q spacelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\vec{q}$ vektörünün

$$\frac{d^3\vec{q}}{ds_q^3} - (1+\kappa_q^2)\frac{d\vec{q}}{ds_q} = 0 \tag{4.101}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi spacelike q-slant regle yüzey olsun. Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q =$ sabit olur. (4.96) ile verilen türev formüllerinden

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{q}}{ds_q} &= \vec{h} \\ \frac{d^2\vec{q}}{ds_q^2} &= \vec{q} + \kappa_q\vec{a} \\ \frac{d^3\vec{q}}{ds_q^3} &= (1+\kappa_q^2)\frac{d\vec{q}}{ds_q}\end{aligned}$$

olup son eşitlikten, (4.101) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.101) eşitliği sağlansın. (4.96) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}}{ds_q} = \vec{h}$$
$$\frac{d^2\vec{q}}{ds_q^2} = \vec{q} + \kappa_q\vec{a}$$
$$\frac{d^3\vec{q}}{ds_q^3} = (1+\kappa_q^2)\frac{d\vec{q}}{ds_q} + \kappa_q'\vec{a}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_q'\vec{a} = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_q' = 0$ olup, $\kappa_q =$ sabit elde edilir. Böylece, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.6. Minkowski 3-uzayında, S_q spacelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\vec{h}$ vektörünün

$$\frac{d^2\vec{h}}{ds_q^2} - (1+\kappa_q^2)\vec{h} = 0 \tag{4.102}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi spacelike q-slant regle yüzey olsun. Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q =$ sabit olur. (4.96) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}}{ds_q} = \vec{q} + \kappa_q\vec{a}$$
$$\frac{d^2\vec{h}}{ds_q^2} = (1+\kappa_q^2)\vec{h}$$

olup son eşitlikten, (4.102) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.102) eşitliği sağlansın. (4.96) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}}{ds_q} = \vec{q} + \kappa_q\vec{a}$$
$$\frac{d^2\vec{h}}{ds_q^2} = (1+\kappa_q^2)\vec{h} + \kappa_q'\vec{a}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_q'\vec{a} = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_q' = 0$ olup, $\kappa_q =$ sabit elde edilir. Böylece, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.7. Minkowski 3-uzayında, S_q spacelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\vec{a}$ vektörünün

$$\frac{d^3\vec{a}}{ds_q^3} - (1+\kappa_q^2)\frac{d\vec{a}}{ds_q} = 0 \tag{4.103}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi spacelike q-slant regle yüzey olsun. Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q =$ sabit olur. (4.96) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}}{ds_q} = \kappa_q \vec{h}$$
$$\frac{d^2\vec{a}}{ds_q^2} = \kappa_q \vec{q} + \kappa_q^2 \vec{a}$$
$$\frac{d^3\vec{a}}{ds_q^3} = \frac{d\vec{a}}{ds_q} + \kappa_q^2 \frac{d\vec{a}}{ds_q}$$

olup, son eşitlikten (4.103) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.103) eşitliği sağlansın. (4.96) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}}{ds_q} = \kappa_q \vec{h}$$
$$\frac{d^2\vec{a}}{ds_q^2} = \kappa_q \vec{q} + \kappa_q' \vec{h} + \kappa_q^2 \vec{a}$$
$$\frac{d^3\vec{a}}{ds_q^3} = 2\kappa_q' \vec{q} + \kappa_q'' \vec{h} + 3\kappa_q' \kappa_q \vec{a} + (1+\kappa_q^2)\frac{d\vec{a}}{ds_q}$$

bulunur. Burada, (4.103) eşitliği kullanılarak

$$2\kappa_q' \vec{q} + \kappa_q'' \vec{h} + 3\kappa_q' \kappa_q \vec{a} = 0$$

elde edilir. $\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından, son eşitlikten $\kappa_q' = 0$ olup $\kappa_q =$ sabit bulunur. Böylece, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.8. Minkowski 3-uzayında, S_q spacelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{q_h}$ vektörünün

$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} + (\kappa_h^2 - 1)\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = 0 \tag{4.104}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi spacelike h-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Teorem 4.1.8'den

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2+1)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0$$

olur. Buradan, (4.97) eşitliğinden $\kappa_h = $ sabit bulunur. Böylece, (4.98) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = \vec{h}_h$$
$$\frac{d^2\vec{q}_h}{ds_h^2} = \vec{q}_h + \kappa_h\vec{a}_h$$
$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} = \frac{d\vec{q}_h}{ds_h} - \kappa_h^2\frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten (4.104) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.104) eşitliği sağlansın. (4.98) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = \vec{h}_h$$
$$\frac{d^2\vec{q}_h}{ds_h^2} = \vec{q}_h + \kappa_h\vec{a}_h$$
$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} = \frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \kappa_h'\vec{a}_h - \kappa_h^2\frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_h'\vec{a}_h = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_h = $ sabit elde edilir. Böylece (4.97) eşitliğinden

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2+1)^{3/2}} = \text{sabit}$$

olup, Teorem 4.1.8'den S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir. ■

Sonuç 4.3.9. S_h regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{q_h}$ vektörünün $\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} + (\kappa_h^2 - 1)\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = 0$ diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

Teorem 4.3.10. Minkowski 3-uzayında, S_q spacelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{h_h}$ vektörünün

$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} + (\kappa_h^2 - 1)\vec{h}_h = 0 \tag{4.105}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi spacelike h-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Teorem 4.1.8'den

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2+1)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0$$

olur. Buradan, (4.97) eşitliğinden $\kappa_h = $ sabit bulunur. Böylece, (4.98) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_h}{ds_h} = \vec{q}_h + \kappa_h \vec{a}_h$$
$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} = \vec{h}_h - \kappa_h^2 \vec{h}_h$$

olup, son eşitlikten (4.105) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.105) eşitliği sağlansın. (4.98) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_h}{ds_h} = \vec{q}_h + \kappa_h \vec{a}_h$$
$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} = \vec{h}_h + \kappa_h' \vec{a}_h - \kappa_h^2 \vec{h}_h$$

olup, son eşitlikten $\kappa_h' \vec{a}_h = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_h = $ sabit elde edilir. Böylece (4.97) eşitliğinden

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2+1)^{3/2}} = \text{sabit}$$

olup, Teorem 4.1.8'den S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir. ■

Sonuç 4.3.11. S_h regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{h_h}$ vektörünün $\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} + (\kappa_h^2 - 1)\vec{h}_h = 0$ diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

Teorem 4.3.12. Minkowski 3-uzayında, S_q spacelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{a_h}$ vektörünün

$$\frac{d^3\vec{a}_h}{ds_h^3} + (\kappa_h^2 - 1)\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = 0 \tag{4.106}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi spacelike h-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Teorem 4.1.8'den

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2+1)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0$$

olur. Buradan, (4.97) eşitliğinden $\kappa_h = $ sabit bulunur. Böylece, (4.98) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = -\kappa_h \vec{h}_h$$
$$\frac{d^2\vec{a}_h}{ds_h^2} = -\kappa_h \vec{q}_h - \kappa_h^2 \vec{a}_h$$
$$\frac{d^3\vec{a}_h}{ds_h^3} = \frac{d\vec{a}_h}{ds_h} - \kappa_h^2 \frac{d\vec{a}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten (4.106) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.106) eşitliği sağlansın. (4.98) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = -\kappa_h \vec{h}_h$$
$$\frac{d^2\vec{a}_h}{ds_h^2} = -\kappa_h \vec{q}_h - \kappa_h' \vec{h}_h - \kappa_h^2 \vec{a}_h$$
$$\frac{d^3\vec{a}_h}{ds_h^3} = -2\kappa_h' \vec{q}_h - \kappa_h'' \vec{h}_h - 3\kappa_h' \kappa_h \vec{a}_h + \frac{d\vec{a}_h}{ds_h} - \kappa_h^2 \frac{d\vec{a}_h}{ds_h}$$

bulunur. Burada, (4.106) eşitliği kullanılarak

$$-2\kappa_h' \vec{q}_h - \kappa_h'' \vec{h}_h - 3\kappa_h' \kappa_h \vec{a}_h = 0$$

elde edilir. $\vec{q}_h, \vec{h}_h, \vec{a}_h$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından, son eşitlikten $\kappa_h' = 0$ olup $\kappa_h = $ sabit bulunur. Böylece, (4.97) eşitliğinden

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2 + 1)^{3/2}} = \text{sabit}$$

olup, Teorem 4.1.8'den S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir. ■

Sonuç 4.3.13. S_h regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{h_h}$ vektörünün $\frac{d^3\vec{a}_h}{ds_h^3} + (\kappa_h^2 - 1)\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = 0$ diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

Teorem 4.3.14. Minkowski 3-uzayında, S_q spacelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_a yüzeyinin $\vec{q_a}$ vektörünün

$$\frac{d^3\vec{q}_a}{ds_a^3} - (1 + \kappa_a^2)\frac{d\vec{q}_a}{ds_a} = 0 \tag{4.107}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi spacelike q-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q = $ sabit olur. Buradan, (4.99) eşitliğinden $\kappa_a = $ sabit bulunur. Böylece, (4.100) ile verilen

türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_a}{ds_a} = \vec{h}_a$$
$$\frac{d^2\vec{q}_a}{ds_a^2} = \vec{q}_a + \kappa_a\vec{a}_a$$
$$\frac{d^3\vec{q}_a}{ds_a^3} = \frac{d\vec{q}_a}{ds_a} + \kappa_a^2\frac{d\vec{q}_a}{ds_a}$$

olup, son eşitlikten (4.107) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.107) eşitliği sağlansın. (4.100) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_a}{ds_a} = \vec{h}_a$$
$$\frac{d^2\vec{q}_a}{ds_a^2} = \vec{q}_a + \kappa_a\vec{a}_a$$
$$\frac{d^3\vec{q}_a}{ds_a^3} = \frac{d\vec{q}_a}{ds_a} + \kappa_a'\vec{a}_a + \kappa_a^2\frac{d\vec{q}_a}{ds_a}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_a'\vec{a}_a = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_a =$ sabit elde edilir. Böylece (4.99) eşitliğinden $\kappa_q =$ sabit olup, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.15. Minkowski 3-uzayında, S_q spacelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_a yüzeyinin $\vec{h_a}$ vektörünün

$$\frac{d^2\vec{h}_a}{ds_a^2} - (1 + \kappa_a^2)\vec{h}_a = 0 \tag{4.108}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi spacelike q-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q =$ sabit olur. Buradan, (4.99) eşitliğinden $\kappa_a =$ sabit bulunur. Böylece, (4.100) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_a}{ds_a} = \vec{q}_a + \kappa_a\vec{a}_a$$
$$\frac{d^2\vec{h}_a}{ds_a^2} = \vec{h}_a + \kappa_a^2\vec{h}_a$$

olup, son eşitlikten (4.108) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.108) eşitliği sağlansın. (4.100) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_a}{ds_a} = \vec{q}_a + \kappa_a\vec{a}_a$$
$$\frac{d^2\vec{h}_a}{ds_a^2} = \vec{h}_a + \kappa_a'\vec{a}_a + \kappa_a^2\vec{h}_a$$

olup, son eşitlikten $\kappa_a'\vec{a}_a = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_a =$ sabit elde edilir. Böylece (4.99) eşitliğinden $\kappa_q =$ sabit olup, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.16. Minkowski 3-uzayında, S_q spacelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_a yüzeyinin $\vec{a_a}$ vektörünün

$$\frac{d^3\vec{a}_a}{ds_a^3} - (1+\kappa_a^2)\frac{d\vec{a}_a}{ds_a} = 0 \tag{4.109}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi spacelike q-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q =$ sabit olur. Buradan, (4.99) eşitliğinden $\kappa_a =$ sabit bulunur. Böylece, (4.100) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}_a}{ds_a} = \kappa_a\vec{h}_a$$
$$\frac{d^2\vec{q}_a}{ds_a^2} = \kappa_a\vec{q}_a + \kappa_a^2\vec{a}_a$$
$$\frac{d^3\vec{a}_a}{ds_a^3} = \frac{d\vec{a}_a}{ds_a} + \kappa_a^2\frac{d\vec{a}_a}{ds_a}$$

olup, son eşitlikten (4.109) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.109) eşitliği sağlansın. (4.100) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}_a}{ds_a} = \kappa_a\vec{h}_a$$
$$\frac{d^2\vec{a}_a}{ds_a^2} = \kappa_a\vec{q}_a + \kappa_a'\vec{h}_a + \kappa_a^2\vec{a}_a$$
$$\frac{d^3\vec{a}_a}{ds_a^3} = 2\kappa_a'\vec{q}_a + \kappa_a''\vec{h}_a + 3\kappa_a\kappa_a'\vec{a}_a + \frac{d\vec{a}_a}{ds_a} + \kappa_a^2\frac{d\vec{a}_a}{ds_a}$$

bulunur. Burada, (4.109) eşitliği kullanılarak

$$2\kappa_a'\vec{q}_a + \kappa_a''\vec{h}_a + 3\kappa_a\kappa_a'\vec{a}_a = 0$$

elde edilir. $\vec{q}_a, \vec{h}_a, \vec{a}_a$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından son eşitlikten $\kappa_a' = 0$ olup $\kappa_a =$ sabit bulunur. Böylece (4.99) eşitliğinden $\kappa_q =$ sabit olup, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

4.3.2. Anadoğruları Spacelike Olan Timelike Slant Regle Yüzeylerin Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları

Minkowski 3-uzayında anadoğruları spacelike olan timelike bir $S = S_q$ regle yüzeyini göz önüne alalım. Bu yüzeyin konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa = \kappa_q$ ve yay uzunluğu parametresi $s_1 = s_q$ olsun. Bu durumda, (2.13) denklemleri

$$\begin{bmatrix} d\vec{q}/ds_q \\ d\vec{h}/ds_q \\ d\vec{a}/ds_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_q \\ 0 & \kappa_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{h} \\ \vec{a} \end{bmatrix} \tag{4.110}$$

şekline dönüşür. Burada, $\kappa_q = \langle d\vec{a}/ds_q, \vec{h} \rangle$ şeklindedir.

Teorem 4.3.17. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde,

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise, S_q yüzeyinin $\vec{h}$ merkez normal vektörü tarafından çizilen S_h yüzeyi anadoğruları spacelike olan bir timelike regle yüzeydir ve S_q ile S_h regle yüzeylerinin konisel eğrilik fonksiyonları arasında

$$\kappa_h = \pm \frac{\kappa_q'}{(1 - \kappa_q^2)^{3/2}} \tag{4.111}$$

bağıntısı vardır. S_h yüzeyinin Frenet türev formülleri ise

$$\begin{bmatrix} d\vec{q_h}/ds_h \\ d\vec{h_h}/ds_h \\ d\vec{a_h}/ds_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_h \\ 0 & \kappa_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q_h} \\ \vec{h_h} \\ \vec{a_h} \end{bmatrix} \tag{4.112}$$

ile verilir.

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise, S_q yüzeyinin $\vec{h}$ merkez normal vektörü tarafından çizilen S_h yüzeyi spacelike bir regle yüzeydir ve S_q ile S_h regle yüzeylerinin konisel eğrilik fonksiyonları arasında

$$\kappa_h = \pm \frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2 - 1)^{3/2}} \tag{4.113}$$

bağıntısı vardır. S_h yüzeyinin Frenet türev formülleri ise

$$\begin{bmatrix} d\vec{q_h}/ds_h \\ d\vec{h_h}/ds_h \\ d\vec{a_h}/ds_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_h \\ 0 & \kappa_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q_h} \\ \vec{h_h} \\ \vec{a_h} \end{bmatrix} \tag{4.114}$$

ile verilir.

İspat: S_q regle yüzeyinin boğaz çizgisi $\vec{c}(s)$ ve boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi s olmak üzere, S_h yüzeyinin denklemi

$$\vec{r}_h(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{h}(s), \quad \|\vec{h}(s)\| = 1$$

ile verilir. S_h regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}_h, \vec{h}_h, \vec{a}_h\}$ olduğundan, bu yüzeyin anadoğrusu olan $\vec{q}_h$ vektörü

$$\vec{q}_h = \vec{h}$$

olur ve bu vektör spacelike vektördür. Bu eşitliğin s_h yay uzunluğu parametresine göre türevini alırsak, zincir kuralı ve (4.110) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = \vec{h}_h \Rightarrow \vec{h}_h &= \frac{d\vec{q}_h}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_h} \\ &= (-\vec{q} + \kappa_q\vec{a})\frac{ds_q}{ds_h} \end{aligned}$$

bulunur. $\|\vec{h}_h\| = 1$ olduğundan, son eşitlikten

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{ds_q}{ds_h} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\kappa_q^2}}$$

elde edilir. Böylece, yüzeyin $\vec{h}_h$ vektörü, S_q yüzeyinin çatı elemanları cinsinden

$$\vec{h}_h = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\kappa_q^2}}(-\vec{q} + \kappa_q\vec{a})$$

şeklinde yazılır ve spacelike vektördür. Buradan görülür ki, S_h yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike regle yüzeydir. Son olarak, $\vec{a}_h$ merkez teğet vektörü için ise

$$\vec{a}_h = \vec{q}_h \times \vec{h}_h = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\kappa_q^2}}(-\kappa_q\vec{q} + \vec{a})$$

olup, bu vektör timelike vektördür. Böylece, S_h yüzeyinin Frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} d\vec{q}_h/ds_h \\ d\vec{h}_h/ds_h \\ d\vec{a}_h/ds_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_h \\ 0 & \kappa_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_h \\ \vec{h}_h \\ \vec{a}_h \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada, $\kappa_h = \langle d\vec{a}_h/ds_h, \vec{h}_h\rangle$ olup,

$$\begin{aligned}\kappa_h &= \langle d\vec{a}_h/ds_h, \vec{h}_h\rangle \\ &= \left\langle \frac{d\vec{a}_h}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_h}, \vec{h}_h \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^2}(-\vec{q}+\kappa_q\vec{a}), \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\kappa_q^2}}(-\vec{q}+\kappa_q\vec{a}) \right\rangle \\ &= \pm\frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir.

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{ds_q}{ds_h} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\kappa_q^2 - 1}}$$

elde edilir. Böylece, yüzeyin $\vec{h}_h$ vektörü, S_q yüzeyinin çatı elemanları cinsinden

$$\vec{h}_h = \frac{\pm 1}{\sqrt{\kappa_q^2-1}}(-\vec{q}+\kappa_q\vec{a})$$

şeklinde yazılır ve timelike vektördür. Buradan görülür ki, S_h yüzeyi spacelike regle yüzeydir. Son olarak, $\vec{a}_h$ merkez teğet vektörü için ise

$$\vec{a}_h = -\vec{q}_h \times \vec{h}_h = \frac{\pm 1}{\sqrt{\kappa_q^2-1}}(\kappa_q\vec{q}-\vec{a})$$

olup, bu vektör spacelike vektördür. Böylece, S_h yüzeyinin Frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} d\vec{q}_h/ds_h \\ d\vec{h}_h/ds_h \\ d\vec{a}_h/ds_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_h \\ 0 & \kappa_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_h \\ \vec{h}_h \\ \vec{a}_h \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada, $\kappa_h = -\langle d\vec{a}_h/ds_h, \vec{h}_h\rangle$ olup,

$$\begin{aligned}\kappa_h &= -\langle d\vec{a}_h/ds_h, \vec{h}_h\rangle \\ &= -\left\langle \frac{d\vec{a}_h}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_h}, \vec{h}_h \right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^2}(-\vec{q}+\kappa_q\vec{a}), \frac{\pm 1}{\sqrt{\kappa_q^2-1}}(-\vec{q}+\kappa_q\vec{a}) \right\rangle \\ &= \pm\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^{3/2}}\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. ■

Teorem 4.3.17'den aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.3.18. S_q regle yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olmasıdır.

İspat: S_q yüzeyi h-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Teorem 4.1.8'in (ii) şıkkından

$$\begin{cases} \frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0, & -1 < \kappa_q < 1 \\ \frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0, & \kappa_q < -1 \text{ veya } \kappa_q > 1 \end{cases}$$

ve aynı zamanda, (4.111) ve (4.113) eşitliklerinden

$$\begin{cases} \kappa_h = \pm\frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}}, & -1 < \kappa_q < 1 \\ \kappa_h = \pm\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^{3/2}}, & \kappa_q < -1 \text{ veya } \kappa_q > 1 \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan, $\kappa_h =$ sabit olup, Sonuç 4.1.4'ten S_h yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

Tersine, S_h yüzeyi q-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_h =$ sabit bulunur. Böylece, (4.111) ve (4.113) eşitliklerinden

$$\begin{cases} \frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}} = \text{sabit}, & -1 < \kappa_q < 1 \\ \frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^{3/2}} = \text{sabit}, & \kappa_q < -1 \text{ veya } \kappa_q > 1 \end{cases}$$

elde edilir. Buradan, Teorem 4.1.8'in (ii) şıkkından S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.19. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q yüzeyinin $\vec{a}$ merkez teğet vektörü tarafından çizilen S_a yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzeydir ve S_q ile S_a regle yüzeylerinin konisel eğrilik fonksiyonları arasında

$$\kappa_a = \pm\frac{1}{\kappa_q} \tag{4.115}$$

bağıntısı vardır. S_a yüzeyinin Frenet türev formülleri ise

$$\begin{bmatrix} d\vec{q}_a/ds_a \\ d\vec{h}_a/ds_a \\ d\vec{a}_a/ds_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_a \\ 0 & -\kappa_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_a \\ \vec{h}_a \\ \vec{a}_a \end{bmatrix} \tag{4.116}$$

ile verilir.

İspat: S_q regle yüzeyinin boğaz çizgisi $\vec{c}(s)$ ve boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi s olmak üzere, S_a yüzeyinin denklemi

$$\vec{r}_a(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{a}(s), \quad \|\vec{a}(s)\| = 1$$

ile verilir. S_a regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}_a, \vec{h}_a, \vec{a}_a\}$ olduğundan, bu yüzeyin anadoğrusu olan $\vec{q}_a$ vektörü

$$\vec{q}_a = \vec{a}$$

olur ve bu vektör timelike vektördür. Bu eşitliğin s_a yay uzunluğu parametresine göre türevini alırsak, zincir kuralı ve (4.96) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{q}_a}{ds_a} = \vec{h}_a \Rightarrow \vec{h}_a &= \frac{d\vec{q}_a}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_a} \\ &= \kappa_q \vec{h}\frac{ds_q}{ds_a}\end{aligned}$$

bulunur. $\|\vec{h}_a\| = 1$ olduğundan, son eşitlikten

$$\frac{ds_q}{ds_a} = \pm\frac{1}{\kappa_q}$$

elde edilir. Böylece, yüzeyin $\vec{h}_a$ vektörü, S_q yüzeyinin çatı elemanları cinsinden

$$\vec{h}_a = \pm\vec{h}$$

şeklinde yazılır ve spacelike vektördür. Buradan görülür ki, S_a yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzeydir. Son olarak, $\vec{a}_a$ merkez teğet vektörü için ise

$$\vec{a}_a = -\vec{q}_a \times \vec{h}_a = \vec{a} \times \vec{h} = \mp\vec{q}$$

olup, bu vektör spacelike vektördür. Böylece, S_a yüzeyinin Frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} d\vec{q}_a/ds_a \\ d\vec{h}_a/ds_a \\ d\vec{a}_a/ds_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_a \\ 0 & -\kappa_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_a \\ \vec{h}_a \\ \vec{a}_a \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada, $\kappa_a = -\langle d\vec{a}_a/ds_a, \vec{h}_a\rangle$ olup,

$$\begin{aligned}\kappa_a &= -\langle d\vec{a}_a/ds_a, \vec{h}_a\rangle \\ &= -\left\langle \frac{d\vec{a}_a}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_a}, \vec{h}_a \right\rangle \\ &= -\left\langle \pm\frac{1}{\kappa_q}\vec{h}, \vec{h} \right\rangle \\ &= \pm\frac{1}{\kappa_q}\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. ■

Teorem 4.3.20. Minkowski 3-uzayında, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_a regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olmasıdır.

