T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ BİLİM DALI

LEAVITT YOL CEBİRLERİNİN MODÜL YAPISI

Arzu ERBEK

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Tuğba GÜROĞLU



MANİSA-2023

TEZ ONAYI

Arzu ERBEK tarafından hazırlanan **"Leavitt Yol Cebirlerinin Modül Yapısı"** adlı tez çalışması 12.01.2023 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Tuğba GÜROĞLU** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Ali MUTLU** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Salahattin ÖZDEMİR** Dokuz Eylül Üniversitesi	.....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

30.12.2022
Arzu ERBEK

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ II
TEŞEKKÜR III
ÖZET IV
ABSTRACT V
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER 3
2.1. Temel Bilgiler 3
2.1.1. Grup, Halka, Modül Teori 3
2.1.2. Graf Teori 8
3. LEAVITT YOL CEBİRLERİ 16
3.1. Katsayıları K Cisminden Alınan Leavitt Yol Cebirleri 16
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA 20
5. SONUÇ VE ÖNERİLER 31
KAYNAKLAR 32
ÖZGEÇMİŞ 34

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

R	Halka
K	Cisim
M	R-modül
$ann_R(M)$	M modülünün sıfırlayanı
E	Yönlü graf
E^0	E grafının köşeler kümesi
E^1	E grafının kenarlar kümesi
E^*	E grafındaki bütün yolların kümesi
$CP(v)$	v köşesini baz kabul eden bütün kapalı yolların kümesi
$CSP(v)$	v köşesini baz kabul eden bütün kapalı basit yolların kümesi
$T(v)$	v köşesinin ağacı
B_H	Kırılan köşelerin kümesi
(H, S)	Uygun çift
$E\backslash(H, S)$	Bölüm grafı
$P_l(E)$	E grafındaki bütün çizgi nokta köşelerin kümesi
$L_K(E)$	E grafı üzerindeki Leavitt yol K-cebiri

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimin her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle varlığını her daim yanımda hissettiğim, bana yol gösteren kıymetli hocam ve danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Tuğba GÜROĞLU'na, hayatımın her anında yanımda olan sevgili aileme, tez yazım süreci boyunca desteklerini esirgemeyen arkadaşım Ferhat BOZAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Arzu ERBEK
Manisa, 2023

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Leavitt Yol Cebirlerinin Modül Yapısı

Arzu ERBEK

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Tuğba GÜROĞLU

Bu tezi beş ana bölüm oluşturmaktadır. İlk bölüm olan giriş bölümünde Leavitt yol cebirlerinin tarihçesinden bahsedilmiştir. Katsayıları K cisminden alınan Leavitt yol cebirleri ve katsayıları birimli, değişmeli R halkasından alınan Leavitt yol cebirleri ile ilgili çalışmalara değinilmiştir. Ayrıca Leavitt yol cebirinin modül yapısı hakkındaki çalışmalar ele alınmıştır.

İkinci bölüm grup, halka, modül teori ve graf teori olacak şekilde iki alt başlığa ayrılmıştır. Bu alt başlıklarda tezin ilerleyen bölümlerinde kullandığımız temel tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde katsayıları K cisminden alınan Leavitt yol cebirinin tanımı ve örnekleri verilmiş, Leavitt yol cebirlerinin özelliklerini veren teoremlerden bahsedilmiştir.

Tezin ana bölümü olan dördüncü bölümde Leavitt yol cebirlerinin modül yapısı ile ilgili teoremler ayrıntılı olarak incelenmiştir. Son bölüm olan beşinci bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Graflar, Leavitt yol cebirleri, Leavitt yol cebiri üzerinde tanımlanan basit modül.

2023, 34 sayfa

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

Module Structure over Leavitt Path Algebras

Arzu ERBEK

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ayşe Tuğba GÜROĞLU

This thesis consists of five main chapters. In the first chapter, the introduction, the history of Leavitt path algebras is mentioned. The studies on Leavitt path algebras whose coefficients are taken from the K field and Leavitt path algebras whose coefficients are taken from the commutative ring R with unity are mentioned. Also, studies on the module structure of Leavitt path algebra are discussed.

The second chapter is divided into two sub-titles as group, ring, module theory and graph theory. In these sub-titles, the main definitions, theorems and examples that we use in the following sections of the thesis are given.