İspat: S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzey ise, Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q = $ sabit olur. Böylece (4.115) eşitliğinden $\kappa_a = \pm\dfrac{1}{\kappa_q}$ olup, buradan $\kappa_a = $ sabit bulunur. Dolayısıyla, Sonuç 4.1.4 gereğince S_a yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

Tersine, S_a yüzeyi q-slant regle yüzey olsun. Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_a = $ sabit olur. (4.115) eşitliğinden $\kappa_a = \pm\dfrac{1}{\kappa_q}$ olup, buradan $\kappa_q = $ sabit bulunur. Böylece, Sonuç 4.1.4 gereğince S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.21. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\vec{q}$ vektörünün

$$\frac{d^3\vec{q}}{ds_q^3} + (1-\kappa_q^2)\frac{d\vec{q}}{ds_q} = 0 \tag{4.117}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike bir q-slant regle yüzey olsun. Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q = $ sabit olur. (4.110) ile verilen türev formüllerinden

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{q}}{ds_q} &= \vec{h} \\
\frac{d^2\vec{q}}{ds_q^2} &= -\vec{q} + \kappa_q\vec{a} \\
\frac{d^3\vec{q}}{ds_q^3} &= -(1-\kappa_q^2)\frac{d\vec{q}}{ds_q}
\end{aligned}$$

olup son eşitlikten, (4.117) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.117) eşitliği sağlansın. (4.110) ile verilen türev formüllerinden

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{q}}{ds_q} &= \vec{h} \\
\frac{d^2\vec{q}}{ds_q^2} &= -\vec{q} + \kappa_q\vec{a} \\
\frac{d^3\vec{q}}{ds_q^3} &= -(1-\kappa_q^2)\frac{d\vec{q}}{ds_q} + \kappa_q'\vec{a}
\end{aligned}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_q'\vec{a} = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_q' = 0$ olup, $\kappa_q = $ sabit elde edilir. Böylece, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.22. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q

regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\vec{h}$ vektörünün

$$\frac{d^2\vec{h}}{ds_q^2} + (1-\kappa_q^2)\vec{h} = 0 \tag{4.118}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike bir q-slant regle yüzey olsun. Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q =$ sabit olur. (4.110) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}}{ds_q} = -\vec{q} + \kappa_q\vec{a}$$
$$\frac{d^2\vec{h}}{ds_q^2} = -(1-\kappa_q^2)\vec{h}$$

olup son eşitlikten, (4.118) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.118) eşitliği sağlansın. (4.110) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}}{ds_q} = -\vec{q} + \kappa_q\vec{a}$$
$$\frac{d^2\vec{h}}{ds_q^2} = -(1-\kappa_q^2)\vec{h} + \kappa_q'\vec{a}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_q'\vec{a} = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_q' = 0$ olup, $\kappa_q =$ sabit elde edilir. Böylece, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.23. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\vec{a}$ vektörünün

$$\frac{d^3\vec{a}}{ds_q^3} + (1-\kappa_q^2)\frac{d\vec{a}}{ds_q} = 0 \tag{4.119}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike q-slant regle yüzey olsun. Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q =$ sabit olur. (4.110) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}}{ds_q} = \kappa_q\vec{h}$$
$$\frac{d^2\vec{a}}{ds_q^2} = -\kappa_q\vec{q} + \kappa_q^2\vec{a}$$
$$\frac{d^3\vec{a}}{ds_q^3} = -\frac{d\vec{a}}{ds_q} + \kappa_q^2\frac{d\vec{a}}{ds_q}$$

olup, son eşitlikten (4.119) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.119) eşitliği sağlansın. (4.110) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}}{ds_q} = \kappa_q \vec{h}$$
$$\frac{d^2\vec{a}}{ds_q^2} = -\kappa_q \vec{q} + \kappa_q' \vec{h} + \kappa_q^2 \vec{a}$$
$$\frac{d^3\vec{a}}{ds_q^3} = -2\kappa_q' \vec{q} + (\kappa_q'' - \kappa_q)\vec{h} + 3\kappa_q' \kappa_q \vec{a} + \kappa_q^2 \frac{d\vec{a}}{ds_q}$$

bulunur. Burada, (4.119) eşitliği kullanılarak

$$-2\kappa_q' \vec{q} + \kappa_q'' \vec{h} + 3\kappa_q' \kappa_q \vec{a} = 0$$

elde edilir. $\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından, son eşitlikten $\kappa_q' = 0$ olup $\kappa_q =$ sabit bulunur. Böylece, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.24. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{q_h}$ vektörünün

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} + (1 - \kappa_h^2)\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = 0 \tag{4.120}$$

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} - (1 + \kappa_h^2)\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = 0 \tag{4.121}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike h-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Teorem 4.1.8'den

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{\kappa_q'}{(1 - \kappa_q^2)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0$$

olur. Buradan, (4.111) eşitliğinden $\kappa_h =$ sabit bulunur. Böylece, (4.112) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = \vec{h}_h$$
$$\frac{d^2\vec{q}_h}{ds_h^2} = -\vec{q}_h + \kappa_h\vec{a}_h$$
$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} = -\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \kappa_h^2\frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten (4.120) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.120) eşitliği sağlansın. (4.112) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = \vec{h}_h$$
$$\frac{d^2\vec{q}_h}{ds_h^2} = -\vec{q}_h + \kappa_h\vec{a}_h$$
$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} = -\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \kappa_h'\vec{a}_h + \kappa_h^2\frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_h'\vec{a}_h = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_h =$ sabit elde edilir. Böylece (4.111) eşitliğinden

$$\frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}} = \text{sabit}$$

olup, Teorem 4.1.8'den S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0$$

olur. Buradan, (4.113) eşitliğinden $\kappa_h =$ sabit bulunur. Böylece, (4.114) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = \vec{h}_h$$
$$\frac{d^2\vec{q}_h}{ds_h^2} = \vec{q}_h + \kappa_h\vec{a}_h$$
$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} = \frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \kappa_h^2\frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten (4.121) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.121) eşitliği sağlansın. (4.114) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = \vec{h}_h$$
$$\frac{d^2\vec{q}_h}{ds_h^2} = \vec{q}_h + \kappa_h\vec{a}_h$$
$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} = \frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \kappa_h'\vec{a}_h + \kappa_h^2\frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_h'\vec{a}_h = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_h =$ sabit elde edilir. Böylece (4.113) eşitliğinden

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^{3/2}} = \text{sabit}$$

olup, Teorem 4.1.8'den S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir. ■

Sonuç 4.3.25. Minkowski 3-uzayında, S_h regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{q_h}$ vektörünün

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} + (1-\kappa_h^2)\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = 0$$

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} - (1+\kappa_h^2)\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = 0$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

Teorem 4.3.26. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{h_h}$ vektörünün

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} + (1-\kappa_h^2)\vec{h}_h = 0 \tag{4.122}$$

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} - (1+\kappa_h^2)\vec{h}_h = 0 \tag{4.123}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike h-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Teorem 4.1.8'den

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0$$

olur. Buradan, (4.111) eşitliğinden $\kappa_h = $ sabit bulunur. Böylece, (4.112) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_h}{ds_h} = -\vec{q}_h + \kappa_h \vec{a}_h$$
$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} = -\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \kappa_h^2 \frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten (4.122) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.122) eşitliği sağlansın. (4.112) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_h}{ds_h} = -\vec{q}_h + \kappa_h \vec{a}_h$$
$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} = -\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \kappa_h' \vec{a}_h + \kappa_h^2 \frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_h' \vec{a}_h = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_h = $ sabit elde edilir. Böylece (4.111) eşitliğinden

$$\frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}} = \text{sabit}$$

olup, Teorem 4.1.8'den S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0$$

olur. Buradan, (4.113) eşitliğinden $\kappa_h = $ sabit bulunur. Böylece, (4.114) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_h}{ds_h} = \vec{q}_h + \kappa_h \vec{a}_h$$
$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} = \frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \kappa_h^2 \frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten (4.123) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.123) eşitliği sağlansın. (4.114) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_h}{ds_h} = \vec{q}_h + \kappa_h \vec{a}_h$$
$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} = \frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \kappa_h' \vec{a}_h + \kappa_h^2 \frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_h' \vec{a}_h = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_h =$ sabit elde edilir. Böylece (4.113) eşitliğinden

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2 - 1)^{3/2}} = \text{sabit}$$

olup, Teorem 4.1.8'den S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir. ■

Sonuç 4.3.27. S_h regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{h_h}$ vektörünün

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} + (1 - \kappa_h^2)\vec{h}_h = 0$$

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} - (1 + \kappa_h^2)\vec{h}_h = 0$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

Teorem 4.3.28. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{a_h}$ vektörünün

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{d^3\vec{a}_h}{ds_h^3} + (1 - \kappa_h^2)\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = 0 \tag{4.124}$$

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{d^3\vec{a}_h}{ds_h^3} - (1 + \kappa_h^2)\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = 0 \tag{4.125}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike h-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Teorem 4.1.8'den

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0$$

olur. Buradan, (4.111) eşitliğinden $\kappa_h = $ sabit bulunur. Böylece, (4.112) ile verilen türev formüllerinden

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} &= \kappa_h \vec{h}_h \\
\frac{d^2\vec{a}_h}{ds_h^2} &= -\kappa_h \vec{q}_h + \kappa_h^2 \vec{a}_h \\
\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} &= -\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} + \kappa_h^2 \frac{d\vec{a}_h}{ds_h}
\end{aligned}$$

olup, son eşitlikten (4.124) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.124) eşitliği sağlansın. (4.112) ile verilen türev formüllerinden

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} &= \kappa_h \vec{h}_h \\
\frac{d^2\vec{q}_h}{ds_h^2} &= -\kappa_h \vec{q}_h + \kappa_h' \vec{h}_h + \kappa_h^2 \vec{a}_h \\
\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} &= -2\kappa_h' \vec{q}_h + \kappa_h'' \vec{h}_h + 3\kappa_h' \kappa_h \vec{a}_h + (\kappa_h^2 - 1)\frac{d\vec{a}_h}{ds_h}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada, (4.124) eşitliği kullanılarak

$$-2\kappa_h' \vec{q}_h + \kappa_h'' \vec{h}_h + 3\kappa_h' \kappa_h \vec{a}_h = 0$$

elde edilir. $\vec{q}_h, \vec{h}_h, \vec{a}_h$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından, son eşitlikten $\kappa_h' = 0$ olup $\kappa_h = $ sabit bulunur. Böylece, (4.111) eşitliğinden

$$\frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}} = \text{sabit}$$

olup, Teorem 4.1.8'den S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0$$

olur. Buradan, (4.113) eşitliğinden $\kappa_h = $ sabit bulunur. Böylece, (4.114) ile verilen türev formüllerinden

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} &= \kappa_h \vec{h}_h \\
\frac{d^2\vec{a}_h}{ds_h^2} &= \kappa_h \vec{q}_h + \kappa_h^2 \vec{a}_h \\
\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} &= \frac{d\vec{a}_h}{ds_h} + \kappa_h^2 \frac{d\vec{a}_h}{ds_h}
\end{aligned}$$

olup, son eşitlikten (4.121) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.121) eşitliği sağlansın. (4.114) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = \kappa_h \vec{h}_h$$
$$\frac{d^2\vec{q}_h}{ds_h^2} = \kappa_h \vec{q}_h + \kappa_h' \vec{h}_h + \kappa_h^2 \vec{a}_h$$
$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} = 2\kappa_h' \vec{q}_h + \kappa_h'' \vec{h}_h + 3\kappa_h' \kappa_h \vec{a}_h + (\kappa_h^2 + 1)\frac{d\vec{a}_h}{ds_h}$$

bulunur. Burada, (4.124) eşitliği kullanılarak

$$2\kappa_h' \vec{q}_h + \kappa_h'' \vec{h}_h + 3\kappa_h' \kappa_h \vec{a}_h = 0$$

elde edilir. $\vec{q}_h, \vec{h}_h, \vec{a}_h$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından, son eşitlikten $\kappa_h' = 0$ olup $\kappa_h =$ sabit bulunur. Böylece (4.113) eşitliğinden

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2 - 1)^{3/2}} = \text{sabit}$$

olup, Teorem 4.1.8'den S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir. ■

Sonuç 4.3.29. S_h regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{a_h}$ vektörünün

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{d^3\vec{a}_h}{ds_h^3} + (1 - \kappa_h^2)\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = 0$$

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{d^3\vec{a}_h}{ds_h^3} - (1 + \kappa_h^2)\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = 0$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

Teorem 4.3.30. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_a yüzeyinin $\vec{q_a}$ vektörünün

$$\frac{d^3\vec{q}_a}{ds_a^3} + (\kappa_a^2 - 1)\frac{d\vec{q}_a}{ds_a} = 0 \tag{4.126}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike q-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q =$ sabit olur. Buradan, (4.115) eşitliğinden $\kappa_a =$ sabit bulunur.

Böylece, (4.116) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_a}{ds_a} = \vec{h}_a$$
$$\frac{d^2\vec{q}_a}{ds_a^2} = \vec{q}_a + \kappa_a\vec{a}_a$$
$$\frac{d^3\vec{q}_a}{ds_a^3} = \frac{d\vec{q}_a}{ds_a} - \kappa_a^2\frac{d\vec{q}_a}{ds_a}$$

olup, son eşitlikten (4.126) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.126) eşitliği sağlansın. (4.116) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_a}{ds_a} = \vec{h}_a$$
$$\frac{d^2\vec{q}_a}{ds_a^2} = \vec{q}_a + \kappa_a\vec{a}_a$$
$$\frac{d^3\vec{q}_a}{ds_a^3} = \frac{d\vec{q}_a}{ds_a} + \kappa_a'\vec{a}_a - \kappa_a^2\frac{d\vec{q}_a}{ds_a}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_a'\vec{a}_a = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_a =$ sabit elde edilir. Böylece (4.115) eşitliğinden $\kappa_q =$ sabit olup, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.31. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_a yüzeyinin $\vec{q_a}$ vektörünün

$$\frac{d^2\vec{h}_a}{ds_a^3} + (\kappa_a^2 - 1)\vec{h}_a = 0 \tag{4.127}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike q-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q =$ sabit olur. Buradan, (4.115) eşitliğinden $\kappa_a =$ sabit bulunur. Böylece, (4.116) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_a}{ds_a} = \vec{q}_a + \kappa_a\vec{a}_a$$
$$\frac{d^2\vec{h}_a}{ds_a^2} = \vec{h}_a - \kappa_a^2\vec{h}_a$$

olup, son eşitlikten (4.127) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.127) eşitliği sağlansın. (4.116) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_a}{ds_a} = \vec{q}_a + \kappa_a \vec{a}_a$$
$$\frac{d^2\vec{h}_a}{ds_a^2} = \vec{h}_a - \kappa_a^2 \vec{h}_a + \kappa_a' \vec{a}_a$$

olup, son eşitlikten $\kappa_a' \vec{a}_a = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_a =$ sabit elde edilir. Böylece (4.115) eşitliğinden $\kappa_q =$ sabit olup, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.32. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_a yüzeyinin $\vec{a_a}$ vektörünün

$$\frac{d^3\vec{a}_a}{ds_a^3} + (\kappa_a^2 - 1)\frac{d\vec{a}_a}{ds_a} = 0 \tag{4.128}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike q-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q =$ sabit olur. Buradan, (4.115) eşitliğinden $\kappa_a =$ sabit bulunur. Böylece, (4.116) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}_a}{ds_a} = -\kappa_a \vec{h}_a$$
$$\frac{d^2\vec{q}_a}{ds_a^2} = -\kappa_a \vec{q}_a - \kappa_a^2 \vec{a}_a$$
$$\frac{d^3\vec{a}_a}{ds_a^3} = \frac{d\vec{a}_a}{ds_a} - \kappa_a^2 \frac{d\vec{a}_a}{ds_a}$$

olup, son eşitlikten (4.128) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.128) eşitliği sağlansın. (4.116) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}_a}{ds_a} = -\kappa_a \vec{h}_a$$
$$\frac{d^2\vec{a}_a}{ds_a^2} = -\kappa_a \vec{q}_a - \kappa_a' \vec{h}_a - \kappa_a^2 \vec{a}_a$$
$$\frac{d^3\vec{a}_a}{ds_a^3} = -2\kappa_a' \vec{q}_a - \kappa_a'' \vec{h}_a - 3\kappa_a \kappa_a' \vec{a}_a + \frac{d\vec{a}_a}{ds_a} - \kappa_a^2 \frac{d\vec{a}_a}{ds_a}$$

bulunur. Burada, (4.128) eşitliği kullanılarak

$$-2\kappa_a' \vec{q}_a - \kappa_a'' \vec{h}_a - 3\kappa_a \kappa_a' \vec{a}_a = 0$$

elde edilir. $\vec{q}_a, \vec{h}_a, \vec{a}_a$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından son eşitlikten $\kappa_a' = 0$ olup $\kappa_a =$ sabit bulunur. Böylece (4.115) eşitliğinden $\kappa_q =$ sabit olup, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

4.3.3. Anadoğruları Timelike Olan Timelike Slant Regle Yüzeylerin Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları

Minkowski 3-uzayında anadoğruları timelike olan timelike bir $S = S_q$ regle yüzeyini göz önüne alalım. Bu yüzeyin konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa = \kappa_q$ ve yay uzunluğu parametresi $s_1 = s_q$ olsun. Bu durumda, (2.15) denklemleri

$$\begin{bmatrix} d\vec{q}/ds_q \\ d\vec{h}/ds_q \\ d\vec{a}/ds_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_q \\ 0 & -\kappa_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{h} \\ \vec{a} \end{bmatrix} \tag{4.129}$$

şekline dönüşür. Burada, $\kappa_q = -\langle d\vec{a}/ds_q, \vec{h} \rangle$ şeklindedir.

Teorem 4.3.33. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde,

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise, S_q yüzeyinin $\vec{h}$ merkez normal vektörü tarafından çizilen S_h yüzeyi spacelike regle yüzeydir ve S_q ile S_h regle yüzeylerinin konisel eğrilik fonksiyonları arasında

$$\kappa_h = \mp \frac{\kappa_q'}{(1 - \kappa_q^2)^{3/2}} \tag{4.130}$$

bağıntısı vardır. S_h yüzeyinin Frenet türev formülleri ise

$$\begin{bmatrix} d\vec{q_h}/ds_h \\ d\vec{h_h}/ds_h \\ d\vec{a_h}/ds_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_h \\ 0 & \kappa_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q_h} \\ \vec{h_h} \\ \vec{a_h} \end{bmatrix} \tag{4.131}$$

ile verilir.

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise, S_q yüzeyinin $\vec{h}$ merkez normal vektörü tarafından çizilen S_h yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike regle yüzeydir ve S_q ile S_h regle yüzeylerinin konisel eğrilik fonksiyonları arasında

$$\kappa_h = \mp \frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2 - 1)^{3/2}} \tag{4.132}$$

bağıntısı vardır. S_h yüzeyinin Frenet türev formülleri ise

$$\begin{bmatrix} d\vec{q_h}/ds_h \\ d\vec{h_h}/ds_h \\ d\vec{a_h}/ds_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_h \\ 0 & \kappa_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q_h} \\ \vec{h_h} \\ \vec{a_h} \end{bmatrix} \tag{4.133}$$

ile verilir.

İspat: S_q regle yüzeyinin boğaz çizgisi $\vec{c}(s)$ ve boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi s olmak üzere, S_h yüzeyinin denklemi

$$\vec{r}_h(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{h}(s), \quad \|\vec{h}(s)\| = 1$$

ile verilir. S_h regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}_h, \vec{h}_h, \vec{a}_h\}$ olduğundan, bu yüzeyin anadoğrusu olan $\vec{q}_h$ vektörü

$$\vec{q}_h = \vec{h}$$

olur ve bu vektör spacelike vektördür. Bu eşitliğin s_h yay uzunluğu parametresine göre türevini alırsak, zincir kuralı ve (4.129) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = \vec{h}_h \Rightarrow \vec{h}_h &= \frac{d\vec{q}_h}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_h} \\ &= (\vec{q} + \kappa_q\vec{a})\frac{ds_q}{ds_h} \end{aligned}$$

bulunur. $\|\vec{h}_h\| = 1$ olduğundan, son eşitlikten

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{ds_q}{ds_h} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\kappa_q^2}}$$

elde edilir. Böylece, yüzeyin $\vec{h}_h$ vektörü, S_q yüzeyinin çatı elemanları cinsinden

$$\vec{h}_h = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\kappa_q^2}}(\vec{q} + \kappa_q\vec{a})$$

şeklinde yazılır ve timelike vektördür. Buradan görülür ki, S_h yüzeyi spacelike regle yüzeydir. Son olarak, $\vec{a}_h$ merkez teğet vektörü için ise

$$\vec{a}_h = -\vec{q}_h \times \vec{h}_h = \frac{\mp 1}{\sqrt{1-\kappa_q^2}}(\kappa_q\vec{q} + \vec{a})$$

olup, bu vektör spacelike vektördür. Böylece, S_h yüzeyinin Frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} d\vec{q}_h/ds_h \\ d\vec{h}_h/ds_h \\ d\vec{a}_h/ds_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_h \\ 0 & \kappa_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_h \\ \vec{h}_h \\ \vec{a}_h \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada, $\kappa_h = -\langle d\vec{a}_h/ds_h, \vec{h}_h\rangle$ olup,

$$\begin{aligned}\kappa_h &= -\langle d\vec{a}_h/ds_h, \vec{h}_h\rangle \\ &= -\left\langle \frac{d\vec{a}_h}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_h}, \vec{h}_h \right\rangle \\ &= -\left\langle -\frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^2}(\vec{q}+\kappa_q\vec{a}), \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\kappa_q^2}}(\vec{q}+\kappa_q\vec{a}) \right\rangle \\ &= \mp\frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir.

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{ds_q}{ds_h} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\kappa_q^2 - 1}}$$

elde edilir. Böylece, yüzeyin $\vec{h}_h$ vektörü, S_q yüzeyinin çatı elemanları cinsinden

$$\vec{h}_h = \frac{\pm 1}{\sqrt{\kappa_q^2 - 1}}(\vec{q}+\kappa_q\vec{a})$$

şeklinde yazılır ve spacelike vektördür. Buradan görülür ki, S_h yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike regle yüzeydir. Son olarak, $\vec{a}_h$ merkez teğet vektörü için ise

$$\vec{a}_h = \vec{q}_h \times \vec{h}_h = \frac{\pm 1}{\sqrt{\kappa_q^2 - 1}}(\kappa_q\vec{q}+\vec{a})$$

olup, bu vektör timelike vektördür. Böylece, S_h yüzeyinin Frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} d\vec{q}_h/ds_h \\ d\vec{h}_h/ds_h \\ d\vec{a}_h/ds_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_h \\ 0 & \kappa_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_h \\ \vec{h}_h \\ \vec{a}_h \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada, $\kappa_h = \langle d\vec{a}_h/ds_h, \vec{h}_h\rangle$ olup,

$$\begin{aligned}\kappa_h &= \langle d\vec{a}_h/ds_h, \vec{h}_h\rangle \\ &= \left\langle \frac{d\vec{a}_h}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_h}, \vec{h}_h \right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^2}(\vec{q}+\kappa_q\vec{a}), \frac{\pm 1}{\sqrt{\kappa_q^2-1}}(\vec{q}+\kappa_q\vec{a}) \right\rangle \\ &= \mp\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^{3/2}}\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. ■

Teorem 4.3.33'ten aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.3.34. S_q regle yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olmasıdır.

İspat: S_q yüzeyi h-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Teorem 4.1.8'in (iii) şıkkından

$$\begin{cases} \frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0, & -1 < \kappa_q < 1 \\ \frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0, & \kappa_q < -1 \text{ veya } \kappa_q > 1 \end{cases}$$

ve aynı zamanda, (4.130) ve (4.132) eşitliklerinden

$$\begin{cases} \kappa_h = \mp\frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}}, & -1 < \kappa_q < 1 \\ \kappa_h = \mp\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^{3/2}}, & \kappa_q < -1 \text{ veya } \kappa_q > 1 \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan, $\kappa_h =$ sabit olup, Sonuç 4.1.4'ten S_h yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

Tersine, S_h yüzeyi q-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_h =$ sabit bulunur. Böylece, (4.130) ve (4.132) eşitliklerinden

$$\begin{cases} \frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}} = \text{sabit}, & -1 < \kappa_q < 1 \\ \frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^{3/2}} = \text{sabit}, & \kappa_q < -1 \text{ veya } \kappa_q > 1 \end{cases}$$

elde edilir. Buradan, Teorem 4.1.8'in (iii) şıkkından S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.35. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q yüzeyinin $\vec{a}$ merkez teğet vektörü tarafından çizilen S_a yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzeydir ve S_q ile S_a regle yüzeylerinin konisel eğrilik fonksiyonları arasında

$$\kappa_a = \mp\frac{1}{\kappa_q} \tag{4.134}$$

bağıntısı vardır. S_a yüzeyinin Frenet türev formülleri ise

$$\begin{bmatrix} d\vec{q}_a/ds_a \\ d\vec{h}_a/ds_a \\ d\vec{a}_a/ds_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_a \\ 0 & \kappa_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_a \\ \vec{h}_a \\ \vec{a}_a \end{bmatrix} \tag{4.135}$$

ile verilir.

İspat: S_q regle yüzeyinin boğaz çizgisi $\vec{c}(s)$ ve boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi s olmak üzere, S_a yüzeyinin denklemi

$$\vec{r}_a(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{a}(s), \quad \|\vec{a}(s)\| = 1$$

ile verilir. S_a regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}_a, \vec{h}_a, \vec{a}_a\}$ olduğundan, bu yüzeyin anadoğrusu olan $\vec{q}_a$ vektörü

$$\vec{q}_a = \vec{a}$$

olur ve bu vektör spacelike vektördür. Bu eşitliğin s_a yay uzunluğu parametresine göre türevini alırsak, zincir kuralı ve (4.96) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{q}_a}{ds_a} = \vec{h}_a \Rightarrow \vec{h}_a &= \frac{d\vec{q}_a}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_a} \\ &= -\kappa_q \vec{h}\frac{ds_q}{ds_a}\end{aligned}$$

bulunur. $\|\vec{h}_a\| = 1$ olduğundan, son eşitlikten

$$\frac{ds_q}{ds_a} = \pm\frac{1}{\kappa_q}$$

elde edilir. Böylece, yüzeyin $\vec{h}_a$ vektörü, S_q yüzeyinin çatı elemanları cinsinden

$$\vec{h}_a = \mp\vec{h}$$

şeklinde yazılır ve spacelike vektördür. Buradan görülür ki, S_a yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzeydir. Son olarak, $\vec{a}_a$ merkez teğet vektörü için ise

$$\vec{a}_a = \vec{q}_a \times \vec{h}_a = \mp\vec{a} \times \vec{h} = \pm\vec{q}$$

olup, bu vektör timelike vektördür. Böylece, S_a yüzeyinin Frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} d\vec{q}_a/ds_a \\ d\vec{h}_a/ds_a \\ d\vec{a}_a/ds_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_a \\ 0 & \kappa_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_a \\ \vec{h}_a \\ \vec{a}_a \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada, $\kappa_a = \langle d\vec{a}_a/ds_a, \vec{h}_a\rangle$ olup,

$$\begin{aligned}\kappa_a &= \langle d\vec{a}_a/ds_a, \vec{h}_a\rangle \\ &= \left\langle \frac{d\vec{a}_a}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_a}, \vec{h}_a \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\kappa_q}\vec{h}, \mp\vec{h} \right\rangle \\ &= \mp\frac{1}{\kappa_q}\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. ■

Teorem 4.3.36. S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_a regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olmasıdır.

İspat: S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzey ise, Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q = $ sabit olur. Böylece (4.134) eşitliğinden $\kappa_a = \mp\dfrac{1}{\kappa_q}$ olup, buradan $\kappa_a = $ sabit bulunur. Dolayısıyla, Sonuç 4.1.4 gereğince S_a yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

Tersine, S_a yüzeyi q-slant regle yüzey olsun. Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_a = $ sabit olur. (4.134) eşitliğinden $\kappa_a = \mp\dfrac{1}{\kappa_q}$ olup, buradan $\kappa_q = $ sabit bulunur. Böylece, Sonuç 4.1.4 gereğince S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.37. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\vec{q}$ vektörünün

$$\frac{d^3\vec{q}}{ds_q^3} + (\kappa_q^2 - 1)\frac{d\vec{q}}{ds_q} = 0 \tag{4.136}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike bir q-slant regle yüzey olsun. Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q = $ sabit olur. (4.129) ile verilen türev formüllerinden

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{q}}{ds_q} &= \vec{h} \\
\frac{d^2\vec{q}}{ds_q^2} &= \vec{q} + \kappa_q\vec{a} \\
\frac{d^3\vec{q}}{ds_q^3} &= (1 - \kappa_q^2)\frac{d\vec{q}}{ds_q}
\end{aligned}$$

olup son eşitlikten, (4.136) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.136) eşitliği sağlansın. (4.129) ile verilen türev formüllerinden

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{q}}{ds_q} &= \vec{h} \\
\frac{d^2\vec{q}}{ds_q^2} &= \vec{q} + \kappa_q\vec{a} \\
\frac{d^3\vec{q}}{ds_q^3} &= (1 - \kappa_q^2)\frac{d\vec{q}}{ds_q} + \kappa_q'\vec{a}
\end{aligned}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_q'\vec{a} = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_q' = 0$ olup, $\kappa_q = $ sabit elde edilir. Böylece, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.38. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q

regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\vec{h}$ vektörünün

$$\frac{d^2\vec{h}}{ds_q^2} + (\kappa_q^2 - 1)\vec{h} = 0 \tag{4.137}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike bir q-slant regle yüzey olsun. Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q =$ sabit olur. (4.129) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}}{ds_q} = \vec{q} + \kappa_q\vec{a}$$
$$\frac{d^2\vec{h}}{ds_q^2} = (1 - \kappa_q^2)\vec{h}$$

olup son eşitlikten, (4.137) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.137) eşitliği sağlansın. (4.129) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}}{ds_q} = \vec{q} + \kappa_q\vec{a}$$
$$\frac{d^2\vec{h}}{ds_q^2} = (1 - \kappa_q^2)\vec{h} + \kappa_q'\vec{a}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_q'\vec{a} = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_q' = 0$ olup, $\kappa_q =$ sabit elde edilir. Böylece, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.39. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\vec{a}$ vektörünün

$$\frac{d^3\vec{a}}{ds_q^3} + (\kappa_q^2 - 1)\frac{d\vec{a}}{ds_q} = 0 \tag{4.138}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike q-slant regle yüzey olsun. Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q =$ sabit olur. (4.110) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}}{ds_q} = -\kappa_q\vec{h}$$
$$\frac{d^2\vec{a}}{ds_q^2} = -\kappa_q\vec{q} - \kappa_q^2\vec{a}$$
$$\frac{d^3\vec{a}}{ds_q^3} = \frac{d\vec{a}}{ds_q} - \kappa_q^2\frac{d\vec{a}}{ds_q}$$

olu, son eşitlikten (4.138) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.138) eşitliği sağlansın. (4.129) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}}{ds_q} = -\kappa_q \vec{h}$$
$$\frac{d^2\vec{a}}{ds_q^2} = -\kappa_q \vec{q} - \kappa_q' \vec{h} - \kappa_q^2 \vec{a}$$
$$\frac{d^3\vec{a}}{ds_q^3} = -2\kappa_q' \vec{q} - (\kappa_q'' + \kappa_q)\vec{h} - 3\kappa_q' \kappa_q \vec{a} - \kappa_q^2 \frac{d\vec{a}}{ds_q}$$

bulunur. Burada, (4.138) eşitliği kullanılarak

$$-2\kappa_q' \vec{q} - \kappa_q'' \vec{h} - 3\kappa_q' \kappa_q \vec{a} = 0$$

elde edilir. $\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından, son eşitlikten $\kappa_q' = 0$ olup $\kappa_q =$ sabit bulunur. Böylece, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.40. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{q_h}$ vektörünün

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} - (1 + \kappa_h^2)\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = 0 \tag{4.139}$$

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} + (1 - \kappa_h^2)\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = 0 \tag{4.140}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike h-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Teorem 4.1.8'den

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{\kappa_q'}{(1 - \kappa_q^2)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0$$

olur. Buradan, (4.130) eşitliğinden $\kappa_h =$ sabit bulunur. Böylece, (4.131) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = \vec{h}_h$$
$$\frac{d^2\vec{q}_h}{ds_h^2} = \vec{q}_h + \kappa_h\vec{a}_h$$
$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} = \frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \kappa_h^2\frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten (4.139) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.139) eşitliği sağlansın. (4.131) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = \vec{h}_h$$
$$\frac{d^2\vec{q}_h}{ds_h^2} = \vec{q}_h + \kappa_h\vec{a}_h$$
$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} = \frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \kappa_h'\vec{a}_h + \kappa_h^2\frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_h'\vec{a}_h = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_h =$ sabit elde edilir. Böylece (4.111) eşitliğinden

$$\frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}} = \text{sabit}$$

olup, Teorem 4.1.8'den S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0$$

olur. Buradan, (4.132) eşitliğinden $\kappa_h =$ sabit bulunur. Böylece, (4.133) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = \vec{h}_h$$
$$\frac{d^2\vec{q}_h}{ds_h^2} = -\vec{q}_h + \kappa_h\vec{a}_h$$
$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} = -\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \kappa_h^2\frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten (4.140) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.140) eşitliği sağlansın. (4.133) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = \vec{h}_h$$
$$\frac{d^2\vec{q}_h}{ds_h^2} = -\vec{q}_h + \kappa_h\vec{a}_h$$
$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} = -\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \kappa_h'\vec{a}_h + \kappa_h^2\frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_h'\vec{a}_h = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_h =$ sabit elde edilir. Böylece (4.132) eşitliğinden

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^{3/2}} = \text{sabit}$$

olup, Teorem 4.1.8'den S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir. ■

Sonuç 4.3.41. S_h regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{q_h}$ vektörünün

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} - (1+\kappa_h^2)\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = 0$$

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} + (1-\kappa_h^2)\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = 0$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

Teorem 4.3.42. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{h_h}$ vektörünün

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} - (1+\kappa_h^2)\vec{h}_h = 0 \tag{4.141}$$

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} + (1-\kappa_h^2)\vec{h}_h = 0 \tag{4.142}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike h-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Teorem 4.1.8'den

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0$$

olur. Buradan, (4.130) eşitliğinden $\kappa_h = $ sabit bulunur. Böylece, (4.131) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_h}{ds_h} = \vec{q}_h + \kappa_h \vec{a}_h$$
$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} = \frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \kappa_h^2 \frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten (4.141) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.141) eşitliği sağlansın. (4.131) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_h}{ds_h} = \vec{q}_h + \kappa_h \vec{a}_h$$
$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} = \frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \kappa_h' \vec{a}_h + \kappa_h^2 \frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_h' \vec{a}_h = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_h = $ sabit elde edilir. Böylece (4.130) eşitliğinden

$$\frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}} = \text{sabit}$$

olup, Teorem 4.1.8'den S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0$$

olur. Buradan, (4.132) eşitliğinden $\kappa_h = $ sabit bulunur. Böylece, (4.133) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_h}{ds_h} = -\vec{q}_h + \kappa_h \vec{a}_h$$
$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} = -\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \kappa_h^2 \frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten (4.142) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.142) eşitliği sağlansın. (4.133) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_h}{ds_h} = -\vec{q}_h + \kappa_h \vec{a}_h$$
$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} = -\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \kappa_h' \vec{a}_h + \kappa_h^2 \frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_h' \vec{a}_h = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_h =$ sabit elde edilir. Böylece (4.132) eşitliğinden

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2 - 1)^{3/2}} = \text{sabit}$$

olup, Teorem 4.1.8'den S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir. ■

Sonuç 4.3.43. S_h regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{h_h}$ vektörünün

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} - (1 + \kappa_h^2)\vec{h}_h = 0$$

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} + (1 - \kappa_h^2)\vec{h}_h = 0$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

Teorem 4.3.44. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{a_h}$ vektörünün

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{d^3\vec{a}_h}{ds_h^3} - (1 + \kappa_h^2)\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = 0 \tag{4.143}$$

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{d^3\vec{a}_h}{ds_h^3} + (1 - \kappa_h^2)\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = 0 \tag{4.144}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike h-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Teorem 4.1.8'den

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0$$

olur. Buradan, (4.130) eşitliğinden $\kappa_h = $ sabit bulunur. Böylece, (4.131) ile verilen türev formüllerinden

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} &= \kappa_h \vec{h}_h \\
\frac{d^2\vec{a}_h}{ds_h^2} &= \kappa_h \vec{q}_h + \kappa_h^2 \vec{a}_h \\
\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} &= \frac{d\vec{a}_h}{ds_h} + \kappa_h^2 \frac{d\vec{a}_h}{ds_h}
\end{aligned}$$

olup, son eşitlikten (4.143) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.143) eşitliği sağlansın. (4.131) ile verilen türev formüllerinden

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} &= \kappa_h \vec{h}_h \\
\frac{d^2\vec{q}_h}{ds_h^2} &= \kappa_h \vec{q}_h + \kappa_h' \vec{h}_h + \kappa_h^2 \vec{a}_h \\
\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} &= 2\kappa_h' \vec{q}_h + \kappa_h'' \vec{h}_h + 3\kappa_h' \kappa_h \vec{a}_h + (\kappa_h^2 + 1)\frac{d\vec{a}_h}{ds_h}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada, (4.143) eşitliği kullanılarak

$$2\kappa_h' \vec{q}_h + \kappa_h'' \vec{h}_h + 3\kappa_h' \kappa_h \vec{a}_h = 0$$

elde edilir. $\vec{q}_h, \vec{h}_h, \vec{a}_h$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından, son eşitlikten $\kappa_h' = 0$ olup $\kappa_h = $ sabit bulunur. Böylece, (4.130) eşitliğinden

$$\frac{\kappa_q'}{(1-\kappa_q^2)^{3/2}} = \text{sabit}$$

olup, Teorem 4.1.8'den S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2-1)^{3/2}} = \text{sabit} \neq 0$$

olur. Buradan, (4.132) eşitliğinden $\kappa_h = $ sabit bulunur. Böylece, (4.133) ile verilen türev formüllerinden

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} &= \kappa_h \vec{h}_h \\
\frac{d^2\vec{a}_h}{ds_h^2} &= -\kappa_h \vec{q}_h + \kappa_h^2 \vec{a}_h \\
\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} &= -\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} + \kappa_h^2 \frac{d\vec{a}_h}{ds_h}
\end{aligned}$$

olup, son eşitlikten (4.140) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.140) eşitliği sağlansın. (4.133) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = \kappa_h \vec{h}_h$$
$$\frac{d^2\vec{q}_h}{ds_h^2} = -\kappa_h \vec{q}_h + \kappa_h' \vec{h}_h + \kappa_h^2 \vec{a}_h$$
$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} = -2\kappa_h' \vec{q}_h + \kappa_h'' \vec{h}_h + 3\kappa_h' \kappa_h \vec{a}_h + (\kappa_h^2 - 1)\frac{d\vec{a}_h}{ds_h}$$

bulunur. Burada, (4.143) eşitliği kullanılarak

$$-2\kappa_h' \vec{q}_h + \kappa_h'' \vec{h}_h + 3\kappa_h' \kappa_h \vec{a}_h = 0$$

elde edilir. $\vec{q}_h, \vec{h}_h, \vec{a}_h$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından, son eşitlikten $\kappa_h' = 0$ olup $\kappa_h =$ sabit bulunur. Böylece (4.132) eşitliğinden

$$\frac{\kappa_q'}{(\kappa_q^2 - 1)^{3/2}} = \text{sabit}$$

olup, Teorem 4.1.8'den S_q yüzeyi h-slant regle yüzeydir. ■

Sonuç 4.3.45. S_h regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h yüzeyinin $\vec{a_h}$ vektörünün

(i) $-1 < \kappa_q < 1$ ise,

$$\frac{d^3\vec{a}_h}{ds_h^3} - (1 + \kappa_h^2)\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = 0$$

(ii) $\kappa_q < -1$ veya $\kappa_q > 1$ ise,

$$\frac{d^3\vec{a}_h}{ds_h^3} + (1 - \kappa_h^2)\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = 0$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

Teorem 4.3.46. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_a yüzeyinin $\vec{q_a}$ vektörünün

$$\frac{d^3\vec{q}_a}{ds_a^3} + (1 - \kappa_a^2)\frac{d\vec{q}_a}{ds_a} = 0 \tag{4.145}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike q-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q =$ sabit olur. Buradan, (4.134) eşitliğinden $\kappa_a =$ sabit bulunur.

Böylece, (4.135) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_a}{ds_a} = \vec{h}_a$$
$$\frac{d^2\vec{q}_a}{ds_a^2} = -\vec{q}_a + \kappa_a\vec{a}_a$$
$$\frac{d^3\vec{q}_a}{ds_a^3} = -\frac{d\vec{q}_a}{ds_a} + \kappa_a^2\frac{d\vec{q}_a}{ds_a}$$

olup, son eşitlikten (4.145) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.145) eşitliği sağlansın. (4.135) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_a}{ds_a} = \vec{h}_a$$
$$\frac{d^2\vec{q}_a}{ds_a^2} = -\vec{q}_a + \kappa_a\vec{a}_a$$
$$\frac{d^3\vec{q}_a}{ds_a^3} = -\frac{d\vec{q}_a}{ds_a} + \kappa_a'\vec{a}_a + \kappa_a^2\frac{d\vec{q}_a}{ds_a}$$

olup, son eşitlikten $\kappa_a'\vec{a}_a = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_a =$ sabit elde edilir. Böylece (4.134) eşitliğinden $\kappa_q =$ sabit olup, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.47. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_a yüzeyinin $\vec{q_a}$ vektörünün

$$\frac{d^2\vec{h}_a}{ds_a^3} + (1 - \kappa_a^2)\vec{h}_a = 0 \tag{4.146}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike q-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q =$ sabit olur. Buradan, (4.134) eşitliğinden $\kappa_a =$ sabit bulunur. Böylece, (4.135) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_a}{ds_a} = -\vec{q}_a + \kappa_a\vec{a}_a$$
$$\frac{d^2\vec{h}_a}{ds_a^2} = -\vec{h}_a + \kappa_a^2\vec{h}_a$$

olup, son eşitlikten (4.146) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.146) eşitliği sağlansın. (4.135) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_a}{ds_a} = -\vec{q}_a + \kappa_a \vec{a}_a$$
$$\frac{d^2\vec{h}_a}{ds_a^2} = -\vec{h}_a + \kappa_a^2 \vec{h}_a + \kappa_a' \vec{a}_a$$

olup, son eşitlikten $\kappa_a' \vec{a}_a = 0$ bulunur. Buradan, $\kappa_a =$ sabit elde edilir. Böylece (4.134) eşitliğinden $\kappa_q =$ sabit olup, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

Teorem 4.3.48. Minkowski 3-uzayında, S_q anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzey, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_a yüzeyinin $\vec{a_a}$ vektörünün

$$\frac{d^3\vec{a}_a}{ds_a^3} + (1 - \kappa_a^2)\frac{d\vec{a}_a}{ds_a} = 0 \tag{4.147}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike q-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Sonuç 4.1.4'ten $\kappa_q =$ sabit olur. Buradan, (4.134) eşitliğinden $\kappa_a =$ sabit bulunur. Böylece, (4.135) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}_a}{ds_a} = \kappa_a \vec{h}_a$$
$$\frac{d^2\vec{q}_a}{ds_a^2} = -\kappa_a \vec{q}_a + \kappa_a^2 \vec{a}_a$$
$$\frac{d^3\vec{a}_a}{ds_a^3} = -\frac{d\vec{a}_a}{ds_a} + \kappa_a^2 \frac{d\vec{a}_a}{ds_a}$$

olup, son eşitlikten (4.147) denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.147) eşitliği sağlansın. (4.135) ile verilen türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}_a}{ds_a} = \kappa_a \vec{h}_a$$
$$\frac{d^2\vec{a}_a}{ds_a^2} = -\kappa_a \vec{q}_a + \kappa_a' \vec{h}_a + \kappa_a^2 \vec{a}_a$$
$$\frac{d^3\vec{a}_a}{ds_a^3} = -2\kappa_a' \vec{q}_a - \kappa_a'' \vec{h}_a + 3\kappa_a \kappa_a' \vec{a}_a - \frac{d\vec{a}_a}{ds_a} + \kappa_a^2 \frac{d\vec{a}_a}{ds_a}$$

bulunur. Burada, (4.147) eşitliği kullanılarak

$$-2\kappa_a' \vec{q}_a - \kappa_a'' \vec{h}_a + 3\kappa_a \kappa_a' \vec{a}_a = 0$$

elde edilir. $\vec{q}_a, \vec{h}_a, \vec{a}_a$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından son eşitlikten $\kappa_a' = 0$ olup $\kappa_a =$ sabit bulunur. Böylece (4.134) eşitliğinden $\kappa_q =$ sabit olup, Sonuç 4.1.4'ten S_q yüzeyi q-slant regle yüzeydir. ■

4.4. Minkowski 3-uzayında Açılabilir Spacelike ve Timelike Slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri

Bu bölümde, Minkowski 3-uzayında açılabilir regle yüzeyler incelenerek bu yüzeylerle ilgili teoremler verilecektir. İkinci bölümde, (2.10) denklemiyle açılabilir bir regle yüzeyin boğaz çizgisinin teğetlerinin yüzeyin anadoğrularına karşılık geldiğini belirtmiştik.

Buradan yola çıkarak, Minkowski 3-uzayındaki bir S regle yüzeyinin boğaz çizgisi, yüzeyin yönlü konisinin yay uzunluğu parametresine bağlı olarak verildiği zaman da (2.10) eşitliğine benzer şekilde, $f(s_1) = \dfrac{ds}{ds_1}$ olmak üzere

$$\frac{d\vec{c}}{ds_1} = \frac{d\vec{c}}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \vec{q}(s_1)f(s_1) \tag{4.148}$$

yazılabilir. Böylece, Minkowski 3-uzayında açılabilir regle yüzeylerin konum vektörleriyle ilgili incelemeler yapılabilir. Bu incelemeler sayesinde, açılabilir regle yüzeylerin bazı invaryantları verildiğinde yüzeylerin vektörel denklemleri elde edilebilir.

4.4.1. Minkowski 3-uzayında Açılabilir Spacelike ve Timelike q-slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri

Bu bölümde açılabilir spacelike ve timelike q-slant regle yüzeylerin konum vektörleri incelenecek ve bu yüzeylerle ilgili teoremler verilecektir.

4.4.1.1. Açılabilir Spacelike q-slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri

Teorem 4.4.1. Minkowski 3-uzayında, açılabilir bir spacelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. c_1, c_2 reel sabitler, $f(s_1) = \frac{ds}{ds_1}$ ve

$$\begin{aligned} z(s_1) = {} & c_1 e^{\sqrt{1+\kappa^2}s_1} + c_2 e^{-\sqrt{1+\kappa^2}s_1} \\ & + \frac{\kappa}{2\sqrt{1+\kappa^2}}\left[e^{\sqrt{1+\kappa^2}s_1}\int\left(e^{-\sqrt{1+\kappa^2}s_1}\int f ds_1\right)ds_1\right. \\ & \left. - e^{-\sqrt{1+\kappa^2}s_1}\int\left(e^{\sqrt{1+\kappa^2}s_1}\int f ds_1\right)ds_1\right] \end{aligned}$$

olmak üzere, S yüzeyinin boğaz çizgisinin konum vektörünün, s_1 yay uzunluğu parametresine göre ifadesi

$$\vec{c}(s_1) = \left(\frac{z''}{\kappa} - \kappa z\right)\vec{q} - \frac{z'}{\kappa}\vec{h} + z\vec{a} \tag{4.149}$$

ile verilir.

İspat: S yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ olup, $\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından, $x = x(s_1), y = y(s_1), z = z(s_1)$ fonksiyonları s_1 parametresine bağlı düzgün fonksiyonlar olmak üzere yüzeyin boğaz çizgisinin denklemi

$$\vec{c}(s_1) = x(s_1)\vec{q}(s_1) + y(s_1)\vec{h}(s_1) + z(s_1)\vec{a}(s_1) \tag{4.150}$$

şeklinde yazılabilir. S yüzeyi açılabilir olduğundan, (4.148) denkleminden $\vec{c}'(s_1) = \frac{d\vec{c}}{ds_1}$ olmak üzere $\vec{c}'(s_1) = f(s_1)\vec{q}(s_1)$ olur. Böylece, (4.150) eşitliğinin s_1 parametresine göre türevi alınırsa, (4.96) türev formülleri de kullanılarak

$$(x' - f + y)\vec{q} + (x + y' + z\kappa)\vec{h} + (y\kappa + z')\vec{a} = 0$$

elde edilir. $\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından, son eşitlikten

$$\begin{cases} x' - f + y = 0, \\ x + y' + z\kappa = 0, \\ y\kappa + z' = 0, \end{cases} \tag{4.151}$$

sistemine ulaşılır. (4.151) sisteminin üçüncü denkleminden

$$y = -\frac{z'}{\kappa} \tag{4.152}$$

olup, bu ifadenin s_1 parametresine göre türevi alınıp (4.151) sisteminin ikinci denkleminde yerine yazılırsa

$$x = \left(\frac{z'}{\kappa}\right)' - z\kappa$$

bulunur. S yüzeyi q-slant regle yüzey olduğundan Sonuç 4.1.4'ten $\kappa =$ sabit olup, son eşitlikten

$$x = \frac{z''}{\kappa} - z\kappa \tag{4.153}$$

elde edilir. (4.152) ve (4.153) eşitlikleri (4.151) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$f = \frac{z'''}{\kappa} - \kappa z' - \frac{z'}{\kappa} \Rightarrow z''' - (1 + \kappa^2)z' = \kappa f$$

olup, son eşitliğin s_1 parametresine göre integralinden

$$z'' - (1 + \kappa^2)z = \kappa \int f ds_1 \tag{4.154}$$

diferansiyel denklemine ulaşılır. Bu diferansiyel denklemin çözümünden

$$\begin{aligned} z(s_1) &= c_1 e^{\sqrt{1+\kappa^2}s_1} + c_2 e^{-\sqrt{1+\kappa^2}s_1} \\ &+ \frac{\kappa}{2\sqrt{1+\kappa^2}} \left[e^{\sqrt{1+\kappa^2}s_1} \int \left(e^{-\sqrt{1+\kappa^2}s_1} \int f ds_1 \right) ds_1 \right. \\ &\left. - e^{-\sqrt{1+\kappa^2}s_1} \int \left(e^{\sqrt{1+\kappa^2}s_1} \int f ds_1 \right) ds_1 \right] \end{aligned} \tag{4.155}$$

bulunur. Böylece (4.153), (4.152) ve (4.155) eşitliklerinden aranılan (4.149) denklemine ulaşılır. ■

Teorem 4.4.1'den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.4.2. Minkowski 3-uzayında, açılabilir bir spacelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $z(s_1)$ fonksiyonu (4.155) ile tanımlı olmak üzere, S yüzeyinin parametrizasyonu

$$\vec{r}(s_1, v) = \left(\frac{z''}{\kappa} - \kappa z + v \right) \vec{q} - \frac{z'}{\kappa} \vec{h} + z\vec{a} \tag{4.156}$$

ile verilir.

Sonuç 4.4.3. $z = z(s_1)$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise, S regle yüzeyinin boğaz çizgisinin konum vektörü yüzeyin Darboux vektörü ile lineer bağımlıdır. Aynı zamanda, yüzeyin konum vektörü Darboux vektörü ile aynı düzlemde kalır.

İspat: S yüzeyinin boğaz çizgisinin denklemi (4.149) ve $z = m =$ sabit olsun. Bu takdirde, yüzeyin Darboux vektörü $\vec{w} = -\kappa\vec{q} + \vec{a}$ olmak üzere, (4.149) denklemi

$$\vec{c}(s_1) = m(-\kappa\vec{q} + \vec{a}) = m\vec{w}$$

şekline dönüşür ve yüzeyin boğaz çizgisinin konum vektörü ile Darboux vektörü lineer bağımlı olur. Aynı zamanda, (4.156) denklemi ile verilen S yüzeyinin parametrizasyonu da

$$\vec{r}(s_1, v) = m\vec{w} + v\vec{q}$$

şeklini alır ve bu vektörün Darboux vektörü ile aynı düzlemde kaldığı açıktır. ■

Sonuç 4.4.4. Minkowski 3-uzayında, açılabilir bir spacelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, yüzeyin boğaz çizgisi

$$\left(\frac{\vec{c}'}{f} \right)''' - (1+\kappa^2) \left(\frac{\vec{c}'}{f} \right)' = 0$$

ile verilen dördüncü mertebeden diferansiyel denklemi sağlar.

İspat: S yüzeyi spacelike q-slant regle yüzey olduğundan (4.101) ile verilen diferansiyel denklemi sağlar. Aynı zamanda, S yüzeyi açılabilir olduğundan

$$\vec{q} = \frac{\vec{c}'}{f}$$

olup, bu eşitlik (4.3.5) denkleminde yerine yazılırsa istenen sonuca ulaşılır. ■

Teorem 4.4.5. Minkowski 3-uzayında, açılabilir bir spacelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyinin boğaz çizgisinin konum vektörü, s_1 parametresine göre

$$\vec{c}(s_1) = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}} \left(\int \cosh\left(\sqrt{1+\kappa^2} s_1\right) f(s_1) ds_1, \right.$$
$$\left. \kappa \int f(s_1) ds_1, \int \sinh\left(\sqrt{1+\kappa^2} s_1\right) f(s_1) ds_1 \right)$$

ile verilir.