In the third chapter, the definition and examples of Leavitt path algebras, the coefficients of which are taken from the field K, are given, and the theorems that give the properties of Leavitt path algebras are mentioned.

In the fourth chapter, which is the main part of the thesis, the theorems related to the module structure of Leavitt path algebras are examined in detail. In the last chapter, the fifth chapter, conclusions and recommendations are given.

Keywords: Graphs, Leavitt path algebras, Simple module defined on Leavitt path algebra.

2023, 34 pages

1. GİRİŞ

Bir R halkası ve $m, n \in \mathbb{N}$ için sol R-modül olarak $R^m \cong R^n$ iken $m = n$ eşitliği sağlanıyorsa R halkası ***Değişmez Taban Sayısı (IBN)*** özelliğini sağlıyor denir. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası, değişmeli halkalar, cisimler üzerindeki polinom halkaları ve matris halkaları IBN özelliğini sağlamalarına rağmen bazı halkalar bu özelliği sağlamaz.

Leavitt, 1960'lı yılların başlarında Değişmez Taban Sayısı (IBN) özelliğine sahip olmayan bir cebir yapısı tanımlamıştır. Leavitt cebiri olarak bilinen bu cebir yapısı "Her $m < n \in \mathbb{N}$ ve K bir cisim olmak üzere $\bigoplus_{i=1}^{m} R \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R$ özelliğini sağlayan bir $R = L_K(m, n)$ K-cebiri vardır." şeklinde tanımlanmıştır [1].

2005 yılında Abrams, Aranda Pino ve onlardan bağımsız olarak 2007 yılında Ara, Moreno ve Pardo tarafından katsayıları K cisminden alınan bir yönlü E grafı üzerinde $L_K(E)$ Leavitt yol cebirleri tanımlanmıştır ([2], [3], [4]). Daha sonra Leavitt yol cebirlerinin halka-teorik özellikleri birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Pino, Barquero, Gonzalez ve Siles Molina [5] Leavitt yol cebirlerinin socle özelliğini; Pino ve Siles Molina [6] exchange Leavitt yol cebirlerini; Abrams, Pino ve Siles Molina [7] de yerel sonlu Leavitt yol cebirlerini; [8] makalesinde ise sonlu boyutlu $L_K(E)$ cebirlerini çalışmışlardır. Ayrıca Abrams ve Pino tarafından tamamen sonsuz basit Leavitt yol cebirleri [9] incelenmiş ve Leavitt yol cebirlerinin asal ideal yapısı Rangaswamy tarafından [10] makalesinde verilmiştir.

Katsayıları birimli ve değişmeli R halkasından alınan ve E yönlü grafı üzerindeki $L_R(E)$ Leavitt yol cebirleri [11] Tomforde tarafından sonlu graflarda tanımlanmış ve $L_R(E)$ cebirleri Larki tarafından keyfi graflara genişletilmiştir [12]. Ayrıca $L_R(E)$ Leavitt yol cebirinin özellikleri Nordstrom [13] ve Wardati [14] tarafından da çalışılmıştır.

Leavitt yol cebirlerinin halka teorik özellikleri oldukça fazla çalışılmasına rağmen Leavitt yol cebirleri üzerinde tanımlanan modül yapısı ile ilgili çalışmalar oldukça

azdır. Leavitt yol cebirlerinin modül yapısı ilk olarak Ara ve Brustanga tarafından 2010 yılında E grafının tersi olan $\bar{E}$ ters grafının olağan yol cebirlerinin sonlu boyutlu temsilleri cinsinden tanımlanmıştır [15]. Daha sonra basit $L_K(E)$-modül çalışmaları önem kazanmıştır. Chen, sonsuz yolların kuyruk eşdeğeri denklik sınıflarını ve batakları kullanarak iki farklı basit $L_K(E)$-modül yapısı tanımlamıştır [16]. Ardından Rangaswamy ve Ara sonsuz yayıcıları ve sonsuz yolları kullanarak, Chen'in tanımladığı basit $L_K(E)$-modüllerine izomorf olmayan basit $L_K(E)$-modül yapılarını vermiştir [17]. Rangaswamy 2015 yılında sonsuz yayıcıları ve primitif idealleri kullanarak daha önceden tanımlanan basit $L_K(E)$-modüllere izomorf olmayan yeni bir basit $L_K(E)$-modül tanımlamıştır [18].

Bu tezde ise Chen, Rangaswamy ve Ara tarafından tanımlanan katsayıları K cisminden alınan basit $L_K(E)$-modülleri incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Temel Bilgiler

Bu bölümde, ilerleyen bölümlerde kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1.1. Grup, Halka, Modül Teori

Tanım 2.1.1. ([19]) G bir küme ve $*, G$ kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa $(G, *)$ sıralı çiftine *grup (group)* denir.

i) Her $a, b, c \in G$ için

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

ii) Her $a \in G$ için

$$a * e = e * a = a$$

olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. Buradaki $e \in G$ elemanına *birim eleman* denir.

iii) Her $a \in G$ için

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

olacak şekilde bir $a^{-1} \in G$ elemanı vardır. Bu a^{-1} elemanına a elemanının tersi denir.

Her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ eşitliği sağlanıyorsa $(G, *)$ grubuna *değişmeli (abelyan) grup* denir.

Örnek 2.1.2. ([19]) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümeleri $''+''$ işlemi altında birer gruptur.

Tanım 2.1.3. ([19]) R, boştan farklı bir küme ve $''+''$ ve $''.''$, R üzerinde iki ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa $(R, +, .)$ cebirsel yapısına *halka (ring)* adı verilir.

i) $(R, +)$ bir değişmeli gruptur.

ii) Her $a, b, c \in R$ için

$$(a.b).c = a.(b.c)$$

iii) Her $a, b, c \in R$ için

$$(a + b).c = a.c + b.c$$

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

R halkası üzerindeki $''.''$ işlemi değişme özelliğine sahipse yani her $a, b \in R$ için $a.b = b.a$ eşitliği sağlanıyorsa R halkasına *değişmeli halka (commutative ring)* denir. R halkası birim elemana sahipse yani her $a \in R$ için $a.1_R = 1_R.a = a$ olacak şekilde $1 = 1_R \in R$ varsa R halkası *birimli halka (ring with identity)* olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.4. ([19]) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümeleri $''+''$ ve $''\cdot''$ işlemlerine göre birimli ve değişmeli halkalardır.

Tanım 2.1.5. ([20]) S, R halkasının boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa S, R halkasının *alt halkası (subring)* olarak adlandırılır.
i) $1 \in S$
ii) Her $a, b \in S$ için $a - b \in S$
iii) Her $a, b \in S$ için $a.b \in S$

Tanım 2.1.6. ([20]) I, R halkasının alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa I ya R halkasının *iki yanlı ideali (two-sided ideal)* veya kısaca *ideali* denir.
i) Her $a, b \in I$ için $a - b \in I$
ii) Her $a \in I, r \in R$ için $r.a \in I$ ve $a.r \in I$
Eğer $r.a \in I$ ise I ya *sol ideal (left ideal)*, $a.r \in I$ ise I ya *sağ ideal (right ideal)* denir.
R halkası ve $\{0\}$ her zaman R halkasının idealleridir. R halkasından farklı olan ideale ise *özalt (proper) ideal* denir.

Tanım 2.1.7. ([21]) R bir halka olsun. $(R, +)$ grubunun alt gruplar ailesi $\{R_n : n \in \mathbb{Z}\}$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa R halkasına *$\mathbb{Z}$-dereceli halka ($\mathbb{Z}$-graded ring)* denir.
i) Her $m, n \in \mathbb{Z}$ için $R_m R_n \subseteq R_{m+n}$
ii) $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$
$R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ bir $\mathbb{Z}$-dereceli halka ve I, R halkasının bir ideali olsun. Her $x_n \in R_n$ için $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \in I$ olduğunda $x_n \in I$ ise I idealine *dereceli ideal (graded ideal)* denir. I dereceli ideali için $I = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (I \cap R_n)$ dir.

Tanım 2.1.8. ([20]) I, R halkasının bir özalt ideali olsun. $I \subsetneq J \subsetneq R$ şartını sağlayan bir J ideali yoksa I idealine R halkasının *maksimal ideali (maximal ideal)* denir.

Tanım 2.1.9. ([20]) R bir halka ve $e \in R$ olsun. Eğer $e^2 = e$ şartı sağlanıyorsa e elemanına R halkasının *idempotent elemanı* denir.