İspat: S yüzeyi spacelike q-slant regle yüzey olduğundan Sonuç 4.1.4'ten $\kappa =$ sabit ve (4.101) denkleminden

$$\vec{q}''' - (1+\kappa^2)\vec{q}' = 0 \tag{4.157}$$

olur. Minkowski 3-uzayının baz vektörlerini $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ olarak alalım. Burada, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ spacelike vektör, $\vec{e}_3$ timelike vektördür. Böylece, yüzeyin anadoğruları olan $\vec{q}$ vektörü

$$\vec{q} = q_1\vec{e}_1 + q_2\vec{e}_2 + q_3\vec{e}_3 \tag{4.158}$$

şeklinde yazılabilir. S yüzeyi q-slant regle yüzey olduğundan yüzeyin anadoğruları sabit bir doğrultuyla sabit açı yapar. Genelliği bozmadan bu sabit doğrultuyu $\vec{e}_2$ seçelim. Bu takdirde, $\vec{q}$ ile $\vec{e}_2$ arasındaki sabit spacelike açı θ olmak üzere

$$\langle \vec{q}, \vec{e}_2 \rangle = \cos\theta = \text{sabit} \Rightarrow q_2 = \cos\theta = \text{sabit}$$

bulunur. $\vec{q}$ vektörü spacelike ve birim vektör olduğundan, (4.158) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}, \vec{q} \rangle = 1 &\Rightarrow q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 = 1 \\ &\Rightarrow q_1^2 - q_3^2 = 1 - \cos^2\theta \\ &\Rightarrow q_1^2 - q_3^2 = \sin^2\theta \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $t = t(s_1)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere son denklemin genel çözümü

$$\begin{cases} q_1 = \sin\theta \cosh(t(s_1)) \\ q_3 = \sin\theta \sinh(t(s_1)) \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece $\vec{q}$ vektörü

$$\vec{q} = \sin\theta \cosh(t(s_1))\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2 + \sin\theta \sinh(t(s_1))\vec{e}_3$$

halini alır. Buradan,

$$\vec{q}' = \sin\theta\, t'(s_1) \sinh(t(s_1))\vec{e}_1 + \sin\theta\, t'(s_1) \cosh(t(s_1))\vec{e}_3$$

olup, bu vektör birim ve timelike vektör olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}', \vec{q}' \rangle = -1 &\Rightarrow \sin^2\theta\, [t'(s_1)]^2 \sinh^2(t(s_1)) - \sin^2\theta\, [t'(s_1)]^2 \cosh^2(t(s_1)) = -1 \\ &\Rightarrow \sin^2\theta\, [t'(s_1)]^2 = 1 \\ &\Rightarrow t'(s_1) = \frac{1}{\sin\theta} \\ &\Rightarrow t(s_1) = \frac{s_1}{\sin\theta} + n, n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $t \to t + n$ parametre değişimi sayesinde n sabiti elenir ve

$$t(s_1) = \frac{s_1}{\sin\theta} \tag{4.159}$$

bulunur. Aynı zamanda, $\vec{q}$ vektörünün bileşenleri (4.157) diferansiyel denklemini sağlayacağından

$$\begin{cases} q_1''' - (1+\kappa^2)q_1' = 0 \\ q_3''' - (1+\kappa^2)q_3' = 0 \end{cases}$$

olup, buradan

$$\begin{cases} [t''' + (t')^3 - (1+\kappa^2)t'] \sinh t + 3t''t' \cosh t = 0 \\ [t''' + (t')^3 - (1+\kappa^2)t'] \cosh t + 3t''t' \sinh t = 0 \end{cases}$$

denklem sistemine ulaşılır ve bu sistem indirgenerek

$$\begin{cases} t''' + (t')^3 - (1+\kappa^2)t' = 0 \\ t''t' = 0 \end{cases} \tag{4.160}$$

halini alır. (4.160) sisteminin ikinci denkleminden n_1, n_2 reel sabitler olmak üzere

$$t(s_1) = n_1 s_1 + n_2$$

elde edilir. Burada, $t \to t + n_2$ parametre değişimi sayesinde n_2 sabiti elenir ve $t(s_1) = n_1 s_1$ bulunur. Bu eşitlik, (4.160) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$n_1 = \sqrt{1+\kappa^2}$$

bulunur. Böylece, (4.159) eşitliği kullanılarak

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}} \text{ ve } \cos\theta = \frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}}$$

olup, $\vec{q}$ vektörü

$$\vec{q} = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\left(\cosh\left(\sqrt{1+\kappa^2}s_1\right), \kappa, \sinh\left(\sqrt{1+\kappa^2}s_1\right)\right) \tag{4.161}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak, S yüzeyi açılabilir olduğundan

$$\vec{q} = \frac{\vec{c}'}{f}$$

olup,

$$\begin{aligned}\vec{c}(s_1) = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\Bigg(&\int \cosh\left(\sqrt{1+\kappa^2}s_1\right) f(s_1)ds_1, \\ &\kappa\int f(s_1)ds_1, \int \sinh\left(\sqrt{1+\kappa^2}s_1\right) f(s_1)ds_1\Bigg)\end{aligned} \tag{4.162}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.4.5'ten, aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Sonuç 4.4.6. Minkowski 3-uzayında, açılabilir bir spacelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $g(s_1) = \cosh\left(\sqrt{1+\kappa^2}s_1\right)$ ve $h(s_1) = \sinh\left(\sqrt{1+\kappa^2}s_1\right)$ olmak üzere, yüzeyin s_1 parametresine göre parametrizasyonu

$$\vec{r}(s_1, v) = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\left(\int fgds_1 + vg, \kappa\left(\int fds_1 + v\right), \int fhds_1 + vh\right) \tag{4.163}$$

şeklindedir.

İspat: S yüzeyi açılabilir spacelike q-slant olduğundan Teorem 4.4.5'ten, yüzeyin ana-doğruları için (4.161) denklemi ve boğaz çizgisi için ise (4.162) denklemi sağlanır. Bu denklemler,

$$\vec{r}(s_1, v) = \vec{c}(s_1) + v\vec{q}(s_1)$$

denkleminde yerine yazılır ve $g(s_1) = \cosh\left(\sqrt{1+\kappa^2}s_1\right)$, $h(s_1) = \sinh\left(\sqrt{1+\kappa^2}s_1\right)$ alınırsa aranan sonuca ulaşılır. ■

Sonuç 4.4.7. Minkowski 3-uzayında, açılabilir bir spacelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $m \in \mathbb{R}$ integrasyon sabiti olmak üzere, yüzeyin s parametresine göre parametrizasyonu

$$\vec{r}(s, v) = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\left(\int gds + vg, \kappa\left(s + m + v\right), \int hds + vh\right)$$

şeklindedir.

İspat: (4.163) denkleminde $f = \dfrac{ds}{ds_1}$ yazılarak aranan sonuca kolayca ulaşılır. ■

4.4.1.2. Anadoğruları Spacelike Olan Açılabilir Timelike q-slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri

Teorem 4.4.8. Minkowski 3-uzayında, anadoğruları spacelike olan açılabilir bir timelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. c_1, c_2 reel sabitler, $f(s_1) = \frac{ds}{ds_1}$ ve

(i) $-1 < \kappa < 1$ için

$$\begin{aligned} z(s_1) = {} & c_1 \cos\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right) \\ & - \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}\left[\cos\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right)\int\left(\sin\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right)\int f ds_1\right)ds_1\right. \\ & \left. - \sin\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right)\int\left(\cos\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right)\int f ds_1\right)ds_1\right] \end{aligned}$$

(ii) $\kappa < -1$ veya $\kappa > 1$ için

$$\begin{aligned} z(s_1) = {} & c_1 e^{\sqrt{\kappa^2-1}s_1} + c_2 e^{-\sqrt{\kappa^2-1}s_1} \\ & + \frac{\kappa}{2\sqrt{\kappa^2-1}}\left[e^{\sqrt{\kappa^2-1}s_1}\int\left(e^{-\sqrt{\kappa^2-1}s_1}\int f ds_1\right)ds_1\right. \\ & \left. - e^{-\sqrt{\kappa^2-1}s_1}\int\left(e^{\sqrt{\kappa^2-1}s_1}\int f ds_1\right)ds_1\right] \end{aligned}$$

olmak üzere, S yüzeyinin boğaz çizgisinin konum vektörünün, s_1 yay uzunluğu parametresine göre ifadesi

$$\vec{c}(s_1) = \left(\frac{z''}{\kappa} - \kappa z\right)\vec{q} - \frac{z'}{\kappa}\vec{h} + z\vec{a} \tag{4.164}$$

ile verilir.

İspat: S yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ olup, $\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından, $x = x(s_1), y = y(s_1), z = z(s_1)$ fonksiyonları s_1 parametresine bağlı düzgün fonksiyonlar olmak üzere yüzeyin boğaz çizgisinin denklemi

$$\vec{c}(s_1) = x(s_1)\vec{q}(s_1) + y(s_1)\vec{h}(s_1) + z(s_1)\vec{a}(s_1) \tag{4.165}$$

şeklinde yazılabilir. S yüzeyi açılabilir olduğundan, (4.148) denkleminden $\vec{c}'(s_1) = \frac{d\vec{c}}{ds_1}$ olmak üzere $\vec{c}'(s_1) = f(s_1)\vec{q}(s_1)$ olur. Böylece, (4.165) eşitliğinin s_1 parametresine göre

türevi alınırsa, (4.110) türev formülleri de kullanılarak

$$(x' - f - y)\vec{q} + (x + y' + z\kappa)\vec{h} + (y\kappa + z')\vec{a} = 0$$

elde edilir. $\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından, son eşitlikten

$$\begin{cases} x' - f - y = 0, \\ x + y' + z\kappa = 0, \\ y\kappa + z' = 0, \end{cases} \tag{4.166}$$

sistemine ulaşılır. (4.166) sisteminin üçüncü denkleminden

$$y = -\frac{z'}{\kappa} \tag{4.167}$$

olup, bu ifadenin s_1 parametresine göre türevi alınıp (4.166) sisteminin ikinci denkleminde yerine yazılırsa

$$x = \left(\frac{z'}{\kappa}\right)' - z\kappa$$

bulunur. S yüzeyi q-slant yüzey olduğundan Sonuç 4.1.4'ten $\kappa =$ sabit olup, son eşitlikten

$$x = \frac{z''}{\kappa} - z\kappa \tag{4.168}$$

elde edilir. (4.167) ve (4.168) eşitlikleri (4.166) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$f = \frac{z'''}{\kappa} - \kappa z' + \frac{z'}{\kappa} \Rightarrow z''' + (1 - \kappa^2)z' = \kappa f$$

olup, son eşitliğin s_1 parametresine göre integralinden

$$z'' + (1 - \kappa^2)z = \kappa \int f ds_1 \tag{4.169}$$

diferansiyel denklemine ulaşılır. Bu diferansiyel denklemin çözümünden

(i) $-1 < \kappa < 1$ için

$$\begin{aligned} z(s_1) = {} & c_1 \cos\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right) \\ & - \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}\left[\cos\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right)\int\left(\sin\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right)\int f ds_1\right)ds_1\right. \\ & \left. - \sin\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right)\int\left(\cos\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right)\int f ds_1\right)ds_1\right] \end{aligned} \tag{4.170}$$

(ii) $\kappa < -1$ veya $\kappa > 1$ için

$$\begin{aligned} z(s_1) = {} & c_1 e^{\sqrt{\kappa^2-1}s_1} + c_2 e^{-\sqrt{\kappa^2-1}s_1} \\ & + \frac{\kappa}{2\sqrt{\kappa^2-1}}\left[e^{\sqrt{\kappa^2-1}s_1}\int\left(e^{-\sqrt{\kappa^2-1}s_1}\int f ds_1\right)ds_1\right. \\ & \left. - e^{-\sqrt{\kappa^2-1}s_1}\int\left(e^{\sqrt{\kappa^2-1}s_1}\int f ds_1\right)ds_1\right] \end{aligned} \tag{4.171}$$

bulunur. Böylece (4.168), (4.167) ve (4.170) ile (4.171) eşitliklerinden aranılan (4.164) denklemine ulaşılır. ■

Teorem 4.4.8'den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.4.9. Minkowski 3-uzayında, anadoğruları spacelike olan açılabilir bir timelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $z(s_1)$ fonksiyonu (4.170) veya (4.171) ile tanımlı olmak üzere, S yüzeyinin parametrizasyonu

$$\vec{r}(s_1, v) = \left(\frac{z''}{\kappa} - \kappa z + v\right)\vec{q} - \frac{z'}{\kappa}\vec{h} + z\vec{a} \tag{4.172}$$

ile verilir.

Sonuç 4.4.10. $z = z(s_1)$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise, S regle yüzeyinin boğaz çizgisinin konum vektörü yüzeyin Darboux vektörü ile lineer bağımlıdır. Aynı zamanda, yüzeyin konum vektörü Darboux vektörü ile aynı düzlemde kalır.

İspat: S yüzeyinin boğaz çizgisinin denklemi (4.164) ve $z = m =$ sabit olsun. Bu takdirde, yüzeyin Darboux vektörü $\vec{w} = \kappa\vec{q} - \vec{a}$ olmak üzere, (4.164) denklemi

$$\vec{c}(s_1) = -m(\kappa\vec{q} - \vec{a}) = -m\vec{w}$$

şekline dönüşür ve yüzeyin boğaz çizgisinin konum vektörü ile Darboux vektörü lineer bağımlı olur. Aynı zamanda, (4.172) denklemi ile verilen S yüzeyinin parametrizasyonu da

$$\vec{r}(s_1, v) = -m\vec{w} + v\vec{q}$$

şeklini alır ve bu vektörün Darboux vektörü ile aynı düzlemde kaldığı açıktır. ■

Sonuç 4.4.11. Minkowski 3-uzayında, anadoğruları spacelike olan açılabilir bir timelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, yüzeyin boğaz çizgisi

$$\left(\frac{\vec{c}\,'}{f}\right)''' + (1 - \kappa^2)\left(\frac{\vec{c}\,'}{f}\right)' = 0$$

ile verilen dördüncü mertebeden diferansiyel denklemi sağlar.

İspat: S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike q-slant regle yüzey olduğundan (4.117) ile verilen diferansiyel denklemi sağlar. Aynı zamanda, S yüzeyi açılabilir oldu-

ğundan

$$\vec{q} = \frac{\vec{c}'}{f}$$

olup, bu eşitlik (4.117) denkleminde yerine yazılırsa istenen sonuca ulaşılır. ■

Teorem 4.4.12. Minkowski 3-uzayında, anadoğruları spacelike olan açılabilir bir timelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyinin boğaz çizgisinin konum vektörü, s_1 parametresine göre

(i) $-1 < \kappa < 1$ için

$$\vec{c}(s_1) = \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}} \left(\int \cos\left(\sqrt{1-\kappa^2} s_1\right) f(s_1) ds_1, \right.$$
$$\left. \int \sin\left(\sqrt{1-\kappa^2} s_1\right) f(s_1) ds_1, \pm\kappa \int f(s_1) ds_1 \right)$$

(ii) $\kappa < -1$ veya $\kappa > 1$ için

$$\vec{c}(s_1) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2-1}} \left(\int \sinh\left(\sqrt{\kappa^2-1} s_1\right) f(s_1) ds_1, \right.$$
$$\left. \pm\kappa \int f(s_1) ds_1, \int \cosh\left(\sqrt{\kappa^2-1} s_1\right) f(s_1) ds_1 \right)$$

ile verilir.

İspat: S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike q-slant regle yüzey olduğundan Sonuç 4.1.4'ten $\kappa =$ sabit ve (4.117) denkleminden

$$\vec{q}''' + (1-\kappa^2)\vec{q}' = 0 \tag{4.173}$$

olur. Minkowski 3-uzayının baz vektörlerini $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ olarak alalım. Burada, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ spacelike vektör, $\vec{e}_3$ timelike vektördür. Böylece, yüzeyin anadoğruları olan $\vec{q}$ vektörü

$$\vec{q} = q_1\vec{e}_1 + q_2\vec{e}_2 + q_3\vec{e}_3 \tag{4.174}$$

şeklinde yazılabilir. S yüzeyi q-slant regle yüzey olduğundan yüzeyin anadoğruları sabit bir doğrultuyla sabit açı yapar.

(i) $-1 < \kappa < 1$ için,

genelliği bozmadan bu sabit doğrultuyu $\vec{e}_3$ seçelim. Bu takdirde, $\vec{q}$ ile $\vec{e}_3$ arasındaki sabit Lorentziyen açı θ olmak üzere

$$|\langle \vec{q}, \vec{e}_3 \rangle| = \sinh\theta = \text{sabit} \Rightarrow |-q_3| = \sinh\theta = \text{sabit}$$

bulunur. $\vec{q}$ vektörü spacelike ve birim vektör olduğundan, (4.174) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle = 1 &\Rightarrow q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 = 1 \\ &\Rightarrow q_1^2 + q_2^2 = 1 + \sinh^2\theta \\ &\Rightarrow q_1^2 + q_2^2 = \cosh^2\theta\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $t = t(s_1)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere son denklemin genel çözümü

$$\begin{cases} q_1 = \cosh\theta\cos(t(s_1)) \\ q_3 = \cosh\theta\sin(t(s_1)) \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece $\vec{q}$ vektörü

$$\vec{q} = \cosh\theta\cos(t(s_1))\vec{e}_1 + \cosh\theta\sin(t(s_1))\vec{e}_2 \pm \sinh\theta\vec{e}_3$$

halini alır. Buradan,

$$\vec{q}' = -\cosh\theta\, t'(s_1)\sin(t(s_1))\vec{e}_1 + \cosh\theta\, t'(s_1)\cos(t(s_1))\vec{e}_2$$

olup, bu vektör birim ve spacelike vektör olduğundan

$$\begin{aligned}\langle \vec{q}', \vec{q}' \rangle = 1 &\Rightarrow \cosh^2\theta\,[t'(s_1)]^2\sin^2(t(s_1)) + \cosh^2\theta\,[t'(s_1)]^2\cos^2(t(s_1)) = 1 \\ &\Rightarrow \cosh^2\theta\,[t'(s_1)]^2 = 1 \\ &\Rightarrow t'(s_1) = \frac{1}{\cosh\theta} \\ &\Rightarrow t(s_1) = \frac{s_1}{\cosh\theta} + n, n \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $t \to t + n$ parametre değişimi sayesinde n sabiti elenir ve

$$t(s_1) = \frac{s_1}{\cosh\theta} \tag{4.175}$$

bulunur. Aynı zamanda, $\vec{q}$ vektörünün bileşenleri (4.173) diferansiyel denklemini sağlayacağından

$$\begin{cases} q_1''' + (1-\kappa^2)q_1' = 0 \\ q_2''' + (1-\kappa^2)q_2' = 0 \end{cases}$$

olup, buradan

$$\begin{cases} [t''' - (t')^3 + (1-\kappa^2)t']\sin t + 3t''t'\cos t = 0 \\ [t''' - (t')^3 + (1-\kappa^2)t']\cos t + 3t''t'\sin t = 0 \end{cases}$$

denklem sistemine ulaşılır ve bu sistem indirgenerek

$$\begin{cases} t''' - (t')^3 + (1-\kappa^2)t' = 0 \\ t''t' = 0 \end{cases} \tag{4.176}$$

halini alır. (4.176) sisteminin ikinci denkleminden n_1, n_2 reel sabitler olmak üzere

$$t(s_1) = n_1 s_1 + n_2$$

elde edilir. Burada, $t \to t + n_2$ parametre değişimi sayesinde n_2 sabiti elenir ve $t(s_1) = n_1 s_1$ bulunur. Bu eşitlik, (4.176) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$n_1 = \sqrt{1-\kappa^2}$$

bulunur. Böylece, (4.175) eşitliği kullanılarak

$$\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}} \text{ ve } \sinh\theta = \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}$$

olup, $\vec{q}$ vektörü

$$\vec{q} = \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}}\left(\cos\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right), \sin\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right), \pm\kappa\right) \tag{4.177}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak, S yüzeyi açılabilir olduğundan

$$\vec{q} = \frac{\vec{c}\,'}{f}$$

olup,

$$\begin{aligned}\vec{c}(s_1) = \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}}\Bigg(&\int \cos\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right) f(s_1)ds_1, \\ &\int \sin\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right) f(s_1)ds_1, \pm\kappa\int f(s_1)ds_1\Bigg)\end{aligned} \tag{4.178}$$

sonucuna ulaşılır.

(ii) $\kappa < -1$ veya $\kappa > 1$ için

genelliği bozmadan bu sabit doğrultuyu $\vec{e}_2$ seçelim. Bu takdirde, $\vec{q}$ ile $\vec{e}_2$ arasındaki sabit merkez açı θ olmak üzere

$$|\langle\vec{q}, \vec{e}_2\rangle| = \cosh\theta = \text{sabit} \Rightarrow |q_2| = \cosh\theta = \text{sabit}$$

bulunur. $\vec{q}$ vektörü spacelike ve birim vektör olduğundan, (4.174) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\langle\vec{q}, \vec{q}\rangle = 1 &\Rightarrow q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 = 1 \\ &\Rightarrow q_1^2 - q_3^2 = 1 - \cosh^2\theta \\ &\Rightarrow q_3^2 - q_1^2 = \sinh^2\theta\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $t = t(s_1)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere son denklemin genel çözümü

$$\begin{cases} q_1 = \sinh\theta\sinh(t(s_1)) \\ q_3 = \sinh\theta\cosh(t(s_1)) \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece $\vec{q}$ vektörü

$$\vec{q} = \sinh\theta\sinh(t(s_1))\vec{e}_1 \pm \cosh\theta\vec{e}_2 + \sinh\theta\cosh(t(s_1))\vec{e}_3$$

halini alır. Buradan,

$$\vec{q}' = \sinh\theta\, t'(s_1)\cosh(t(s_1))\vec{e}_1 + \sinh\theta\, t'(s_1)\sinh(t(s_1))\vec{e}_3$$

olup, bu vektör birim ve spacelike vektör olduğundan

$$\begin{aligned}\langle \vec{q}', \vec{q}' \rangle = 1 &\Rightarrow \sinh^2\theta\,[t'(s_1)]^2\cosh^2(t(s_1)) - \sinh^2\theta\,[t'(s_1)]^2\sinh^2(t(s_1)) = 1 \\ &\Rightarrow \sinh^2\theta\,[t'(s_1)]^2 = 1 \\ &\Rightarrow t'(s_1) = \frac{1}{\sinh\theta} \\ &\Rightarrow t(s_1) = \frac{s_1}{\sinh\theta} + n, n \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $t \to t + n$ parametre değişimi sayesinde n sabiti elenir ve

$$t(s_1) = \frac{s_1}{\sinh\theta} \tag{4.179}$$

bulunur. Aynı zamanda, $\vec{q}$ vektörünün bileşenleri (4.173) diferansiyel denklemini sağlayacağından

$$\begin{cases} q_1''' + (1-\kappa^2)q_1' = 0 \\ q_3''' + (1-\kappa^2)q_3' = 0 \end{cases}$$

olup, buradan

$$\begin{cases} [t''' + (t')^3 + (1-\kappa^2)t']\cosh t + 3t''t'\sinh t = 0 \\ [t''' + (t')^3 + (1-\kappa^2)t']\sinh t + 3t''t'\cosh t = 0 \end{cases}$$

denklem sistemine ulaşılır ve bu sistem indirgenerek

$$\begin{cases} t''' + (t')^3 + (1-\kappa^2)t' = 0 \\ t''t' = 0 \end{cases} \tag{4.180}$$

halini alır. (4.180) sisteminin ikinci denkleminden n_1, n_2 reel sabitler olmak üzere

$$t(s_1) = n_1 s_1 + n_2$$

elde edilir. Burada, $t \to t + n_2$ parametre değişimi sayesinde n_2 sabiti elenir ve $t(s_1) = n_1 s_1$ bulunur. Bu eşitlik, (4.180) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$n_1 = \sqrt{\kappa^2 - 1}$$

bulunur. Böylece, (4.179) eşitliği kullanılarak

$$\sinh\theta = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2-1}} \quad \text{ve} \quad \cosh\theta = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2-1}}$$

olup, $\vec{q}$ vektörü

$$\vec{q} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2-1}}\left(\sinh\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right), \pm\kappa, \cosh\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right)\right) \tag{4.181}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak, S yüzeyi açılabilir olduğundan

$$\vec{q} = \frac{\vec{c}'}{f}$$

olup,

$$\vec{c}(s_1) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \left(\int \sinh\left(\sqrt{\kappa^2 - 1} s_1\right) f(s_1) ds_1, \right. \\ \left. \pm\kappa \int f(s_1) ds_1, \int \cosh\left(\sqrt{\kappa^2 - 1} s_1\right) f(s_1) ds_1 \right) \tag{4.182}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.4.12'den, aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Sonuç 4.4.13. Minkowski 3-uzayında, anadoğruları spacelike olan açılabilir bir timelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $g_1(s_1) = \cos\left(\sqrt{1 - \kappa^2} s_1\right)$, $g_2(s_1) = \sinh\left(\sqrt{\kappa^2 - 1} s_1\right)$, $h_1(s_1) = \sin\left(\sqrt{1 - \kappa^2} s_1\right)$ ve $h_2(s_1) = \cosh\left(\sqrt{\kappa^2 - 1} s_1\right)$ olmak üzere, yüzeyin s_1 parametresine göre parametrizasyonu

(i) $-1 < \kappa < 1$ için,

$$\vec{r}(s_1, v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2}} \left(\int f g ds_1 + vg, \int f h ds_1 + vh, \pm\kappa \left(\int f ds_1 + v \right) \right) \tag{4.183}$$

(ii) $\kappa < -1$ veya $\kappa > 1$ için,

$$\vec{r}(s_1, v) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \left(\int f g_2 ds_1 + v g_2, \pm\kappa \left(\int f ds_1 + v \right), \int f h_2 ds_1 + v h_2 \right) \tag{4.184}$$

şeklindedir.

İspat: S yüzeyi anadoğruları spacelike olan açılabilir timelike q-slant olduğundan Teorem 4.4.12'den, yüzeyin anadoğruları için (4.177) ve (4.181) denklemleri ve boğaz çizgisi için ise (4.178) ve (4.182) denklemleri sağlanır. Bu denklemler,

$$\vec{r}(s_1, v) = \vec{c}(s_1) + v\vec{q}(s_1)$$

denkleminde yerine yazılır ve $g_1(s_1) = \cos\left(\sqrt{1 - \kappa^2} s_1\right)$, $g_2(s_1) = \sinh\left(\sqrt{\kappa^2 - 1} s_1\right)$, $h_1(s_1) = \sin\left(\sqrt{1 - \kappa^2} s_1\right)$, $h_2(s_1) = \cosh\left(\sqrt{\kappa^2 - 1} s_1\right)$ alınırsa aranan sonuca ulaşılır. ■

Sonuç 4.4.14. Minkowski 3-uzayında, anadoğruları spacelike olan açılabilir bir timelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$

olsun. Bu takdirde, $m \in \mathbb{R}$ integrasyon sabiti olmak üzere, yüzeyin s parametresine göre parametrizasyonu

(i) $-1 < \kappa < 1$ için,

$$\vec{r}(s,v) = \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}}\left(\int g_1 ds + v g_1, \int h_1 ds + v h_1, \pm\kappa\left(s+m+v\right)\right)$$

(ii) $\kappa < -1$ veya $\kappa > 1$ için,

$$\vec{r}(s,v) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2-1}}\left(\int g_2 ds + v g_2, \pm\kappa\left(s+m+v\right), \int h_2 ds + v h_2\right)$$

şeklindedir.

İspat: (4.183) ve (4.184) denklemlerinde $f = \frac{ds}{ds_1}$ yazılarak aranan sonuca kolayca ulaşılır. ■

4.4.1.3. Anadoğruları Timelike Olan Açılabilir Timelike q-slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri

Teorem 4.4.15. Minkowski 3-uzayında, anadoğruları timelike olan açılabilir bir timelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. c_1, c_2 reel sabitler, $f(s_1) = \frac{ds}{ds_1}$ ve

(i) $-1 < \kappa < 1$ için

$$\begin{aligned} z(s_1) = {} & c_1 e^{\sqrt{1-\kappa^2}s_1} + c_2 e^{-\sqrt{1-\kappa^2}s_1} \\ & + \frac{\kappa}{2\sqrt{1-\kappa^2}}\left[e^{\sqrt{1-\kappa^2}s_1}\int\left(e^{-\sqrt{1-\kappa^2}s_1}\int f ds_1\right)ds_1\right. \\ & \left. - e^{-\sqrt{1-\kappa^2}s_1}\int\left(e^{\sqrt{1-\kappa^2}s_1}\int f ds_1\right)ds_1\right] \end{aligned}$$

(ii) $\kappa < -1$ veya $\kappa > 1$ için

$$\begin{aligned} z(s_1) = {} & c_1\cos\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right) \\ & - \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2-1}}\left[\cos\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right)\int\left(\sin\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right)\int f ds_1\right)ds_1\right. \\ & \left. - \sin\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right)\int\left(\cos\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right)\int f ds_1\right)ds_1\right] \end{aligned}$$

olmak üzere, S yüzeyinin boğaz çizgisinin konum vektörünün, s_1 yay uzunluğu parametresine göre ifadesi

$$\vec{c}(s_1) = \left(\frac{z''}{\kappa} + \kappa z\right)\vec{q} - \frac{z'}{\kappa}\vec{h} + z\vec{a} \tag{4.185}$$

ile verilir.

İspat: S yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ olup, $\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından, $x = x(s_1), y = y(s_1), z = z(s_1)$ fonksiyonları s_1 parametresine bağlı düzgün fonksiyonlar olmak üzere yüzeyin boğaz çizgisinin denklemi

$$\vec{c}(s_1) = x(s_1)\vec{q}(s_1) + y(s_1)\vec{h}(s_1) + z(s_1)\vec{a}(s_1) \tag{4.186}$$

şeklinde yazılabilir. S yüzeyi açılabilir olduğundan, (4.148) denkleminden $\vec{c}'(s_1) = \frac{d\vec{c}}{ds_1}$ olmak üzere $\vec{c}'(s_1) = f(s_1)\vec{q}(s_1)$ olur. Böylece, (4.186) eşitliğinin s_1 parametresine göre türevi alınırsa, (4.129) türev formülleri de kullanılarak

$$(x' - f + y)\vec{q} + (x + y' - z\kappa)\vec{h} + (y\kappa + z')\vec{a} = 0$$

elde edilir. $\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından, son eşitlikten

$$\begin{cases} x' - f + y = 0, \\ x + y' - z\kappa = 0, \\ y\kappa + z' = 0, \end{cases} \tag{4.187}$$

sistemine ulaşılır. (4.187) sisteminin üçüncü denkleminden

$$y = -\frac{z'}{\kappa} \tag{4.188}$$

olup, bu ifadenin s_1 parametresine göre türevi alınıp (4.187) sisteminin ikinci denkleminde yerine yazılırsa

$$x = \left(\frac{z'}{\kappa}\right)' + z\kappa$$

bulunur. S yüzeyi q-slant yüzey olduğundan Sonuç 4.1.4'ten $\kappa =$ sabit olup, son eşitlikten

$$x = \frac{z''}{\kappa} + z\kappa \tag{4.189}$$

elde edilir. (4.188) ve (4.189) eşitlikleri (4.187) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$f = \frac{z'''}{\kappa} + \kappa z' - \frac{z'}{\kappa} \Rightarrow z''' + (\kappa^2 - 1)z' = \kappa f$$

olup, son eşitliğin s_1 parametresine göre integralinden

$$z'' + (\kappa^2 - 1)z = \kappa \int f ds_1 \tag{4.190}$$

diferansiyel denklemine ulaşılır. Bu diferansiyel denklemin çözümünden

(i) $-1 < \kappa < 1$ için

$$\begin{aligned} z(s_1) = {} & c_1 e^{\sqrt{1-\kappa^2}s_1} + c_2 e^{-\sqrt{1-\kappa^2}s_1} \\ & + \frac{\kappa}{2\sqrt{1-\kappa^2}} \left[e^{\sqrt{1-\kappa^2}s_1} \int \left(e^{-\sqrt{1-\kappa^2}s_1} \int f ds_1 \right) ds_1 \right. \\ & \left. - e^{-\sqrt{1-\kappa^2}s_1} \int \left(e^{\sqrt{1-\kappa^2}s_1} \int f ds_1 \right) ds_1 \right] \end{aligned} \tag{4.191}$$

(ii) $\kappa < -1$ veya $\kappa > 1$ için

$$\begin{aligned} z(s_1) = {} & c_1 \cos\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right) \\ & - \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2-1}} \left[\cos\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right) \int \left(\sin\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right) \int f ds_1 \right) ds_1 \right. \\ & \left. - \sin\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right) \int \left(\cos\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right) \int f ds_1 \right) ds_1 \right] \end{aligned} \tag{4.192}$$

bulunur. Böylece, (4.189), (4.188) ve (4.191) ile (4.192) eşitliklerinden aranılan (4.185) denklemine ulaşılır. ■

Teorem 4.4.15'ten aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.4.16. Minkowski 3-uzayında, anadoğruları timelike olan açılabilir bir timelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $z(s_1)$ fonksiyonu (4.191) veya (4.192) ile tanımlı olmak üzere, S yüzeyinin parametrizasyonu

$$\vec{r}(s_1, v) = \left(\frac{z''}{\kappa} + \kappa z + v \right) \vec{q} - \frac{z'}{\kappa} \vec{h} + z\vec{a} \tag{4.193}$$

ile verilir.

Sonuç 4.4.17. $z = z(s_1)$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise, S regle yüzeyinin boğaz çizgisinin konum vektörü yüzeyin Darboux vektörü ile lineer bağımlıdır. Aynı zamanda, yüzeyin konum vektörü Darboux vektörü ile aynı düzlemde kalır.

İspat: S yüzeyinin boğaz çizgisinin denklemi (4.185) ve $z = m =$ sabit olsun. Bu takdirde, yüzeyin Darboux vektörü $\vec{w} = -\kappa\vec{q} - \vec{a}$ olmak üzere, (4.185) denklemi

$$\vec{c}(s_1) = -m(-\kappa\vec{q} - \vec{a}) = -m\vec{w}$$

şekline dönüşür ve yüzeyin boğaz çizgisinin konum vektörü ile Darboux vektörü lineer bağımlı olur. Aynı zamanda, (4.193) denklemi ile verilen S yüzeyinin parametrizasyonu

da

$$\vec{r}(s_1, v) = -m\vec{w} + v\vec{q}$$

şeklini alır ve bu vektörün Darboux vektörü ile aynı düzlemde kaldığı açıktır. ■

Sonuç 4.4.18. Minkowski 3-uzayında, anadoğruları timelike olan açılabilir bir timelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, yüzeyin boğaz çizgisi

$$\left(\frac{\vec{c}\,'}{f}\right)''' + (\kappa^2 - 1)\left(\frac{\vec{c}\,'}{f}\right)' = 0$$

ile verilen dördüncü mertebeden diferansiyel denklemi sağlar.

İspat: S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike q-slant regle yüzey olduğundan (4.136) ile verilen diferansiyel denklemi sağlar. Aynı zamanda, S yüzeyi açılabilir olduğundan

$$\vec{q} = \frac{\vec{c}\,'}{f}$$

olup, bu eşitlik (4.136) denkleminde yerine yazılırsa istenen sonuca ulaşılır. ■

Teorem 4.4.19. Minkowski 3-uzayında, anadoğruları timelike olan açılabilir bir timelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyinin boğaz çizgisinin konum vektörü, s_1 parametresine göre

(i) $-1 < \kappa < 1$ için

$$\vec{c}(s_1) = \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}}\left(\int \sinh\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right) f(s_1)ds_1,\right.$$
$$\left. \pm\kappa \int f(s_1)ds_1, \int \cosh\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right) f(s_1)ds_1\right)$$

(ii) $\kappa < -1$ veya $\kappa > 1$ için

$$\vec{c}(s_1) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2-1}}\left(\int \cos\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right) f(s_1)ds_1,\right.$$
$$\left. \int \sin\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right) f(s_1)ds_1, \kappa \int f(s_1)ds_1\right)$$

ile verilir.

İspat: S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike q-slant regle yüzey olduğundan Sonuç 4.1.4'ten $\kappa =$ sabit ve (4.136) denkleminden

$$\vec{q}''' + (\kappa^2 - 1)\vec{q}\,' = 0 \tag{4.194}$$

olur. Minkowski 3-uzayının baz vektörlerini $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ olarak alalım. Burada, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ spacelike vektör, $\vec{e}_3$ timelike vektördür. Böylece, yüzeyin anadoğruları olan $\vec{q}$ vektörü

$$\vec{q} = q_1\vec{e}_1 + q_2\vec{e}_2 + q_3\vec{e}_3 \tag{4.195}$$

şeklinde yazılabilir. S yüzeyi q-slant regle yüzey olduğundan yüzeyin anadoğruları sabit bir doğrultuyla sabit açı yapar.

(i) $-1 < \kappa < 1$ için,

genelliği bozmadan bu sabit doğrultuyu $\vec{e}_2$ seçelim. Bu takdirde, $\vec{q}$ ile $\vec{e}_2$ arasındaki sabit Lorentziyen açı θ olmak üzere

$$|\langle \vec{q}, \vec{e}_2 \rangle| = \sinh\theta = \text{sabit} \Rightarrow |q_2| = \sinh\theta = \text{sabit}$$

bulunur. $\vec{q}$ vektörü timelike ve birim vektör olduğundan, (4.195) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}, \vec{q} \rangle = -1 &\Rightarrow q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 = -1 \\ &\Rightarrow q_1^2 - q_3^2 = -1 - \sinh^2\theta \\ &\Rightarrow q_3^2 + q_1^2 = \cosh^2\theta \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $t = t(s_1)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere son denklemin genel çözümü

$$\begin{cases} q_1 = \cosh\theta \sinh(t(s_1)) \\ q_3 = \cosh\theta \cosh(t(s_1)) \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece $\vec{q}$ vektörü

$$\vec{q} = \cosh\theta \sinh(t(s_1))\vec{e}_1 \pm \sinh\theta\vec{e}_2 + \cosh\theta \cosh(t(s_1))\vec{e}_3$$

halini alır. Buradan,

$$\vec{q}' = \cosh\theta\, t'(s_1) \cosh(t(s_1))\vec{e}_1 + \cosh\theta\, t'(s_1) \sinh(t(s_1))\vec{e}_3$$

olup, bu vektör birim ve spacelike vektör olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}', \vec{q}' \rangle = 1 &\Rightarrow \cosh^2\theta\, [t'(s_1)]^2 \cosh^2(t(s_1)) - \cosh^2\theta\, [t'(s_1)]^2 \sinh^2(t(s_1)) = 1 \\ &\Rightarrow \cosh^2\theta\, [t'(s_1)]^2 = 1 \\ &\Rightarrow t'(s_1) = \frac{1}{\cosh\theta} \\ &\Rightarrow t(s_1) = \frac{s_1}{\cosh\theta} + n, n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $t \to t + n$ parametre değişimi sayesinde n sabiti elenir ve

$$t(s_1) = \frac{s_1}{\cosh\theta} \tag{4.196}$$

bulunur. Aynı zamanda, $\vec{q}$ vektörünün bileşenleri (4.194) diferansiyel denklemini sağlayacağından

$$\begin{cases} q_1''' + (\kappa^2 - 1)q_1' = 0 \\ q_3''' + (\kappa^2 - 1)q_3' = 0 \end{cases}$$

olup, buradan

$$\begin{cases} [t''' + (t')^3 + (\kappa^2 - 1)t'] \cosh t + 3t''t' \sinh t = 0 \\ [t''' + (t')^3 + (\kappa^2 - 1)t'] \sinh t + 3t''t' \cosh t = 0 \end{cases}$$

denklem sistemine ulaşılır ve bu sistem indirgenerek

$$\begin{cases} t''' + (t')^3 + (\kappa^2 - 1)t' = 0 \\ t''t' = 0 \end{cases} \tag{4.197}$$

halini alır. (4.197) sisteminin ikinci denkleminden n_1, n_2 reel sabitler olmak üzere

$$t(s_1) = n_1 s_1 + n_2$$

elde edilir. Burada, $t \to t + n_2$ parametre değişimi sayesinde n_2 sabiti elenir ve $t(s_1) = n_1 s_1$ bulunur. Bu eşitlik, (4.197) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$n_1 = \sqrt{1 - \kappa^2}$$

bulunur. Böylece, (4.196) eşitliği kullanılarak

$$\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}} \text{ ve } \sinh\theta = \frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}$$

olup, $\vec{q}$ vektörü

$$\vec{q} = \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}} \left(\sinh\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right), \pm\kappa, \cosh\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right) \right) \tag{4.198}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak, S yüzeyi açılabilir olduğundan

$$\vec{q} = \frac{\vec{c}'}{f}$$

olup,

$$\begin{aligned} \vec{c}(s_1) = \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}} \Bigg(& \int \sinh\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right) f(s_1) ds_1, \\ & \pm\kappa \int f(s_1) ds_1, \int \cosh\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right) f(s_1) ds_1 \Bigg) \end{aligned} \tag{4.199}$$

sonucuna ulaşılır.

(ii) $\kappa < -1$ veya $\kappa > 1$ için

genelliği bozmadan bu sabit doğrultuyu $\vec{e}_3$ seçelim. Bu takdirde, $\vec{q}$ ile $\vec{e}_3$ arasındaki sabit hiperbolik açı θ olmak üzere

$$\langle \vec{q}, \vec{e}_3 \rangle = -\cosh\theta = \text{sabit} \Rightarrow q_3 = \cosh\theta = \text{sabit}$$

bulunur. $\vec{q}$ vektörü timelike ve birim vektör olduğundan, (4.195) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle = -1 &\Rightarrow q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 = -1 \\ &\Rightarrow q_1^2 + q_2^2 = -1 + \cosh^2\theta \\ &\Rightarrow q_1^2 + q_2^2 = \sinh^2\theta\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $t = t(s_1)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere son denklemin genel çözümü

$$\begin{cases} q_1 = \sinh\theta\cos(t(s_1)) \\ q_2 = \sinh\theta\sin(t(s_1)) \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece $\vec{q}$ vektörü

$$\vec{q} = \sinh\theta\cos(t(s_1))\vec{e}_1 + \sinh\theta\sin(t(s_1))\vec{e}_2 + \cosh\theta\vec{e}_3$$

halini alır. Buradan,

$$\vec{q}' = -\sinh\theta\, t'(s_1)\sin(t(s_1))\vec{e}_1 + \sinh\theta\, t'(s_1)\cos(t(s_1))\vec{e}_2$$

olup, bu vektör birim ve spacelike vektör olduğundan

$$\begin{aligned}\langle \vec{q}', \vec{q}' \rangle = 1 &\Rightarrow \sinh^2\theta\,[t'(s_1)]^2\sin^2(t(s_1)) + \sinh^2\theta\,[t'(s_1)]^2\cos^2(t(s_1)) = 1 \\ &\Rightarrow \sinh^2\theta\,[t'(s_1)]^2 = 1 \\ &\Rightarrow t'(s_1) = \frac{1}{\sinh\theta} \\ &\Rightarrow t(s_1) = \frac{s_1}{\sinh\theta} + n, n \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $t \to t + n$ parametre değişimi sayesinde n sabiti elenir ve

$$t(s_1) = \frac{s_1}{\sinh\theta} \tag{4.200}$$

bulunur. Aynı zamanda, $\vec{q}$ vektörünün bileşenleri (4.194) diferansiyel denklemini sağlayacağından

$$\begin{cases} q_1''' + (\kappa^2 - 1)q_1' = 0 \\ q_2''' + (\kappa^2 - 1)q_2' = 0 \end{cases}$$

olup, buradan

$$\begin{cases} [t''' - (t')^3 + (\kappa^2 - 1)t']\sin t + 3t''t'\cos t = 0 \\ [t''' - (t')^3 + (\kappa^2 - 1)t']\cos t - 3t''t'\sin t = 0 \end{cases}$$

denklem sistemine ulaşılır ve bu sistem indirgenerek

$$\begin{cases} t''' - (t')^3 + (\kappa^2 - 1)t' = 0 \\ t''t' = 0 \end{cases} \tag{4.201}$$

halini alır. (4.201) sisteminin ikinci denkleminden n_1, n_2 reel sabitler olmak üzere

$$t(s_1) = n_1 s_1 + n_2$$

elde edilir. Burada, $t \to t + n_2$ parametre değişimi sayesinde n_2 sabiti elenir ve $t(s_1) = n_1 s_1$ bulunur. Bu eşitlik, (4.201) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$n_1 = \sqrt{1 - \kappa^2}$$

bulunur. Böylece, (4.200) eşitliği kullanılarak

$$\sinh\theta = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \text{ ve } \cosh\theta = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - 1}}$$

olup, $\vec{q}$ vektörü

$$\vec{q} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \left(\cos\left(\sqrt{\kappa^2 - 1} s_1\right), \sin\left(\sqrt{\kappa^2 - 1} s_1\right), \kappa \right) \tag{4.202}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak, S yüzeyi açılabilir olduğundan

$$\vec{q} = \frac{\vec{c}'}{f}$$

olup,

$$\begin{aligned} \vec{c}(s_1) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \Bigg(& \int \cos\left(\sqrt{\kappa^2 - 1} s_1\right) f(s_1) ds_1, \\ & \int \sin\left(\sqrt{\kappa^2 - 1} s_1\right) f(s_1) ds_1, \kappa \int f(s_1) ds_1 \Bigg) \end{aligned} \tag{4.203}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 4.4.19'dan, aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Sonuç 4.4.20. Minkowski 3-uzayında, anadoğruları timelike olan açılabilir bir timelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $g_1(s_1) = \sinh\left(\sqrt{1 - \kappa^2} s_1\right)$, $g_2(s_1) = \cos\left(\sqrt{\kappa^2 - 1} s_1\right)$, $h_1(s_1) = \cosh\left(\sqrt{1 - \kappa^2} s_1\right)$ ve $h_2(s_1) = \sin\left(\sqrt{\kappa^2 - 1} s_1\right)$ olmak üzere, yüzeyin s_1 parametresine göre parametrizasyonu

(i) $-1 < \kappa < 1$ için,

$$\begin{aligned} \vec{r}(s_1, v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2}} \Bigg(& \int f g_1 ds_1 + v g_1, \\ & \pm\kappa \left(\int f ds_1 + v \right), \int f h_1 ds_1 + v h_1 \Bigg) \end{aligned} \tag{4.204}$$

(ii) $\kappa < -1$ veya $\kappa > 1$ için,

$$\begin{aligned} \vec{r}(s_1, v) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \Bigg(& \int f g_2 ds_1 + v g_2, \\ & \int f h_2 ds_1 + v h_2, \kappa \left(\int f ds_1 + v \right) \Bigg) \end{aligned} \tag{4.205}$$

şeklindedir.

İspat: S yüzeyi anadoğruları timelike olan açılabilir timelike q-slant olduğundan Teorem 4.4.19'dan, yüzeyin anadoğruları için (4.198) ve (4.202) denklemleri ve boğaz çizgisi için ise (4.199) ve (4.203) denklemleri sağlanır. Bu denklemler,

$$\vec{r}(s_1, v) = \vec{c}(s_1) + v\vec{q}(s_1)$$

denkleminde yerine yazılır ve $g_1(s_1) = \sinh\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right)$, $g_2(s_1) = \cos\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right)$, $h_1(s_1) = \cosh\left(\sqrt{1-\kappa^2}s_1\right)$, $h_2(s_1) = \sin\left(\sqrt{\kappa^2-1}s_1\right)$ alınırsa aranan sonuca ulaşılır. ■

Sonuç 4.4.21. Minkowski 3-uzayında, anadoğruları timelike olan açılabilir bir timelike q-slant S regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $m \in \mathbb{R}$ integrasyon sabiti olmak üzere, yüzeyin s parametresine göre parametrizasyonu

(i) $-1 < \kappa < 1$ için,

$$\vec{r}(s, v) = \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}}\left(\int g_1 ds + v g_1, \pm\kappa\left(s + m + v\right), \int h_1 ds + v h_1\right)$$

(ii) $\kappa < -1$ veya $\kappa > 1$ için,

$$\vec{r}(s, v) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2-1}}\left(\int g_2 ds + v g_2, \int h_2 ds + v h_2, \kappa\left(s + m + v\right)\right)$$

şeklindedir.

İspat: (4.204) ve (4.205) denklemlerinde $f = \frac{ds}{ds_1}$ yazılarak aranan sonuca kolayca ulaşılır. ■

4.4.2. Minkowski 3-uzayında Açılabilir Spacelike ve Timelike h-slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri

Bu bölümde açılabilir spacelike ve timelike h-slant regle yüzeylerin konum vektörleri incelenecek ve bu yüzeylerle ilgili teoremler verilecektir.

4.4.2.1. Açılabilir Spacelike h-slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri

Teorem 4.4.22. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı spacelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, s_1 paramet-

resine göre S yüzeyinin $\vec{h}$ merkez normal vektörü

$$\frac{1}{\kappa}\left[\frac{1}{\kappa'}\left(\vec{h}'' - (1+\kappa^2)\vec{h}\right)\right]' - \vec{h} = 0 \tag{4.206}$$

ile verilen diferansiyel denklemi sağlar.

İspat: S yüzeyi spacelike regle yüzey olduğundan, (2.11) denklemlerinden

$$\vec{h}' = \vec{q} + \kappa\vec{a}$$

olup, bu ifadenin s_1 parametresine göre türevinden

$$\vec{a} = \frac{1}{\kappa'}\left(\vec{h}'' - (1+\kappa^2)\vec{h}\right)$$

bulunur. Son eşitliğin s_1 parametresine göre bir kez daha türevi alınarak (4.206) denklemine ulaşılır. ■

Teorem 4.4.23. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı spacelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, θ açısı $\vec{h}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki sabit açı olmak üzere S yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör ise

$$\kappa = \mp\frac{\tanh\theta s_1}{\sqrt{1-\tanh^2\theta s_1^2}}$$

(ii) $\vec{u}$ timelike vektör ise

$$\kappa = \mp\frac{\coth\theta s_1}{\sqrt{1-\coth^2\theta s_1^2}}$$

olmasıdır.

İspat: Teorem 4.1.9'dan ispat açıktır. ■

Teorem 4.4.24. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı spacelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, θ açısı $\vec{h}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki sabit açı, $n \in \mathbb{R}$, $f = ds/ds_1$ ve $\gamma = ds/dt$ olmak üzere, S yüzeyi açılabilir h-slant regle yüzeyse, S yüzeyinin boğaz çizgisinin $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ konum vektörü

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = \cosh\theta \int f \left[\int \sinh\left[\operatorname{csch}\theta \arcsin(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \pm \int f(\sinh\theta s_1 + n) ds_1 \\ c_3 = \cosh\theta \int f \left[\int \cosh\left[\operatorname{csch}\theta \arcsin(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \end{cases}$$

veya parametrik formda

$$\begin{cases} c_1 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \cos(\sinh\theta t) dt\right] dt \\ c_2 = \pm \int \gamma \left[\cosh\theta \sin(\sinh\theta t) + n\right] dt \\ c_3 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \sin(\sinh\theta t) dt\right] dt \end{cases}$$

(ii) $\vec{u}$ timelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = \sinh\theta \int f \left[\int \cos\left[\operatorname{sech}\theta \arcsin(\coth\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \sinh\theta \int f \left[\int \sin\left[\operatorname{sech}\theta \arcsin(\coth\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_3 = \int f(\cosh\theta s_1 + n) ds_1 \end{cases}$$

veya parametrik formda

$$\begin{cases} c_1 = \sinh^2\theta \int \gamma \left[\int \cos t \cos(\cosh\theta t) dt\right] dt \\ c_2 = \sinh^2\theta \int \gamma \left[\int \sin t \cos(\cosh\theta t) dt\right] dt \\ c_3 = \int \gamma \left[\sinh\theta \sin(\cosh\theta t) + n\right] dt \end{cases}$$

ile verilir.

İspat: S yüzeyi spacelike regle yüzey olduğundan (4.206) ile verilen

$$\frac{1}{\kappa}\left[\frac{1}{\kappa'}\left(\vec{h}'' - (1+\kappa^2)\vec{h}\right)\right]' - \vec{h} = 0$$

denklemi sağlanır.

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör olsun.