Tanım 2.1.10. ([21]) R bir halka olsun. R halkasının her $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ sonlu alt kümesi için $X \subseteq eRe$ olacak şekilde bir $e \in R$ idempotent elemanı varsa R halkası *yerel birimlere (local unit)* sahiptir denir. Ayrıca her $x_i \in X$ elemanı için $x_i e = x_i = e x_i \, (i = 1, 2, \cdots, n)$ şartını sağlayan bir $e \in R$ idempotent elemanı varsa e elemanına X alt kümesinin *yerel birimi* denir.

Tanım 2.1.11. ([19]) R bir halka olsun. Her $0 \neq a \in R$ elemanı için $ab = 0$ veya $ba = 0$ olacak şekilde $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına *sıfır bölen (zero divisor)* denir. Birimli, değişmeli ve sıfır böleni olmayan halkaya *tamlık bölgesi (integral domain)* denir.

Tanım 2.1.12. ([19]) R, birim elemanı 1 olan bir halka olsun. Her $0 \neq a \in R$ elemanının çarpımsal bir tersi varsa yani $ab = ba = 1$ olacak şekilde bir $b \in R$ varsa R halkasına *bölme halkası (division ring)* denir. Değişmeli bir bölme halkasına ise *cisim (field)* adı verilir.

Tanım 2.1.13. ([20]) R bir halka olsun. R halkası sıfırdan farklıysa ve sıfırdan farklı iki yanlı özalt ideale sahip değilse R halkasına *basit halka (simple ring)* denir.

Tanım 2.1.14. ([20]) K bir cisim olsun. $a \in K$ ve $v \in V$ olmak üzere $(a, v) \mapsto av$ şeklinde tanımlanan $K \times V \to V$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa V ye K cismi üzerinde bir *vektör uzayı (vector space)* adı verilir. Her $a, b, 1 \in K$ ve her $u, v \in V$ için

i) $a(u + v) = au + av$

ii) $(a + b)v = av + bv$

iii) $(ab)v = a(bv)$

iv) $1v = v$

Tanım 2.1.15. ([24]) R bir halka ve $(M,+)$ değişmeli grup olsun. $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $(r,m) \mapsto rm$ şeklinde tanımlanan $R \times M \to M$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa M ye R halkası üzerinde bir sol modül veya bir *sol R-modül (left R-module)* denir.

i) Her $r,s \in R$ ve $m \in M$ için $(r+s)m = rm + sm$

ii) Her $r \in R$ ve $m,n \in M$ için $r(m+n) = rm + rn$

iii) Her $r,s \in R$ ve $m \in M$ için $(rs)m = r(sm)$

iv) R birim elemana sahip ise her $m \in M$ için $1m = m$ dir.

Benzer şekilde sağ R-modül de tanımlanabilir. Bundan sonra M sol R-modülü kısaca M modülü olarak alınacaktır.

Tanım 2.1.16. ([24]) R bir halka, M bir modül ve N, M nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $x,y \in N$ ve $r \in R$ için $x + ry \in N$ şartı sağlanıyorsa N ye M modülünün *alt modülü (submodule)* denir.

Tanım 2.1.17. ([24]) R bir halka ve M ve N iki modül olsun. $f : M \to N$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa f fonksiyonuna ***R*-modül homomorfizması (*R*-module homomorphism)** denir. Her $m,n \in M$ ve $r \in R$ için

i) $f(m+n) = f(m) + f(n)$

ii) $f(rm) = rf(m)$

Eğer f modül homomorfizması birebir ise f dönüşümü *monomorfizma* ve f modül homomorfizması örten ise f dönüşümü *epimorfizma* olarak adlandırılır. $f : M \to N$ modül homomorfizması birebir ve örten ise f dönüşümü *modül izomorfizması* olarak adlandırılır ve M ile N modülleri izomorfiktir denir ve $M \cong N$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.18. ([23]) M bir modül ve A, M nin alt modülü olsun. $M = A \oplus B$ şartını sağlayan M nin B alt modülü varsa A ya M modülünün *dik toplamı (direct summand)* denir.

Tanım 2.1.19. ([23]) M bir modül olsun. M modülünün dik toplamları sadece 0 ve M'nin kendisi ise M modülüne *ayrıştırılamaz (indecomposable)* denir.

Tanım 2.1.20. ([23]) R bir halka ve M bir modül olsun. Eğer $M \neq 0$ ve M modülünün alt modülleri sadece 0 ve M ise M modülü *basit modül (simple module)* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.21. ([23]) R bir halka, $M \neq 0$ ve M bir modül olsun. M modülü basittir ancak ve ancak $0 \neq m \in M$ elemanı için $M = Rm$ eşitliği sağlanır.

Tanım 2.1.22. ([22]) R bir halka ve I, R halkasının bir sol ideali olsun. $I \neq 0$ ve $0 \subset J \subset I$ olacak şekilde her J sol ideali için ya $J = 0$ ya da $J = I$ oluyorsa I idealine *minimal sol ideal* denir.
$RI \neq 0$ özelliğini sağlayan I ideali basit modüldür ancak ve ancak I minimal sol idealdir.

Tanım 2.1.23. ([24]) M bir modül olmak üzere $m \in M$ için

$$ann(m) = \{r \in R | rm = 0\}$$

kümesine m elemanının *sıfırlayanı (annihilator)* denir.

M bir modül olsun. M modülünün *sıfırlayanı*

$$ann_R(M) = \{r \in R | rM = 0\}$$

kümesidir. Eğer $ann_R(M) = 0$ ise M modülüne *sadık (faithful) modül* denir.

Tanım 2.1.24. ([25]) R bir halka olsun. Eğer basit sadık bir sol R-modül varsa R halkasına *sol primitif halka (left primitive ring)* denir.

Tanım 2.1.25. ([22]) P, R halkasının bir ideali olmak üzere P ideali herhangi bir basit R-modülünün sıfırlayanı ise P idealine *primitif (primitive) ideal* denir.

Tanım 2.1.26. ([22]) R bir primitif halkadır ancak ve ancak $\{0\}, R$ halkasının bir primitif idealidir.

Lemma 2.1.27. ([22]) P, R halkasının bir ideali olmak üzere P ideali primitif idealdir ancak ve ancak R/P halkası primitif halkadır.

Tanım 2.1.28. ([25]) R birimli ve değişmeli bir halka olsun. Bir A halkası aşağıdaki şartları sağlıyorsa A ya R halkası üzerinde bir *cebir (algebra)* denir. Her $\lambda \in R$ ve $a, b \in A$ için

i) $(A, +)$ birimli bir R-modüldür.

ii)

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

Bölme halkası olan bir A R-cebirine *bölme cebiri (division algebra)* denir.

Örnek 2.1.29. ([25]) Her R halkası toplamsal bir değişmeli gruptur ve dolayısıyla bir $\mathbb{Z}$-modüldür. Buradan R halkası bir $\mathbb{Z}$-cebiridir.

Tanım 2.1.30. ([25]) R değişmeli bir halka ve A, B iki R-cebiri olsun. $f : A \to B$ halka homomorfizması her $r \in R$ ve $a \in A$ için $f(ra) = rf(a)$ şartını sağlıyorsa f ye ***R-cebir homomorfizması*** denir.

Tanım 2.1.31. ([22]) R bir halka olsun. Aşağıdaki şartlar denktir.

i) Her $a \in R$ için $aRa = 0$ ise $a = 0$.

ii) R nin her I ideali için $I^2 = 0$ ise $I = 0$.

iii) R nin sıfırdan farklı nilpotent ideali yoktur.

R halkası yukarıdaki özelliklerden herhangi birini sağlıyorsa R halkasına *yarı asal halka (semiprime ring)* denir.

2.1.2. Graf Teori

Tanım 2.1.32. ([21]) Bir $E = (E^0, E^1, r, s)$ *yönlü grafı (directed graph)*, E^0 ve E^1 kümelerinden ve bu iki küme arasındaki $r, s : E^1 \to E^0$ fonksiyonlarından meydana gelir. *Köşeler (vertices)* kümesi E^0 ve *kenarlar (edges)* kümesi ise E^1 ile gösterilir. Herhangi bir $e \in E^1$ için e kenarının *kaynağı (source)* $s(e)$ kümesiyle ve *değişimi (range)* $r(e)$ kümesiyle gösterilir. Eğer $s(e) = v$, $r(e) = u$ ise v köşesi e kenarını *yayıyor (emit)*; u köşesi e kenarını *alıyor (receives)* denir. Herhangi bir $v \in E^0$ için $s^{-1}(v)$ kümesinin elemanları, v köşesi tarafından yayılan kenarları; $r^{-1}(v)$ kümesinin elemanları, v köşesi tarafından alınan kenarları gösterir.