Bu takdirde, Teorem 4.4.23'ten

$$\kappa = \mp \frac{\tanh\theta s_1}{\sqrt{1 - \tanh^2\theta s_1^2}}$$

olur. Bu eşitlik (4.206) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(1 - \tanh^2\theta s_1^2\right)\vec{h}''' - 3\tanh^2\theta s_1 \vec{h}'' - \vec{h}' = 0 \tag{4.207}$$

bulunur. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektörleri E_1^3 uzayının baz vektörleri ve $h_1 = h_1(s_1), h_2 = h_2(s_1), h_3 = h_3(s_1)$ fonksiyonları s_1 parametresine bağlı düzgün fonksiyonlar olmak üzere, yüzeyin $\vec{h}$ merkez normal vektörü

$$\vec{h} = h_1\vec{e}_1 + h_2\vec{e}_2 + h_3\vec{e}_3$$

şeklinde yazılabilir. S yüzeyi h-slant regle yüzey olduğundan $\vec{h}$ vektörünün sabit açı yaptığı birim ve sabit $\vec{u}$ vektörünü, genelliği bozmadan, $\vec{e}_2$ olarak seçelim. Bu takdirde, $\|h_2\| = \sinh\theta$ elde edilir. $\vec{h}$ vektörü birim ve timelike vektör olduğundan

$$\begin{aligned}\langle \vec{h}, \vec{h} \rangle = -1 &\Rightarrow h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 = -1 \\ &\Rightarrow h_1^2 - h_3^2 = -1 - \sinh^2\theta \\ &\Rightarrow h_3^2 - h_1^2 = \cosh^2\theta\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $t = t(s_1)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere son denklemin genel çözümü

$$\begin{cases} h_1 = \cosh\theta \sinh t \\ h_3 = \cosh\theta \cosh t \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece $\vec{h}$ vektörü

$$\vec{h} = (\cosh\theta \sinh t, \pm \sinh\theta, \cosh\theta \cosh t)$$

halini alır. $\vec{h}$ vektörü (4.207) denklemini sağlayacağından

$$\begin{cases} \left(1 - \tanh^2\theta s_1^2\right)\left[t''' + (t')^3\right] - 3\tanh^2\theta s_1 t'' - t' = 0 \\ \left(1 - \tanh^2\theta s_1^2\right) t'' - \tanh^2\theta s_1 t' = 0 \end{cases} \tag{4.208}$$

denklem sistemine ulaşılır. (4.208) sisteminin ikinci denkleminden, $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$t = n_1 \arccos(\tanh\theta s_1) + n_2 \;\text{ ya da }\; t = n_1 \arcsin(\tanh\theta s_1) + n_2$$

elde edilir. Burada, $t = n_1 \arcsin(\tanh\theta s_1) + n_2$ seçilir ve $t \to t + n_2$ dönüşümü yapılarak n_2 sabiti elenirse $t = n_1 \arcsin(\tanh\theta s_1)$ bulunur. $t = n_1 \arcsin(\tanh\theta s_1)$ eşitliği (4.208) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$n_1 = \operatorname{csch}\theta$$

olduğu görülür. Böylece, $t = \operatorname{csch}\theta \arcsin(\tanh\theta s_1)$ olup, $\vec{h}$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} h_1 = \cosh\theta \sinh\left[\operatorname{csch}\theta \arcsin(\tanh\theta s_1)\right] \\ h_2 = \pm\sinh\theta \\ h_3 = \cosh\theta \cosh\left[\operatorname{csch}\theta \arcsin(\tanh\theta s_1)\right] \end{cases}$$

şekline dönüşür. $\vec{q}' = \vec{h}$ olduğundan $\vec{q}$ vektörünün bileşenleri için

$$\begin{cases} q_1 = \cosh\theta \int \sinh\left[\operatorname{csch}\theta \arcsin(\tanh\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \pm\sinh\theta s_1 + n \\ q_3 = \cosh\theta \int \cosh\left[\operatorname{csch}\theta \arcsin(\tanh\theta s_1)\right] ds_1 \end{cases}$$

elde edilir. Bununla birlikte, S yüzeyi açılabilir olduğundan $\vec{c}' = f\vec{q}$ olup, yüzeyin konum vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} c_1 = \cosh\theta \int f \left[\int \sinh\left[\operatorname{csch}\theta \arcsin(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \pm \int f(\sinh\theta s_1 + n) ds_1 \\ c_3 = \cosh\theta \int f \left[\int \cosh\left[\operatorname{csch}\theta \arcsin(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak, $t(s_1) = \operatorname{csch}\theta \arcsin(\tanh\theta s_1)$ seçilip gerekli parametre değişimi yapılarak

$$\begin{cases} c_1 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \cos(\sinh\theta t) dt\right] dt \\ c_2 = \pm \int \gamma \left[\cosh\theta \sin(\sinh\theta t) + n\right] dt \\ c_3 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \sin(\sinh\theta t) dt\right] dt \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır.

(ii) $\vec{u}$ timelike vektör olsun.

Bu takdirde, Teorem 4.4.23'ten

$$\kappa = \mp \frac{\coth\theta s_1}{\sqrt{1 - \coth^2\theta s_1^2}}$$

olur. Bu eşitlik (4.206) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(1 - \coth^2\theta s_1^2\right)\vec{h}''' - 3\coth^2\theta s_1 \vec{h}'' - \vec{h}' = 0 \tag{4.209}$$

bulunur. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektörleri E_1^3 uzayının baz vektörleri ve $h_1 = h_1(s_1), h_2 = h_2(s_1), h_3 = h_3(s_1)$ fonksiyonları s_1 parametresine bağlı düzgün fonksiyonlar olmak üzere, yüzeyin $\vec{h}$ merkez normal vektörü

$$\vec{h} = h_1\vec{e}_1 + h_2\vec{e}_2 + h_3\vec{e}_3$$

şeklinde yazılabilir. S yüzeyi h-slant regle yüzey olduğundan $\vec{h}$ vektörünün sabit açı yaptığı birim ve sabit $\vec{u}$ vektörünü, genelliği bozmadan, $\vec{e}_3$ olarak seçelim. Bu takdirde, $h_3 = \cosh\theta$ elde edilir. $\vec{h}$ vektörü birim ve timelike vektör olduğundan

$$\begin{aligned} \langle\vec{h}, \vec{h}\rangle = -1 &\Rightarrow h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 = -1 \\ &\Rightarrow h_1^2 + h_2^2 = \cosh^2\theta - 1 \\ &\Rightarrow h_1^2 + h_2^2 = \sinh^2\theta \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $t = t(s_1)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere son denklemin genel çözümü

$$\begin{cases} h_1 = \sinh\theta\cos t \\ h_2 = \sinh\theta\sin t \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece $\vec{h}$ vektörü

$$\vec{h} = (\sinh\theta\cos t, \sinh\theta\sin t, \cosh\theta)$$

halini alır. $\vec{h}$ vektörü (4.209) denklemini sağlayacağından

$$\begin{cases} \left(1-\coth^2\theta s_1^2\right)\left[t''' - (t')^3\right] - 3\coth^2\theta s_1 t'' - t' = 0 \\ \left(1-\coth^2\theta s_1^2\right)t'' - \coth^2\theta s_1 t' = 0 \end{cases} \tag{4.210}$$

denklem sistemine ulaşılır. (4.210) sisteminin ikinci denkleminden, $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$t = n_1\arccos(\coth\theta s_1) + n_2 \text{ ya da } t = n_1\arcsin(\coth\theta s_1) + n_2$$

elde edilir. Burada, $t = n_1\arcsin(\coth\theta s_1)+n_2$ seçilir ve $t \to t+n_2$ dönüşümü yapılarak n_2 sabiti elenirse $t = n_1\arcsin(\tanh\theta s_1)$ bulunur. $t = n_1\arcsin(\coth\theta s_1)$ eşitliği (4.210) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$n_1 = \operatorname{sech}\theta$$

olduğu görülür. Böylece, $t = \operatorname{sech}\theta\arcsin(\coth\theta s_1)$ olup, $\vec{h}$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} h_1 = \sinh\theta\cos\left[\operatorname{sech}\theta\arcsin(\coth\theta s_1)\right] \\ h_2 = \sinh\theta\sin\left[\operatorname{sech}\theta\arcsin(\coth\theta s_1)\right] \\ h_3 = \cosh\theta \end{cases}$$

şekline dönüşür. $\vec{q}' = \vec{h}$ olduğundan $\vec{q}$ vektörünün bileşenleri için

$$\begin{cases} q_1 = \sinh\theta\int\cos\left[\operatorname{sech}\theta\arcsin(\coth\theta s_1)\right]ds_1 \\ q_2 = \sinh\theta\int\sin\left[\operatorname{sech}\theta\arcsin(\coth\theta s_1)\right]ds_1 \\ q_3 = \cosh\theta s_1 + n \end{cases}$$

elde edilir. Bununla birlikte, S yüzeyi açılabilir olduğundan $\vec{c}' = f\vec{q}$ olup, yüzeyin konum vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} c_1 = \sinh\theta\int f\left[\int\cos\left[\operatorname{sech}\theta\arcsin(\coth\theta s_1)\right]ds_1\right]ds_1 \\ c_2 = \sinh\theta\int f\left[\int\sin\left[\operatorname{sech}\theta\arcsin(\coth\theta s_1)\right]ds_1\right]ds_1 \\ c_3 = \int f(\cosh\theta s_1 + n)ds_1 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak, $t(s_1) = \operatorname{sech}\theta\arcsin(\coth\theta s_1)$ seçilip gerekli parametre değişimi yapılarak

$$\begin{cases} c_1 = \sinh^2\theta\int\gamma\left[\int\cos t\cos(\cosh\theta t)dt\right]dt \\ c_2 = \sinh^2\theta\int\gamma\left[\int\sin t\cos(\cosh\theta t)dt\right]dt \\ c_3 = \int\gamma\left[\sinh\theta\sin(\cosh\theta t) + n\right]dt \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Sonuç 4.4.25. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı spacelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyi açılabilir h-slant regle yüzey ise

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = \cosh\theta \int f \left[\int \sinh\left[\operatorname{csch}\theta \arcsin(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \pm \int f(\sinh\theta s_1 + n) ds_1 \\ c_3 = \cosh\theta \int f \left[\int \cosh\left[\operatorname{csch}\theta \arcsin(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \cosh\theta \int \sinh\left[\operatorname{csch}\theta \arcsin(\tanh\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \pm \sinh\theta s_1 + n \\ q_3 = \cosh\theta \int \cosh\left[\operatorname{csch}\theta \arcsin(\tanh\theta s_1)\right] ds_1 \end{cases}$$

(ii) $\vec{u}$ timelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = \sinh\theta \int f \left[\int \cos\left[\operatorname{sech}\theta \arcsin(\coth\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \sinh\theta \int f \left[\int \sin\left[\operatorname{sech}\theta \arcsin(\coth\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_3 = \int f(\cosh\theta s_1 + n) ds_1 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \sinh\theta \int \cos\left[\operatorname{sech}\theta \arcsin(\coth\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \sinh\theta \int \sin\left[\operatorname{sech}\theta \arcsin(\coth\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_3 = \cosh\theta s_1 + n \end{cases}$$

olmak üzere yüzeyin konum vektörü s_1 parametresine göre

$$\vec{r}(s_1, v) = \vec{c}(s_1) + v\vec{q}(s_1)$$

ile verilir.

Sonuç 4.4.26. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı spacelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyi açılabilir h-slant regle yüzey ise

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \cos(\sinh\theta t) dt\right] dt \\ c_2 = \pm \int \gamma \left[\cosh\theta \sin(\sinh\theta t) + n\right] dt \\ c_3 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \cosh t \cos(\sinh\theta t) dt\right] dt \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \cosh^2\theta \int \sinh t \cos(\sinh\theta t) dt \\ q_2 = \pm \cosh\theta \sin(\sinh\theta t) + n \\ q_3 = \cosh^2\theta \int \cosh t \cos(\sinh\theta t) dt \end{cases}$$

(ii) $\vec{u}$ timelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = \sinh^2\theta \int \gamma \left[\int \cos t \cos(\cosh\theta t)dt\right] dt \\ c_2 = \sinh^2\theta \int \gamma \left[\int \sin t \cos(\cosh\theta t)dt\right] dt \\ c_3 = \int \gamma \left[\sinh\theta \sin(\cosh\theta t) + n\right] dt \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \sinh^2\theta \int \cos t \cos(\cosh\theta t)dt \\ q_2 = \sinh^2\theta \int \sin t \cos(\cosh\theta t)dt \\ q_3 = \sinh\theta \sin(\cosh\theta t) + n \end{cases}$$

olmak üzere yüzeyin konum vektörü t parametresine göre

$$\vec{r}(t,v) = \vec{c}(t) + v\vec{q}(t)$$

ile verilir.

Teorem 4.4.24'e benzer şekilde aşağıdaki teoreme ulaşılır:

Teorem 4.4.27. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı spacelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, θ açısı $\vec{h}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki sabit açı, $n \in \mathbb{R}$, $f = ds/ds_1$ ve $\gamma = ds/dt$ olmak üzere, S yüzeyi açılabilir h-slant regle yüzeyse, S yüzeyinin boğaz çizgisinin $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ konum vektörü

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = \cosh\theta \int f \left[\int \sinh\left[\operatorname{csch}\theta \arccos(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \pm \int f(\sinh\theta s_1 + n) ds_1 \\ c_3 = \cosh\theta \int f \left[\int \cosh\left[\operatorname{csch}\theta \arccos(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \end{cases}$$

veya parametrik formda

$$\begin{cases} c_1 = -\cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \cos(\sinh\theta t)dt\right] dt \\ c_2 = \pm \int \gamma \left[\cosh\theta \sin(\sinh\theta t) + n\right] dt \\ c_3 = -\cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \cos(\sinh\theta t)dt\right] dt \end{cases}$$

(ii) $\vec{u}$ timelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = \sinh\theta \int f \left[\int \cos\left[\operatorname{sech}\theta \arccos(\coth\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \sinh\theta \int f \left[\int \sin\left[\operatorname{sech}\theta \arccos(\coth\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_3 = \int f(\cosh\theta s_1 + n) ds_1 \end{cases}$$

veya parametrik formda

$$\begin{cases} c_1 = -\sinh^2\theta \int \gamma \left[\int \cos t \cos(\cosh\theta t)dt\right] dt \\ c_2 = -\sinh^2\theta \int \gamma \left[\int \sin t \cos(\cosh\theta t)dt\right] dt \\ c_3 = \int \gamma \left[\sinh\theta \cos(\cosh\theta t) + n\right] dt \end{cases}$$

ile verilir.

Teorem 4.4.27'ye bağlı olarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

Sonuç 4.4.28. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı spacelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyi açılabilir h-slant regle yüzey ise

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = \cosh\theta \int f \left[\int \sinh\left[\operatorname{csch}\theta \arccos(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \pm \int f(\sinh\theta s_1 + n) ds_1 \\ c_3 = \cosh\theta \int f \left[\int \cosh\left[\operatorname{csch}\theta \arccos(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \cosh\theta \int \sinh\left[\operatorname{csch}\theta \arccos(\tanh\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \pm \sinh\theta s_1 + n \\ q_3 = \cosh\theta \int \cosh\left[\operatorname{csch}\theta \arccos(\tanh\theta s_1)\right] ds_1 \end{cases}$$

(ii) $\vec{u}$ timelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = \sinh\theta \int f \left[\int \cos\left[\operatorname{sech}\theta \arccos(\coth\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \sinh\theta \int f \left[\int \sin\left[\operatorname{sech}\theta \arccos(\coth\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_3 = \int f(\cosh\theta s_1 + n) ds_1 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \sinh\theta \int \cos\left[\operatorname{sech}\theta \arccos(\coth\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \sinh\theta \int \sin\left[\operatorname{sech}\theta \arccos(\coth\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_3 = \cosh\theta s_1 + n \end{cases}$$

olmak üzere yüzeyin konum vektörü s_1 parametresine göre

$$\vec{r}(s_1, v) = \vec{c}(s_1) + v\vec{q}(s_1)$$

ile verilir.

Sonuç 4.4.29. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı spacelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyi açılabilir h-slant regle yüzey ise

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = -\cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \cos(\sinh\theta t) dt\right] dt \\ c_2 = \pm \int \gamma \left[\cosh\theta \sin(\sinh\theta t) + n\right] dt \\ c_3 = -\cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \cos(\sinh\theta t) dt\right] dt \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = -\cosh^2\theta \int \sinh t \cos(\sinh\theta t)dt \\ q_2 = \pm\cosh\theta \sin(\sinh\theta t) + n \\ q_3 = -\cosh^2\theta \int \sinh t \cos(\sinh\theta t)dt \end{cases}$$

(ii) $\vec{u}$ timelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = -\sinh^2\theta \int \gamma \left[\int \cos t \cos(\cosh\theta t)dt\right] dt \\ c_2 = -\sinh^2\theta \int \gamma \left[\int \sin t \cos(\cosh\theta t)dt\right] dt \\ c_3 = \int \gamma \left[\sinh\theta \cos(\cosh\theta t) + n\right] dt \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = -\sinh^2\theta \int \cos t \cos(\cosh\theta t)dt \\ q_2 = -\sinh^2\theta \int \sin t \cos(\cosh\theta t)dt \\ q_3 = \sinh\theta \cos(\cosh\theta t) + n \end{cases}$$

olmak üzere yüzeyin konum vektörü t parametresine göre

$$\vec{r}(t,v) = \vec{c}(t) + v\vec{q}(t)$$

ile verilir.

4.4.2.2. Anadoğruları Spacelike Olan Açılabilir Timelike h-slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri

Teorem 4.4.30. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, s_1 parametresine göre S yüzeyinin $\vec{h}$ merkez normal vektörü

$$\frac{1}{\kappa}\left[\frac{1}{\kappa'}\left(\vec{h}'' + (1-\kappa^2)\vec{h}\right)\right]' - \vec{h} = 0 \tag{4.211}$$

ile verilen diferansiyel denklemi sağlar.

İspat: S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike regle yüzey olduğundan, (2.13) denklemlerinden

$$\vec{h}' = -\vec{q} + \kappa\vec{a}$$

olup, bu ifadenin s_1 parametresine göre türevinden

$$\vec{a} = \frac{1}{\kappa'}\left(\vec{h}'' + (1-\kappa^2)\vec{h}\right)$$

bulunur. Son eşitliğin s_1 parametresine göre bir kez daha türevi alınarak (4.211) denklemine ulaşılır. ■

Teorem 4.4.31. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, θ açısı $\vec{h}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki sabit açı olmak üzere S yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike ise,

$$\kappa = \mp \frac{\cot \theta s_1}{\sqrt{\cot^2 \theta s_1^2 - 1}}$$

(ii) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike ise,

$$\kappa = \mp \frac{\coth \theta s_1}{\sqrt{1 + \coth^2 \theta s_1^2}}$$

(iii) $\vec{u}$ timelike vektör ise

$$\kappa = \mp \frac{\tanh \theta s_1}{\sqrt{1 + \tanh^2 \theta s_1^2}}$$

olmasıdır.

İspat: Teorem 4.1.9'dan ispat açıktır. ■

Teorem 4.4.32. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, θ açısı $\vec{h}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki sabit açı, $n \in \mathbb{R}$, $f = ds/ds_1$ ve $\gamma = ds/dt$ olmak üzere, S yüzeyi açılabilir h-slant regle yüzeyse, S yüzeyinin boğaz çizgisinin $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ konum vektörü

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike ise

$$\begin{cases} c_1 = \sin\theta \int f \left[\int \cosh \left[\sec\theta \operatorname{arccosh}(\cot \theta s_1) \right] ds_1 \right] ds_1 \\ c_2 = \int f(\cos \theta s_1 + n) ds_1 \\ c_3 = \sin\theta \int f \left[\int \sinh \left[\sec\theta \operatorname{arccosh}(\cot \theta s_1) \right] ds_1 \right] ds_1 \end{cases}$$

veya parametrik formda

$$\begin{cases} c_1 = \sin^2\theta \int \gamma \left[\int \cosh t \sinh(\cos \theta t) dt \right] dt \\ c_2 = \int \gamma \left[\sin\theta \cosh(\cos \theta t) + n \right] dt \\ c_3 = \sin^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \sinh(\cos \theta t) dt \right] dt \end{cases}$$

(ii) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike ise

$$\begin{cases} c_1 = \sinh\theta \int f \left[\int \sinh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arcsinh}(\coth\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \pm \int f \left[\cosh\theta s_1 + n\right] ds_1 \\ c_3 = \sinh\theta \int f \left[\int \cosh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arcsinh}(\coth\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \end{cases}$$

veya parametrik formda

$$\begin{cases} c_1 = \sinh^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \cosh(\cosh\theta t) dt\right] dt \\ c_2 = \pm \int \gamma \left[\sinh\theta \sinh(\cosh\theta t) + n\right] dt \\ c_3 = \sinh^2\theta \int \gamma \left[\int \cosh t \cosh(\cosh\theta t) dt\right] dt \end{cases}$$

(iii) $\vec{u}$ timelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = \cosh\theta \int f \left[\int \cos\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arcsinh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \cosh\theta \int f \left[\int \sin\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arcsinh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_3 = \pm \int f \left[\sinh\theta s_1 + n\right] ds_1 \end{cases}$$

veya parametrik formda

$$\begin{cases} c_1 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \cos t \cosh(\sinh\theta t) dt\right] dt \\ c_2 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \sin t \cosh(\sinh\theta t) dt\right] dt \\ c_3 = \pm \int \gamma \left[\cosh\theta \sinh(\sinh\theta t) + n\right] dt \end{cases}$$

ile verilir.

İspat: S yüzeyi anadoğruları spacelike olan timelike regle yüzey olduğundan (4.211) ile verilen

$$\frac{1}{\kappa}\left[\frac{1}{\kappa'}\left(\vec{h}'' + (1-\kappa^2)\vec{h}\right)\right]' - \vec{h} = 0$$

denklemi sağlanır.

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike olsun.

Bu takdirde, Teorem 4.4.31'den

$$\kappa = \mp \frac{\cot\theta s_1}{\sqrt{\cot^2\theta s_1^2 - 1}}$$

olur. Bu eşitlik (4.211) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\cot^2\theta s_1^2 - 1\right)\vec{h}''' + 3\cot^2\theta s_1 \vec{h}'' - \vec{h}' = 0 \tag{4.212}$$

bulunur. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektörleri E_1^3 uzayının baz vektörleri ve $h_1 = h_1(s_1), h_2 = h_2(s_1), h_3 = h_3(s_1)$ fonksiyonları s_1 parametresine bağlı düzgün fonksiyonlar olmak üzere, yüzeyin $\vec{h}$ merkez normal vektörü

$$\vec{h} = h_1\vec{e}_1 + h_2\vec{e}_2 + h_3\vec{e}_3$$

şeklinde yazılabilir. S yüzeyi h-slant regle yüzey olduğundan $\vec{h}$ vektörünün sabit açı yaptığı birim ve sabit $\vec{u}$ vektörünü, genelliği bozmadan, $\vec{e}_2$ olarak seçelim. Bu takdirde, $h_2 = \cos\theta$ elde edilir. $\vec{h}$ vektörü birim ve spacelike vektör olduğundan

$$\begin{aligned}\langle \vec{h}, \vec{h} \rangle = 1 &\Rightarrow h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 = 1 \\ &\Rightarrow h_1^2 - h_3^2 = 1 - \cos^2\theta \\ &\Rightarrow h_1^2 - h_3^2 = \sin^2\theta\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $t = t(s_1)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere son denklemin genel çözümü

$$\begin{cases} h_1 = \sin\theta\cosh t \\ h_3 = \sin\theta\sinh t \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece $\vec{h}$ vektörü

$$\vec{h} = (\sin\theta\cosh t, \cos\theta, \sin\theta\sinh t)$$

halini alır. $\vec{h}$ vektörü (4.212) denklemini sağlayacağından

$$\begin{cases} (\cot^2\theta s_1^2 - 1)\left[t''' + (t')^3\right] + 3\cot^2\theta s_1 t'' - t' = 0 \\ (\cot^2\theta s_1^2 - 1)\, t'' + \cot^2\theta s_1 t' = 0 \end{cases} \tag{4.213}$$

denklem sistemine ulaşılır. (4.213) sisteminin ikinci denkleminden, $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$t = n_1 \operatorname{arccosh}(\cot\theta s_1) + n_2$$

elde edilir. Burada, $t \to t + n_2$ dönüşümü yapılarak n_2 sabiti elenir ve $t = n_1 \operatorname{arccosh}(\cot\theta s_1)$ bulunur. $t = n_1 \operatorname{arccosh}(\cot\theta s_1)$ eşitliği (4.213) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$n_1 = \sec\theta$$

olduğu görülür. Böylece, $t = \sec\theta \operatorname{arccosh}(\cot\theta s_1)$ olup, $\vec{h}$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} h_1 = \sin\theta\cosh\left[\sec\theta \operatorname{arccosh}(\cot\theta s_1)\right] \\ h_2 = \cos\theta \\ h_3 = \sin\theta\sinh\left[\sec\theta \operatorname{arccosh}(\cot\theta s_1)\right] \end{cases}$$

şekline dönüşür. $\vec{q}' = \vec{h}$ olduğundan $\vec{q}$ vektörünün bileşenleri için

$$\begin{cases} q_1 = \sin\theta \int \cosh\left[\sec\theta \operatorname{arccosh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \cos\theta s_1 + n \\ q_3 = \sin\theta \int \sinh\left[\sec\theta \operatorname{arccosh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1 \end{cases}$$

elde edilir. Bununla birlikte, S yüzeyi açılabilir olduğundan $\vec{c}' = f\vec{q}$ olup, yüzeyin konum vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} c_1 = \sin\theta \int f \left[\int \cosh\left[\sec\theta \operatorname{arccosh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \int f(\cos\theta s_1 + n) ds_1 \\ c_3 = \sin\theta \int f \left[\int \sinh\left[\sec\theta \operatorname{arccosh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak, $t(s_1) = \sec\theta \operatorname{arccosh}(\cot\theta s_1)$ seçilip gerekli parametre değişimi yapılarak

$$\begin{cases} c_1 = \sin^2\theta \int \gamma \left[\int \cosh t \sinh(\cos\theta t) dt\right] dt \\ c_2 = \int \gamma \left[\sin\theta \cosh(\cos\theta t) + n\right] dt \\ c_3 = \sin^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \sinh(\cos\theta t) dt\right] dt \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır.

(ii) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike olsun.

Bu takdirde, Teorem 4.4.31'den

$$\kappa = \mp \frac{\coth\theta s_1}{\sqrt{1 + \coth^2\theta s_1^2}}$$

olur. Bu eşitlik (4.211) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(1 + \coth^2\theta s_1^2\right) \vec{h}''' + 3\coth^2\theta s_1 \vec{h}'' + \vec{h}' = 0 \tag{4.214}$$

bulunur. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektörleri E_1^3 uzayının baz vektörleri ve $h_1 = h_1(s_1), h_2 = h_2(s_1), h_3 = h_3(s_1)$ fonksiyonları s_1 parametresine bağlı düzgün fonksiyonlar olmak üzere, yüzeyin $\vec{h}$ merkez normal vektörü

$$\vec{h} = h_1\vec{e}_1 + h_2\vec{e}_2 + h_3\vec{e}_3$$

şeklinde yazılabilir. S yüzeyi h-slant regle yüzey olduğundan $\vec{h}$ vektörünün sabit açı yaptığı birim ve sabit $\vec{u}$ vektörünü, genelliği bozmadan, $\vec{e}_2$ olarak seçelim. Bu takdirde, $h_2 = \pm\cosh\theta$ elde edilir. $\vec{h}$ vektörü birim ve spacelike vektör olduğundan

$$\begin{aligned} \langle\vec{h}, \vec{h}\rangle = 1 &\Rightarrow h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 = 1 \\ &\Rightarrow h_1^2 - h_3^2 = 1 - \cosh^2\theta \\ &\Rightarrow h_1^3 - h_1^2 = \sinh^2\theta \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $t = t(s_1)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere son denklemin genel çözümü

$$\begin{cases} h_1 = \sinh\theta \sinh t \\ h_3 = \sinh\theta \cosh t \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece $\vec{h}$ vektörü

$$\vec{h} = (\sinh\theta \sinh t, \pm\cosh\theta, \sinh\theta\cosh t)$$

halini alır. $\vec{h}$ vektörü (4.214) denklemini sağlayacağından

$$\begin{cases} \left(1+\coth^2\theta s_1^2\right)\left[t''' + (t')^3\right] + 3\coth^2\theta s_1 t'' + t' = 0 \\ \left(1+\coth^2\theta s_1^2\right) t'' + \coth^2\theta s_1 t' = 0 \end{cases} \tag{4.215}$$

denklem sistemine ulaşılır. (4.215) sisteminin ikinci denkleminden, $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$t = n_1 \operatorname{arcsinh}(\coth\theta s_1) + n_2$$

elde edilir. Burada, $t \to t + n_2$ dönüşümü yapılarak n_2 sabiti elenir ve $t = n_1 \operatorname{arcsinh}(\coth\theta s_1)$ bulunur. $t = n_1 \operatorname{arcsinh}(\coth\theta s_1)$ eşitliği (4.215) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$n_1 = \operatorname{sech}\theta$$

olduğu görülür. Böylece, $t = \operatorname{sech}\theta \operatorname{arcsinh}(\coth\theta s_1)$ olup, $\vec{h}$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} h_1 = \sinh\theta \sinh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arcsinh}(\coth\theta s_1)\right] \\ h_2 = \pm\cosh\theta \\ h_3 = \sinh\theta\cosh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arcsinh}(\coth\theta s_1)\right] \end{cases}$$

şekline dönüşür. $\vec{q}' = \vec{h}$ olduğundan $\vec{q}$ vektörünün bileşenleri için

$$\begin{cases} q_1 = \sinh\theta \int \sinh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arcsinh}(\coth\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \pm\cosh\theta s_1 + n \\ q_3 = \sinh\theta \int \cosh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arcsinh}(\coth\theta s_1)\right] ds_1 \end{cases}$$

elde edilir. Bununla birlikte, S yüzeyi açılabilir olduğundan $\vec{c}' = f\vec{q}$ olup, yüzeyin konum vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} c_1 = \sinh\theta \int f\left[\int \sinh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arcsinh}(\coth\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \pm\int f\left[\cosh\theta s_1 + n\right] ds_1 \\ c_3 = \sinh\theta \int f\left[\int \cosh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arcsinh}(\coth\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak, $t(s_1) = \operatorname{sech}\theta \operatorname{arcsinh}(\coth\theta s_1)$ seçilip gerekli parametre değişimi yapılarak

$$\begin{cases} c_1 = \sinh^2\theta \int \gamma\left[\int \sinh t\cosh(\cosh\theta t) dt\right] dt \\ c_2 = \pm\int \gamma\left[\sinh\theta\sinh(\cosh\theta t) + n\right] dt \\ c_3 = \sinh^2\theta \int \gamma\left[\int \cosh t\cosh(\cosh\theta t) dt\right] dt \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır.

(iii) $\vec{u}$ timelike vektör olsun.

Bu takdirde, Teorem 4.4.31'den

$$\kappa = \mp \frac{\tanh \theta s_1}{\sqrt{1 + \tanh^2 \theta s_1^2}}$$

olur. Bu eşitlik (4.211) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(1 + \tanh^2 \theta s_1^2\right) \vec{h}''' + 3 \tanh^2 \theta s_1 \vec{h}'' + \vec{h}' = 0 \tag{4.216}$$

bulunur. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektörleri E_1^3 uzayının baz vektörleri ve $h_1 = h_1(s_1), h_2 = h_2(s_1), h_3 = h_3(s_1)$ fonksiyonları s_1 parametresine bağlı düzgün fonksiyonlar olmak üzere, yüzeyin $\vec{h}$ merkez normal vektörü

$$\vec{h} = h_1 \vec{e}_1 + h_2 \vec{e}_2 + h_3 \vec{e}_3$$

şeklinde yazılabilir. S yüzeyi h-slant regle yüzey olduğundan $\vec{h}$ vektörünün sabit açı yaptığı birim ve sabit $\vec{u}$ vektörünü, genelliği bozmadan, $\vec{e}_3$ olarak seçelim. Bu takdirde, $h_3 = \pm \sinh \theta$ elde edilir. $\vec{h}$ vektörü birim ve spacelike vektör olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \vec{h}, \vec{h} \rangle = 1 &\Rightarrow h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 = 1 \\ &\Rightarrow h_1^2 + h_2^2 = 1 + \sinh^2 \theta \\ &\Rightarrow h_1^2 + h_2^2 = \cosh^2 \theta \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $t = t(s_1)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere son denklemin genel çözümü

$$\begin{cases} h_1 = \cosh \theta \cos t \\ h_2 = \cosh \theta \sin t \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece $\vec{h}$ vektörü

$$\vec{h} = (\cosh \theta \cos t, \cosh \theta \sin t, \pm \sinh \theta)$$

halini alır. $\vec{h}$ vektörü (4.216) denklemini sağlayacağından

$$\begin{cases} \left(1 + \tanh^2 \theta s_1^2\right) [t''' - (t')^3] + 3 \tanh^2 \theta s_1 t'' + t' = 0 \\ \left(1 + \tanh^2 \theta s_1^2\right) t'' + \tanh^2 \theta s_1 t' = 0 \end{cases} \tag{4.217}$$

denklem sistemine ulaşılır. (4.217) sisteminin ikinci denkleminden, $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$t = n_1 \operatorname{arcsinh}(\tanh \theta s_1) + n_2$$

elde edilir. Burada, $t \to t + n_2$ dönüşümü yapılarak n_2 sabiti elenir ve $t = n_1 \operatorname{arcsinh}(\tanh \theta s_1)$ bulunur. $t = n_1 \operatorname{arcsinh}(\tanh \theta s_1)$ eşitliği (4.217) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$n_1 = \operatorname{csch} \theta$$

olduğu görülür. Böylece, $t = \operatorname{csch}\theta \operatorname{arcsinh}(\tanh\theta s_1)$ olup, $\vec{h}$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} h_1 = \cosh\theta \cos\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arcsinh}(\tanh\theta s_1)\right] \\ h_2 = \cosh\theta \sin\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arcsinh}(\tanh\theta s_1)\right] \\ h_3 = \pm\sinh\theta \end{cases}$$

şekline dönüşür. $\vec{q}' = \vec{h}$ olduğundan $\vec{q}$ vektörünün bileşenleri için

$$\begin{cases} q_1 = \cosh\theta \int \cos\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arcsinh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \cosh\theta \int \sin\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arcsinh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_3 = \pm\sinh\theta s_1 + n \end{cases}$$

elde edilir. Bununla birlikte, S yüzeyi açılabilir olduğundan $\vec{c}' = f\vec{q}$ olup, yüzeyin konum vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} c_1 = \cosh\theta \int f \left[\int \cos\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arcsinh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \cosh\theta \int f \left[\int \sin\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arcsinh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_3 = \pm\int f \left[\sinh\theta s_1 + n\right] ds_1 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak, $t(s_1) = \operatorname{csch}\theta \operatorname{arcsinh}(\tanh\theta s_1)$ seçilip gerekli parametre değişimi yapılarak

$$\begin{cases} c_1 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \cos t \cosh(\sinh\theta t) dt\right] dt \\ c_2 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \sin t \cosh(\sinh\theta t) dt\right] dt \\ c_3 = \pm\int \gamma \left[\cosh\theta \sinh(\sinh\theta t) + n\right] dt \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Sonuç 4.4.33. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyi açılabilir h-slant regle yüzey ise

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike ise

$$\begin{cases} c_1 = \sin\theta \int f \left[\int \cosh\left[\sec\theta \operatorname{arccosh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \int f(\cos\theta s_1 + n) ds_1 \\ c_3 = \sin\theta \int f \left[\int \sinh\left[\sec\theta \operatorname{arccosh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \sin\theta \int \cosh\left[\sec\theta \operatorname{arccosh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \cos\theta s_1 + n \\ q_3 = \sin\theta \int \sinh\left[\sec\theta \operatorname{arccosh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1 \end{cases}$$

(ii) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike ise

$$\begin{cases} c_1 = \sinh\theta \int f \left[\int \sinh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arcsinh}(\coth\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \pm\int f \left[\cosh\theta s_1 + n\right] ds_1 \\ c_3 = \sinh\theta \int f \left[\int \cosh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arcsinh}(\coth\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \sinh\theta \int \sinh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arcsinh}(\coth\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \pm\cosh\theta s_1 + n \\ q_3 = \sinh\theta \int \cosh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arcsinh}(\coth\theta s_1)\right] ds_1 \end{cases}$$

(iii) $\vec{u}$ timelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = \cosh\theta \int f \left[\int \cos\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arcsinh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \cosh\theta \int f \left[\int \sin\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arcsinh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_3 = \pm\int f\left[\sinh\theta s_1 + n\right] ds_1 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \cosh\theta \int \cos\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arcsinh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \cosh\theta \int \sin\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arcsinh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_3 = \pm\sinh\theta s_1 + n \end{cases}$$

olmak üzere yüzeyin konum vektörü s_1 parametresine göre

$$\vec{r}(s_1, v) = \vec{c}(s_1) + v\vec{q}(s_1)$$

ile verilir.

Sonuç 4.4.34. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları spacelike olan timelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyi açılabilir h-slant regle yüzey ise

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike ise

$$\begin{cases} c_1 = \sin^2\theta \int \gamma \left[\int \cosh t \sinh(\cos\theta t) dt\right] dt \\ c_2 = \int \gamma \left[\sin\theta \cosh(\cos\theta t) + n\right] dt \\ c_3 = \sin^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \sinh(\cos\theta t) dt\right] dt \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \sin^2\theta \int \cosh t \sinh(\cos\theta t) dt \\ q_2 = \sin\theta \cosh(\cos\theta t) + n \\ q_3 = \sin^2\theta \int \sinh t \sinh(\cos\theta t) dt \end{cases}$$

(ii) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike ise

$$\begin{cases} c_1 = \sinh^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \cosh(\cosh\theta t) dt\right] dt \\ c_2 = \pm\int \gamma \left[\sinh\theta \sinh(\cosh\theta t) + n\right] dt \\ c_3 = \sinh^2\theta \int \gamma \left[\int \cosh t \cosh(\cosh\theta t) dt\right] dt \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \sinh^2\theta \int \sinh t \cosh(\cosh\theta t) dt \\ q_2 = \pm\sinh\theta \sinh(\cosh\theta t) + n \\ q_3 = \sinh^2\theta \int \cosh t \cosh(\cosh\theta t) dt \end{cases}$$

(iii) $\vec{u}$ timelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \cos t \cosh(\sinh\theta t)dt\right] dt \\ c_2 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \sin t \cosh(\sinh\theta t)dt\right] dt \\ c_3 = \pm \int \gamma \left[\cosh\theta \sinh(\sinh\theta t) + n\right] dt \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \cosh^2\theta \int \cos t \cosh(\sinh\theta t)dt \\ q_2 = \cosh^2\theta \int \sin t \cosh(\sinh\theta t)dt \\ q_3 = \pm \cosh\theta \sinh(\sinh\theta t) + n \end{cases}$$

olmak üzere yüzeyin konum vektörü t parametresine göre

$$\vec{r}(t,v) = \vec{c}(t) + v\vec{q}(t)$$

ile verilir.

4.4.2.3. Anadoğruları Timelike Olan Açılabilir Timelike h-slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri

Teorem 4.4.35. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, s_1 parametresine göre S yüzeyinin $\vec{h}$ merkez normal vektörü

$$\frac{1}{\kappa}\left[\frac{1}{\kappa'}\left(\vec{h}'' + (\kappa^2 - 1)\vec{h}\right)\right]' + \vec{h} = 0 \tag{4.218}$$

ile verilen diferansiyel denklemi sağlar.

İspat: S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike regle yüzey olduğundan, (2.15) denklemlerinden

$$\vec{h}' = \vec{q} + \kappa\vec{a}$$

olup, bu ifadenin s_1 parametresine göre türevinden

$$\vec{a} = \frac{1}{\kappa'}\left(\vec{h}'' + (\kappa^2 - 1)\vec{h}\right)$$

bulunur. Son eşitliğin s_1 parametresine göre bir kez daha türevi alınarak (4.211) denklemine ulaşılır. ■

Teorem 4.4.36. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun.

Bu takdirde, θ açısı $\vec{h}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki sabit açı olmak üzere S yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike ise,

$$\kappa = \mp \frac{\cot \theta s_1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta s_1^2}}$$

(ii) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike ise,

$$\kappa = \mp \frac{\coth \theta s_1}{\sqrt{\coth^2 \theta s_1^2 - 1}}$$

(iii) $\vec{u}$ timelike vektör ise,

$$\kappa = \mp \frac{\tanh \theta s_1}{\sqrt{\tanh^2 \theta s_1^2 - 1}}$$

olmasıdır.

İspat: Teorem 4.1.9'dan ispat açıktır. ■

Teorem 4.4.37. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, θ açısı $\vec{h}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki sabit açı, $n \in \mathbb{R}$, $f = ds/ds_1$ ve $\gamma = ds/dt$ olmak üzere, S yüzeyi açılabilir h-slant regle yüzeyse, S yüzeyinin boğaz çizgisinin $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ konum vektörü

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike ise

$$\begin{cases} c_1 = \sin\theta \int f \left[\int \cosh\left[\sec\theta \operatorname{arcsinh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1 \right] ds_1 \\ c_2 = \int f(\cos\theta s_1 + n) ds_1 \\ c_3 = \sin\theta \int f \left[\int \sinh\left[\sec\theta \operatorname{arcsinh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1 \right] ds_1 \end{cases}$$

veya parametrik formda

$$\begin{cases} c_1 = \sin^2\theta \int \gamma \left[\int \cosh t \cosh(\cos\theta t) dt \right] dt \\ c_2 = \int \gamma \left[\sin\theta \sinh(\cos\theta t) + n \right] dt \\ c_3 = \sin^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \cosh(\cos\theta t) dt \right] dt \end{cases}$$

(ii) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike ise

$$\begin{cases} c_1 = \sinh\theta \int f \left[\int \sinh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arccosh}(\coth\theta s_1)\right] ds_1 \right] ds_1 \\ c_2 = \pm \int f \left[\cosh\theta s_1 + n\right] ds_1 \\ c_3 = \sinh\theta \int f \left[\int \cosh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arccosh}(\coth\theta s_1)\right] ds_1 \right] ds_1 \end{cases}$$

veya parametrik formda

$$\begin{cases} c_1 = \sinh^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \sinh(\cosh\theta t)dt\right] dt \\ c_2 = \pm \int \gamma \left[\sinh\theta \cosh(\cosh\theta t) + n\right] dt \\ c_3 = \sinh^2\theta \int \gamma \left[\int \cosh t \sinh(\cosh\theta t)dt\right] dt \end{cases}$$

(iii) $\vec{u}$ timelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = \cosh\theta \int f \left[\int \cos\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arccosh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \cosh\theta \int f \left[\int \sin\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arccosh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_3 = \pm \int f \left[\sinh\theta s_1 + n\right] ds_1 \end{cases}$$

veya parametrik formda

$$\begin{cases} c_1 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \cos t \sinh(\sinh\theta t)dt\right] dt \\ c_2 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \sin t \sinh(\sinh\theta t)dt\right] dt \\ c_3 = \pm \int \gamma \left[\cosh\theta \cosh(\sinh\theta t) + n\right] dt \end{cases}$$

ile verilir.

İspat: S yüzeyi anadoğruları timelike olan timelike regle yüzey olduğundan (4.218) ile verilen

$$\frac{1}{\kappa}\left[\frac{1}{\kappa'}\left(\vec{h}'' + (\kappa^2 - 1)\vec{h}\right)\right]' + \vec{h} = 0$$

denklemi sağlanır.

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike olsun.

Bu takdirde, Teorem 4.4.36'dan

$$\kappa = \mp \frac{\cot\theta s_1}{\sqrt{1 + \cot^2\theta s_1^2}}$$

olur. Bu eşitlik (4.218) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(1 + \cot^2\theta s_1^2\right)\vec{h}''' + 3\cot^2\theta s_1 \vec{h}'' - \vec{h}' = 0 \tag{4.219}$$

bulunur. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektörleri E_1^3 uzayının baz vektörleri ve $h_1 = h_1(s_1), h_2 = h_2(s_1), h_3 = h_3(s_1)$ fonksiyonları s_1 parametresine bağlı düzgün fonksiyonlar olmak üzere, yüzeyin $\vec{h}$ merkez normal vektörü

$$\vec{h} = h_1\vec{e}_1 + h_2\vec{e}_2 + h_3\vec{e}_3$$

şeklinde yazılabilir. S yüzeyi h-slant regle yüzey olduğundan $\vec{h}$ vektörünün sabit açı yaptığı birim ve sabit $\vec{u}$ vektörünü, genelliği bozmadan, $\vec{e}_2$ olarak seçelim. Bu takdirde,

$h_2 = \cos\theta$ elde edilir. $\vec{h}$ vektörü birim ve spacelike vektör olduğundan

$$\begin{aligned}\langle \vec{h}, \vec{h} \rangle = 1 &\Rightarrow h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 = 1 \\ &\Rightarrow h_1^2 - h_3^2 = 1 - \cos^2\theta \\ &\Rightarrow h_1^2 - h_3^2 = \sin^2\theta\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $t = t(s_1)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere son denklemin genel çözümü

$$\begin{cases} h_1 = \sin\theta \cosh t \\ h_3 = \sin\theta \sinh t \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece $\vec{h}$ vektörü

$$\vec{h} = (\sin\theta\cosh t, \cos\theta, \sin\theta \sinh t)$$

halini alır. $\vec{h}$ vektörü (4.219) denklemini sağlayacağından

$$\begin{cases} (1 + \cot^2\theta s_1^2)\left[t''' + (t')^3\right] + 3\cot^2\theta s_1 t'' - t' = 0 \\ (1 + \cot^2\theta s_1^2)\, t'' + \cot^2\theta s_1 t' = 0 \end{cases} \tag{4.220}$$

denklem sistemine ulaşılır. (4.220) sisteminin ikinci denkleminden, $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$t = n_1 \operatorname{arcsinh}(\cot\theta s_1) + n_2$$

elde edilir. Burada, $t \to t + n_2$ dönüşümü yapılarak n_2 sabiti elenir ve $t = n_1 \operatorname{arcsinh}(\cot\theta s_1)$ bulunur. $t = n_1 \operatorname{arcsinh}(\cot\theta s_1)$ eşitliği (4.220) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$n_1 = \sec\theta$$

olduğu görülür. Böylece, $t = \sec\theta \operatorname{arcsinh}(\cot\theta s_1)$ olup, $\vec{h}$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} h_1 = \sin\theta \cosh\left[\sec\theta \operatorname{arcsinh}(\cot\theta s_1)\right] \\ h_2 = \cos\theta \\ h_3 = \sin\theta \sinh\left[\sec\theta \operatorname{arcsinh}(\cot\theta s_1)\right] \end{cases}$$

şekline dönüşür. $\vec{q}' = \vec{h}$ olduğundan $\vec{q}$ vektörünün bileşenleri için

$$\begin{cases} q_1 = \sin\theta \int \cosh\left[\sec\theta \operatorname{arcsinh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \cos\theta s_1 + n \\ q_3 = \sin\theta \int \sinh\left[\sec\theta \operatorname{arcsinh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1 \end{cases}$$

elde edilir. Bununla birlikte, S yüzeyi açılabilir olduğundan $\vec{c}' = f\vec{q}$ olup, yüzeyin konum vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} c_1 = \sin\theta \int f\left[\int \cosh\left[\sec\theta \operatorname{arcsinh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \int f(\cos\theta s_1 + n) ds_1 \\ c_3 = \sin\theta \int f\left[\int \sinh\left[\sec\theta \operatorname{arcsinh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak, $t(s_1) = \sec\theta \operatorname{arccosh}(\cot\theta s_1)$ seçilip gerekli parametre değişimi yapılarak

$$\begin{cases} c_1 = \sin^2\theta \int \gamma \left[\int \cosh t \cosh(\cos\theta t)dt\right] dt \\ c_2 = \int \gamma \left[\sin\theta \sinh(\cos\theta t) + n\right] dt \\ c_3 = \sin^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \cosh(\cos\theta t)dt\right] dt \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır.

(ii) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike olsun.

Bu takdirde, Teorem 4.4.36'dan

$$\kappa = \mp \frac{\coth\theta s_1}{\sqrt{\coth^2\theta s_1^2 - 1}}$$

olur. Bu eşitlik (4.218) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\coth^2\theta s_1^2 - 1\right)\vec{h}''' + 3\coth^2\theta s_1 \vec{h}'' + \vec{h}' = 0 \tag{4.221}$$

bulunur. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektörleri E_1^3 uzayının baz vektörleri ve $h_1 = h_1(s_1), h_2 = h_2(s_1), h_3 = h_3(s_1)$ fonksiyonları s_1 parametresine bağlı düzgün fonksiyonlar olmak üzere, yüzeyin $\vec{h}$ merkez normal vektörü

$$\vec{h} = h_1\vec{e}_1 + h_2\vec{e}_2 + h_3\vec{e}_3$$

şeklinde yazılabilir. S yüzeyi h-slant regle yüzey olduğundan $\vec{h}$ vektörünün sabit açı yaptığı birim ve sabit $\vec{u}$ vektörünü, genelliği bozmadan, $\vec{e}_2$ olarak seçelim. Bu takdirde, $h_2 = \pm\cosh\theta$ elde edilir. $\vec{h}$ vektörü birim ve spacelike vektör olduğundan

$$\begin{aligned} \langle\vec{h}, \vec{h}\rangle = 1 &\Rightarrow h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 = 1 \\ &\Rightarrow h_1^2 - h_3^2 = 1 - \cosh^2\theta \\ &\Rightarrow h_1^3 - h_1^2 = \sinh^2\theta \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $t = t(s_1)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere son denklemin genel çözümü

$$\begin{cases} h_1 = \sinh\theta \sinh t \\ h_3 = \sinh\theta \cosh t \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece $\vec{h}$ vektörü

$$\vec{h} = (\sinh\theta \sinh t, \pm\cosh\theta, \sinh\theta \cosh t)$$

halini alır. $\vec{h}$ vektörü (4.221) denklemini sağlayacağından

$$\begin{cases} \left(\coth^2\theta s_1^2 - 1\right)\left[t''' + (t')^3\right] + 3\coth^2\theta s_1 t'' + t' = 0 \\ \left(\coth^2\theta s_1^2 - 1\right)t'' + \coth^2\theta s_1 t' = 0 \end{cases} \tag{4.222}$$

denklem sistemine ulaşılır. (4.222) sisteminin ikinci denkleminden, $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$t = n_1 \operatorname{arccosh}(\coth \theta s_1) + n_2$$

elde edilir. Burada, $t \to t + n_2$ dönüşümü yapılarak n_2 sabiti elenir ve $t = n_1 \operatorname{arccosh}(\coth \theta s_1)$ bulunur. $t = n_1 \operatorname{arccosh}(\coth \theta s_1)$ eşitliği (4.222) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$n_1 = \operatorname{sech} \theta$$

olduğu görülür. Böylece, $t = \operatorname{sech} \theta \operatorname{arccosh}(\coth \theta s_1)$ olup, $\vec{h}$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} h_1 = \sinh \theta \sinh \left[\operatorname{sech} \theta \operatorname{arccosh}(\coth \theta s_1)\right] \\ h_2 = \pm \cosh \theta \\ h_3 = \sinh \theta \cosh \left[\operatorname{sech} \theta \operatorname{arccosh}(\coth \theta s_1)\right] \end{cases}$$

şekline dönüşür. $\vec{q}' = \vec{h}$ olduğundan $\vec{q}$ vektörünün bileşenleri için

$$\begin{cases} q_1 = \sinh \theta \int \sinh \left[\operatorname{sech} \theta \operatorname{arccosh}(\coth \theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \pm \cosh \theta s_1 + n \\ q_3 = \sinh \theta \int \cosh \left[\operatorname{sech} \theta \operatorname{arccosh}(\coth \theta s_1)\right] ds_1 \end{cases}$$

elde edilir. Bununla birlikte, S yüzeyi açılabilir olduğundan $\vec{c}' = f\vec{q}$ olup, yüzeyin konum vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} c_1 = \sinh \theta \int f \left[\int \sinh \left[\operatorname{sech} \theta \operatorname{arccosh}(\coth \theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \pm \int f \left[\cosh \theta s_1 + n\right] ds_1 \\ c_3 = \sinh \theta \int f \left[\int \cosh \left[\operatorname{sech} \theta \operatorname{arccosh}(\coth \theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak, $t(s_1) = \operatorname{sech} \theta \operatorname{arccosh}(\coth \theta s_1)$ seçilip gerekli parametre değişimi yapılarak

$$\begin{cases} c_1 = \sinh^2 \theta \int \gamma \left[\int \sinh t \sinh(\cosh \theta t) dt\right] dt \\ c_2 = \pm \int \gamma \left[\sinh \theta \cosh(\cosh \theta t) + n\right] dt \\ c_3 = \sinh^2 \theta \int \gamma \left[\int \cosh t \sinh(\cosh \theta t) dt\right] dt \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır.

(iii) $\vec{u}$ timelike vektör olsun.

Bu takdirde, Teorem 4.4.36'dan

$$\kappa = \mp \frac{\tanh \theta s_1}{\sqrt{\tanh^2 \theta s_1^2 - 1}}$$

olur. Bu eşitlik (4.218) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\tanh^2 \theta s_1^2 - 1\right) \vec{h}''' + 3 \tanh^2 \theta s_1 \vec{h}'' + \vec{h}' = 0 \tag{4.223}$$

bulunur. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektörleri E_1^3 uzayının baz vektörleri ve $h_1 = h_1(s_1), h_2 = h_2(s_1), h_3 = h_3(s_1)$ fonksiyonları s_1 parametresine bağlı düzgün fonksiyonlar olmak üzere, yüzeyin $\vec{h}$ merkez normal vektörü

$$\vec{h} = h_1\vec{e}_1 + h_2\vec{e}_2 + h_3\vec{e}_3$$

şeklinde yazılabilir. S yüzeyi h-slant regle yüzey olduğundan $\vec{h}$ vektörünün sabit açı yaptığı birim ve sabit $\vec{u}$ vektörünü, genelliği bozmadan, $\vec{e}_3$ olarak seçelim. Bu takdirde, $h_3 = \pm\sinh\theta$ elde edilir. $\vec{h}$ vektörü birim ve spacelike vektör olduğundan

$$\begin{aligned}\langle\vec{h},\vec{h}\rangle = 1 &\Rightarrow h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 = 1\\ &\Rightarrow h_1^2 + h_2^2 = 1 + \sinh^2\theta\\ &\Rightarrow h_1^2 + h_2^2 = \cosh^2\theta\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $t = t(s_1)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere son denklemin genel çözümü

$$\begin{cases} h_1 = \cosh\theta\cos t \\ h_2 = \cosh\theta\sin t \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece $\vec{h}$ vektörü

$$\vec{h} = (\cosh\theta\cos t, \cosh\theta\sin t, \pm\sinh\theta)$$

halini alır. $\vec{h}$ vektörü (4.223) denklemini sağlayacağından

$$\begin{cases} \left(\tanh^2\theta s_1^2 - 1\right)\left[t''' - (t')^3\right] + 3\tanh^2\theta s_1 t'' + t' = 0 \\ \left(\tanh^2\theta s_1^2 - 1\right)t'' + \tanh^2\theta s_1 t' = 0 \end{cases} \tag{4.224}$$

denklem sistemine ulaşılır. (4.224) sisteminin ikinci denkleminden, $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$t = n_1\,\mathrm{arccosh}(\tanh\theta s_1) + n_2$$

elde edilir. Burada, $t \to t + n_2$ dönüşümü yapılarak n_2 sabiti elenir ve $t = n_1\,\mathrm{arccosh}(\tanh\theta s_1)$ bulunur. $t = n_1\,\mathrm{arccosh}(\tanh\theta s_1)$ eşitliği (4.224) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$n_1 = \mathrm{csch}\,\theta$$

olduğu görülür. Böylece, $t = \mathrm{csch}\,\theta\,\mathrm{arccosh}(\tanh\theta s_1)$ olup, $\vec{h}$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} h_1 = \cosh\theta\cos\left[\mathrm{csch}\,\theta\,\mathrm{arccosh}(\tanh\theta s_1)\right] \\ h_2 = \cosh\theta\sin\left[\mathrm{csch}\,\theta\,\mathrm{arccosh}(\tanh\theta s_1)\right] \\ h_3 = \pm\sinh\theta \end{cases}$$

şekline dönüşür. $\vec{q}' = \vec{h}$ olduğundan $\vec{q}$ vektörünün bileşenleri için

$$\begin{cases} q_1 = \cosh\theta \int \cos\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arccosh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \cosh\theta \int \sin\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arccosh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_3 = \pm \sinh\theta s_1 + n \end{cases}$$

elde edilir. Bununla birlikte, S yüzeyi açılabilir olduğundan $\vec{c}' = f\vec{q}$ olup, yüzeyin konum vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} c_1 = \cosh\theta \int f \left[\int \cos\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arccosh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \cosh\theta \int f \left[\int \sin\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arccosh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_3 = \pm \int f \left[\sinh\theta s_1 + n\right] ds_1 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak, $t(s_1) = \operatorname{csch}\theta \operatorname{arccosh}(\tanh\theta s_1)$ seçilip gerekli parametre değişimi yapılarak

$$\begin{cases} c_1 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \cos t \sinh(\sinh\theta t) dt\right] dt \\ c_2 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \sin t \sinh(\sinh\theta t) dt\right] dt \\ c_3 = \pm \int \gamma \left[\cosh\theta \cosh(\sinh\theta t) + n\right] dt \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır. ■

Sonuç 4.4.38. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyi açılabilir h-slant regle yüzey ise

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike ise

$$\begin{cases} c_1 = \sin\theta \int f \left[\int \cosh\left[\sec\theta \operatorname{arcsinh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \int f(\cos\theta s_1 + n) ds_1 \\ c_3 = \sin\theta \int f \left[\int \sinh\left[\sec\theta \operatorname{arcsinh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \sin\theta \int \cosh\left[\sec\theta \operatorname{arcsinh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \cos\theta s_1 + n \\ q_3 = \sin\theta \int \sinh\left[\sec\theta \operatorname{arcsinh}(\cot\theta s_1)\right] ds_1 \end{cases}$$

(ii) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike ise

$$\begin{cases} c_1 = \sinh\theta \int f \left[\int \sinh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arccosh}(\coth\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \pm \int f \left[\cosh\theta s_1 + n\right] ds_1 \\ c_3 = \sinh\theta \int f \left[\int \cosh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arccosh}(\coth\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \sinh\theta \int \sinh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arccosh}(\coth\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \pm \cosh\theta s_1 + n \\ q_3 = \sinh\theta \int \cosh\left[\operatorname{sech}\theta \operatorname{arccosh}(\coth\theta s_1)\right] ds_1 \end{cases}$$

(iii) $\vec{u}$ timelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = \cosh\theta \int f \left[\int \cos\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arccosh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_2 = \cosh\theta \int f \left[\int \sin\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arccosh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1\right] ds_1 \\ c_3 = \pm \int f \left[\sinh\theta s_1 + n\right] ds_1 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \cosh\theta \int \cos\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arccosh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_2 = \cosh\theta \int \sin\left[\operatorname{csch}\theta \operatorname{arccosh}(\tanh\theta s_1)\right] ds_1 \\ q_3 = \pm \sinh\theta s_1 + n \end{cases}$$

olmak üzere yüzeyin konum vektörü s_1 parametresine göre

$$\vec{r}(s_1, v) = \vec{c}(s_1) + v\vec{q}(s_1)$$

ile verilir.

Sonuç 4.4.39. S yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında tanımlı anadoğruları timelike olan timelike bir regle yüzey, Frenet çatısı $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde, S yüzeyi açılabilir h-slant regle yüzey ise

(i) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike ise

$$\begin{cases} c_1 = \sin^2\theta \int \gamma \left[\int \cosh t \cosh(\cos\theta t) dt\right] dt \\ c_2 = \int \gamma \left[\sin\theta \sinh(\cos\theta t) + n\right] dt \\ c_3 = \sin^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \cosh(\cos\theta t) dt\right] dt \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \sin^2\theta \int \cosh t \cosh(\cos\theta t) dt \\ q_2 = \sin\theta \sinh(\cos\theta t) + n \\ q_3 = \sin^2\theta \int \cosh t \sinh(\cos\theta t) dt \end{cases}$$

(ii) $\vec{u}$ spacelike vektör ve $\vec{h}, \vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem timelike ise

$$\begin{cases} c_1 = \sinh^2\theta \int \gamma \left[\int \sinh t \sinh(\cosh\theta t) dt\right] dt \\ c_2 = \pm \int \gamma \left[\sinh\theta \cosh(\cosh\theta t) + n\right] dt \\ c_3 = \sinh^2\theta \int \gamma \left[\int \cosh t \sinh(\cosh\theta t) dt\right] dt \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \sinh^2\theta \int \sinh t \sinh(\cosh\theta t) dt \\ q_2 = \pm \sinh\theta \cosh(\cosh\theta t) + n \\ q_3 = \sinh^2\theta \int \cosh t \sinh(\cosh\theta t) dt \end{cases}$$

(iii) $\vec{u}$ timelike vektör ise

$$\begin{cases} c_1 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \cos t \sinh(\sinh\theta t) dt\right] dt \\ c_2 = \cosh^2\theta \int \gamma \left[\int \sin t \sinh(\sinh\theta t) dt\right] dt \\ c_3 = \pm \int \gamma \left[\cosh\theta \cosh(\sinh\theta t) + n\right] dt \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \cosh^2\theta \int \cos t \sinh(\sinh\theta t)dt \\ q_2 = \cosh^2\theta \int \sin t \sinh(\sinh\theta t)dt \\ q_3 = \pm\cosh\theta \cosh(\sinh\theta t) + n \end{cases}$$

olmak üzere yüzeyin konum vektörü t parametresine göre

$$\vec{r}(t,v) = \vec{c}(t) + v\vec{q}(t)$$

ile verilir.

4.4.3. Minkowski 3-uzayında Açılabilir Slant Regle Yüzey Örnekleri

Bu kısımda, 4.4.1 ve 4.4.2 bölümlerinde bulunan sonuçlardan bazılarına özel değerler verilerek elde edilen açılabilir q-slant ve h-slant regle yüzey örnekleri verilecektir.

Örnek 4.4.40. S_6 yüzeyi spacelike q-slant regle yüzey ve $\vec{u}$ vektörü spacelike vektör olsun. Bu takdirde, Sonuç 4.4.6'dan, $\kappa = 1$ ve $f = s_1$ olmak üzere S_6 yüzeyinin parametrizasyonu

$$\begin{aligned}\vec{r}(s_1,v) =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int s_1\cosh(\sqrt{2}s_1)ds_1 + v\cosh(\sqrt{2}s_1),\right.\\ & \left.\frac{s_1^2}{2} + v, \int s_1\sinh(\sqrt{2}s_1)ds_1 + v\sinh(\sqrt{2}s_1)\right)\end{aligned}$$

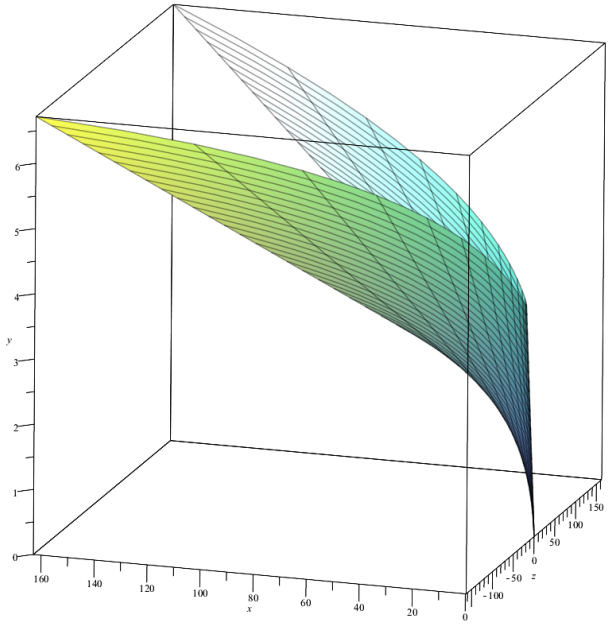
şeklinde olup, bu yüzeyin grafiği Şekil 4.6 ile verilmiştir.

Örnek 4.4.41. S_7 yüzeyi anadoğruları timelike olan açılabilir q-slant timelike regle yüzey olsun. Bu takdirde, Sonuç 4.4.20'den, $\kappa = -1/2$ ve $f = s_1^2$ olmak üzere S_7 yüzeyinin parametrizasyonu

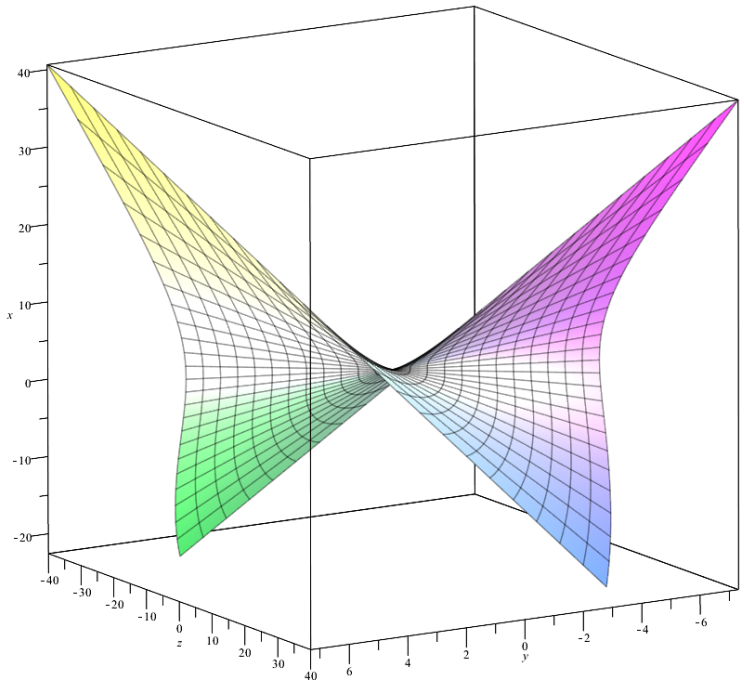
$$\begin{aligned}\vec{r}(s_1,v) =& \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\int s_1^2\sinh(\frac{\sqrt{3}}{2}s_1)ds_1 + v\sinh(\frac{\sqrt{3}}{2}s_1),\right.\\ & \left.\frac{1}{2}\left(\frac{s_1^3}{3} + v\right), \int s_1^2\cosh(\frac{\sqrt{3}}{2}s_1)ds_1 + v\cosh(\frac{\sqrt{3}}{2}s_1)\right)\end{aligned}$$

şeklinde olup, yüzeyin grafiği Şekil 4.7 ile verilmiştir.

Örnek 4.4.42. S_8 yüzeyi açılabilir spacelike h-slant regle yüzey ve $\vec{u}$ vektörü spacelike vektör olsun. Bu takdirde, Sonuç 4.4.26'dan, $\theta = \pi/4$, $\gamma = e^t$, $n = 1$ ve $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$,



Şekil 4.6. S_6 açılabilir spacelike q-slant regle yüzeyi



Şekil 4.7. S_7 anadoğruları timelike olan açılabilir timelike q-slant regle yüzeyi

$\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ olmak üzere S_8 yüzeyinin parametrizasyonu

$$\vec{r}(t, v) = \vec{c}(t) + v\vec{q}(t)$$

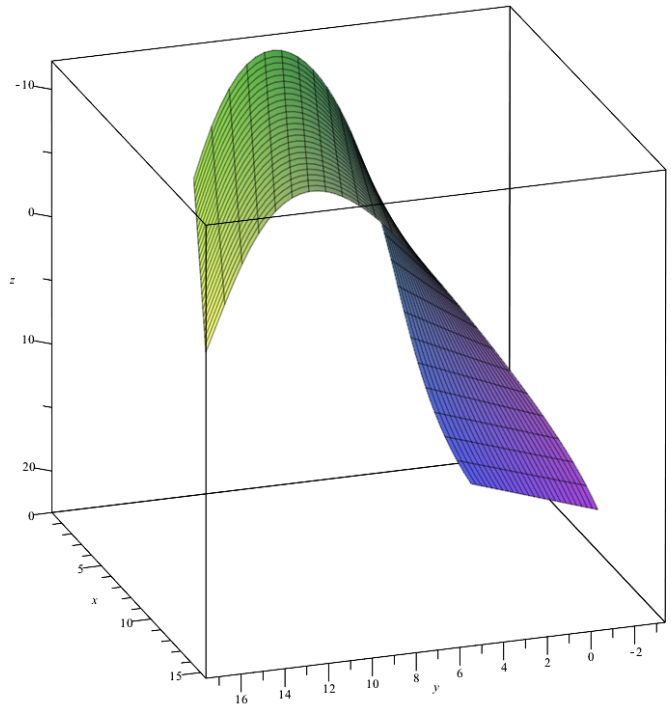
olup, burada

$$\begin{cases} c_1 = \cosh^2 \frac{\pi}{4} \int e^t \left[\int \sinh t \cos(\sinh \frac{\pi}{4} t) dt \right] dt \\ c_2 = \int e^t \left[\cosh \frac{\pi}{4} \sin(\sinh \frac{\pi}{4} t) + 1 \right] dt \\ c_3 = \cosh^2 \frac{\pi}{4} \int e^t \left[\int \cosh t \cos(\sinh \frac{\pi}{4} t) dt \right] dt \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \cosh^2 \frac{\pi}{4} \int \sinh t \cos(\sinh \frac{\pi}{4} t) dt \\ q_2 = \cosh \frac{\pi}{4} \sin(\sinh \frac{\pi}{4} t) + 1 \\ q_3 = \cosh^2 \frac{\pi}{4} \int \cosh t \cos(\sinh \frac{\pi}{4} t) dt \end{cases}$$

şeklindedir. S_8 yüzeyinin grafiği Şekil 4.8 ile verilmiştir.



Şekil 4.8. S_8 açılabilir spacelike h-slant regle yüzeyi

Örnek 4.4.43. S_9 yüzeyi anadoğruları spacelike olan açılabilir timelike regle yüzey, $\vec{u}$ vektörü spacelike vektör ve $\vec{h}$ ile $\vec{u}$ vektörlerinin gerdikleri düzlem spacelike olsun. Bu takdirde, Sonuç 4.4.34'ten, $\theta = \pi/3$, $\gamma = 1$, $n = 0$ ve $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\vec{q} = (q_1, q_2, q - 3)$ olmak üzere S_9 yüzeyinin parametrizasyonu

$$\vec{r}(t, v) = \vec{c}(t) + v\vec{q}(t)$$

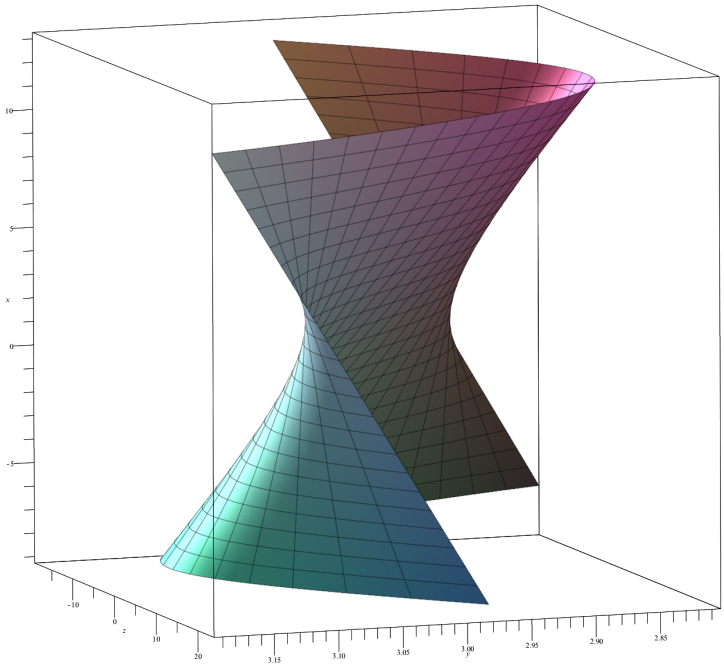
olup, burada

$$\begin{cases} c_1 = \sin^2 \frac{\pi}{3} \int \left[\int \cosh t \sinh(\cos \frac{\pi}{3} t) dt \right] dt \\ c_2 = \int \left[\sin \frac{\pi}{3} \cosh(\cos \frac{\pi}{3} t) \right] dt \\ c_3 = \sin^2 \frac{\pi}{3} \int \left[\int \sinh t \sinh(\cos \frac{\pi}{3} t) dt \right] dt \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \sin^2 \frac{\pi}{3} \int \cosh t \sinh(\cos \frac{\pi}{3} t) dt \\ q_2 = \sin \frac{\pi}{3} \cosh(\cos \frac{\pi}{3} t) \\ q_3 = \sin^2 \frac{\pi}{3} \int \sinh t \sinh(\cos \frac{\pi}{3} t) dt \end{cases}$$

şeklindedir. S_9 yüzeyinin grafiği Şekil 4.9 ile verilmiştir.



Şekil 4.9. S_9 anadoğruları spacelike olan açılabilir timelike h-slant regle yüzeyi

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında diferansiyel geometrinin en önemli konularından olan eğriler ve yüzeyler geometrisi üzerine çalışılmış olup, literatürde yer alan slant regle yüzeyler üzerine Minkowski 3-uzayında bazı incelemeler yapılmıştır.

Slant regle yüzeyler temel olarak q-slant, h-slant, a-slant ve Darboux slant regle yüzeyler şeklinde tanımlansa da Minkowski 3-uzayında bu yüzeyler spacelike ve timelike karakterli olma durumları göz önüne alınarak tanımlamalar detaylandırılmıştır.

Minkowski 3-uzayında slant regle yüzeylerin spacelike ve timelike olan türleri için birçok teorem, sonuç ve karakterizasyon verilmiştir. q-slant ve h-slant regle yüzeyler için konum vektörlerinin belirlenmesi üzerine çalışılmıştır. Bununla birlikte, bu ve benzer yüzeyler farklı uzaylarda çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Barros, M. General helices and a theorem of Lancret. Proceedings of American Mathematical Society. 1997, 125, 1503–1509.

[2] Struik, D.J. Lectures on classical differential geometry, second edition, Addison-Wesley Press, Inc., Massachusetts, 1961.

[3] Ali, A.T. Position vectors of general helices in Euclidean 3-space. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications. 2010, 3(2), 198–205.

[4] Ali, A.T. Position vectors of spacelike general helices in Minkowski 3-space. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2010, 73(4), 1118–1126.

[5] Izumiya, S., Takeuchi, N. New Spcial Curves and Developable Surfaces. Turkish Journal of Mathematics. 2004, 28, 153–163.

[6] Kula, L., Yaylı, Y. On slant helix and its spherical indicatrix. Applied Mathematics and Computatiton 2005, 169, 600–607.

[7] Kula, L., Ekmekçi, N., Yaylı, Y., İlarslan, K. Characterizations of Slant Helices in Euclidean 3-Space. Turkish Journal of Mathematics. 2009, 33, 1–13.

[8] Ali, A.T., López, R. Slant Helices in Minkowski Space $\mathbb{E}_1^3$. Journal of Korean Mathemetatical Society. 2011, 48(1), 159–167.

[9] Gök, İ., Nurkan, S.K., İlarslan, K., Kula, L., Altınok, M. Characterizations of timelike slant helices in Minkowski 3-space. Mathematical Communications. 2014, 19(1), 119–138.

[10] Ali, A.T., Turgut, M. Position vector of a time-like slant helix in Minkowski 3-space. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2010, 365(2), 559–569.

[11] Ali, A.T. Position vectors of slant helices in Euclidean 3-space. Journal of the Egyptian Mathematical Society. 2012, 20(1), 1–6.

[12] Karger, A., Novak, J. Space Kinematics and Lie Groups. STNL Publishers of Technical Lit., Prague, Czechoslovakia, 1978.

[13] Turgut, A., Hacısalihoğlu, H.H. Spacelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics. 1997, 46, 83–91.

[14] Turgut, A., Hacısalihoğlu, H.H. Timelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space-II. Turkish Journal of Mathematics. 1998, 22(1), 33–46.

[15] Abdel-All, N.H., Abdel-Baky, R.A., Hamdoon, F.M. Ruled surfaces with timelike rulings. Applied Mathematics and Computation. 2004, 147, 241–256.

[16] Kim, Y.H., Yoon, D.W. Classification of ruled surfaces in Minkowski 3-spaces. Journal of Geometry and Physics. 2004, 49(1), 89–100.

[17] Önder, M., Uğurlu, H.H. Frenet frames and Frenet invariants of spacelike ruled surfaces. Dokuz Eylül University Faculty Of Engineering Journal Of Science and Engineering. 2017, 19, 712–722.

[18] Abdel-Baky, R.A. Slant ruled surface in the Euclidean 3-space $\mathbb{E}^3$. Scientia Magna. 2013, 9(4), 107–112.

[19] Önder, M. Slant ruled surfaces. Transnational Journal of Pure and Applied Mathematics. 2018, 1(1), 63–82.

[20] Önder, M. Non-null slant ruled surfaces. AIMS Mathematics. 2019, 4(3), 384–396.

[21] Kaya, O. Slant Regle Yüzeylerin Karakterizasyonları. Celal Bayar Universitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2015, 79 s. (Yüksek Lisans Tezi)

[22] Önder, M., Kaya, O. Darboux Slant Ruled Surfaces. Azerbaijan Journal of Mathematics. 2015, 5(1), 64–72.

[23] Kaya, O., Önder, M. Characterizations of Slant Ruled Surfaces in the Euclidean 3-space. Caspian Journal of Mathematical Sciences. 2017, 6(1), 31–46.

[24] Kaya, O., Önder, M. Position vector of a developable q-slant ruled surface. Korean Journal of Mathematics. 2018, 26(4), 545–559.

[25] Kaya, O., Önder, M. Position vector of a developable h-slant ruled surface. TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics. 2017, 7(2), 322–331.

[26] López, R. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. International Electronic Journal of Geometry. 2014, 7(1), 44–107.

[27] Uğurlu, H.H., Çalışkan, A. Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi. Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, Manisa, 2012.

[28] Ratcliffe J.G. Foundations of Hyperbolic Manifolds. Springer New York, 2006.

[29] Şahiner, B. Minkowski Uzayındaki Regle Yüzeylerin ve Dual Lorentz Uzayındaki Küresel Eğrilerin Eğrilik Teorileri Yardımıyla Robot Uç-İşlevci Hareketinin İncelenmesi. Celal Bayar Universitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2013, 122 s. (Doktora Tezi)

[30] Uğurlu, H.H., Önder, M. On Frenet Frames and Frenet Invariants of Skew Spacelike Ruled Surfaces in Minkowski 3-space. VII Geom. Symp, Kırşehir, Turkey, 7-10 July, 2009.

[31] Önder, M., Uğurlu, H.H. Frenet frames and invariants of timelike ruled surfaces. Ain Shams Engineering Journal, 4(3), 507-513, 2013.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Onur KAYA
Doğum Yeri ve Yılı	:	İzmir, 1988
Yabancı Dili	:	İngilizce
E-posta	:	onur.kaya@cbu.edu.tr

Eğitim Durumu

Lisans	:	Ege Üniversitesi, Matematik, 2010
Yüksek Lisans	:	Celal Bayar Üniversitesi, Geometri, 2015
Doktora	:	Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Geometri, 2020

Mesleki Deneyim

Araştırma Görevlisi, Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2013 – ...

Yayınları

1. Önder, M., Zıplar, E., Kaya, O. Eikonal slant helices and Eikonal Darboux helices in 3-dimensional Riemannian manifold. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2014, 11(5), 14500450 (10 Pages).

2. Önder, M., Kaya, O. Darboux Slant Ruled Surfaces. Azerbaijan Journal of Mathematics. 2015, 5(1), 64–72.

3. Önder, M., Kaya, O. Slant null scrolls in Minkowski 3-space E_1^3. Kuwait Journal of Science. 2016, 43(2), 31–47.

4. Kaya, O., Önder, M. C-partner curves and their applications. Differential Geometry - Dynamical Systems. 2017, 19, 64–74.

5. Kaya, O., Önder, M. New partner curves in the Euclidean 3-space E_1^3. International Journal of Geometry. 2017, 6(2), 41–50.

6. Kaya, O., Önder, M. Characterizations of Slant Ruled Surfaces in the Euclidean 3-space. Caspian Journal of Mathematical Sciences. 2017, 6(1), 31–46.

7. Kaya, O., Önder, M. Position vector of a developable h-slant ruled surface. TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics. 2017, 7(2), 322–331.

8. Kaya, O., Önder, M. Construction of a surface pencil with a common special surface curve. Journal of Mahani Mathematical Research Center. 2017, 6(1-2), 57–72.

9. Kaya, O., Önder, M. On Fibonacci and Lucas Vectors and Quaternions. Universal Journal of Applied Mathematics. 2018, 6(5), 156–163.

10. Kaya, O., Önder, M. Position vector of a developable q-slant ruled surface. Korean Journal of Mathematics. 2018, 26(4), 545–559.