Eğer $s^{-1}(v) = \varnothing$ ise v köşesine *batak (sink)*, $r^{-1}(v) = \varnothing$ ise v köşesine *kaynak (source)* denir.

Tanım 2.1.33. ([21]) Eğer $|s^{-1}(v)| = \infty$ yani v köşesinden sonsuz sayıda kenar çıkıyorsa v ye *sonsuz yayıcı (infinite emitter)* denir. v köşesi batak veya sonsuz yayıcı ise v ye *tekil köşe (singular vertex)*, aksi halde (yani $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$) v ye *düzgün köşe (regular vertex)* denir.

Tanım 2.1.34. ([21]) Eğer E^0 köşeler kümesi ve E^1 kenarlar kümesi sonlu ise E grafına *sonlu graf (finite graph)*, E grafı sonsuz yayıcı içermiyorsa E'ye *sıra-sonlu graf (row-finite graph)* denir.

Tanım 2.1.35. ([21]) Bir E grafındaki $e_1, e_2, \cdots, e_n \in E^1$ kenarları için bir p *yolu (path)*; $r(e_i) = s(e_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ olacak şekilde $p = e_1 e_2 \cdots e_n$ kenarlarının dizisidir. Burada p yolunun kaynağı ve değişimi sırasıyla $s(p) = s(e_1)$ ve $r(p) = r(e_n)$ şeklindedir. n kenardan oluşan bir yolun *uzunluğu (length)* n dir ve $l(p) = n$ şeklinde gösterilir. Her köşe sıfır uzunluklu bir yoldur yani $v \in E^0$ için $s(v) = v = r(v)$ dir.

E grafındaki bütün yolların kümesi E^* olarak tanımlanır. Verilen bir $p = e_1 e_2 \cdots e_n \in E^*$ yolu için p^0, p yolunun bütün köşelerinin kümesi olarak tanımlanır ve $p^0 = \{s(e_1), r(e_i) : i = 1, 2, \cdots\}$ kümesiyle gösterilir. $k \leq n$ olacak şekilde bir $q = e_1 e_2 \cdots e_k$ yoluna p nin *ilk alt yolu (initial subpath)* denir.

Tanım 2.1.36. ([21]) $v, w \in E^0$ köşeleri ve $e \in E^1$ kenarını alalım. e kenarının gölge kenarı $e^* \in (E^1)^*$ şeklinde gösterilir ve $s(e) = v, r(e) = w$ olmak üzere $s(e^*) = w$ ve $r(e^*) = v$ yazılır. E^1 kümesine *reel kenarların (real edges)* kümesi, $(E^1)^*$ kümesine ise *gölge kenarların (ghost edges)* kümesi denir. $p = e_1 \cdots e_n$ yolunun gölge yolu $p^* = e_n^* \cdots e_1^*$ şeklindedir.

Tanım 2.1.37. ([2]) Bir E grafında $p = e_1 e_2 \cdots e_n \in E^*$ yolunu alalım. $v \in E^0$ için $s(p) = v$ ve aynı şekilde $r(p) = v$ oluyorsa p yoluna v köşesini baz kabul eden *kapalı yol (closed path)* denir. Her $i > 1$ için $s(e_i) \neq v$ şartı sağlanıyorsa p yoluna v köşesini baz ka-

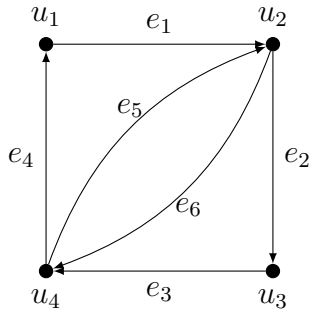
bul eden *kapalı basit yol (closed simple path)* denir.
v köşesini baz kabul eden bütün kapalı yolların kümesi *CP(v)*, bütün kapalı basit yolların kümesi ise *CSP(v)* ile gösterilir.

Tanım 2.1.38. ([2]) Bir $p = e_1e_2 \cdots e_n \in E^*$ için $s(p) = r(p)$ iken her $i \neq j$ için $s(e_i) \neq s(e_j)$ sağlanıyorsa p yoluna *döngü (cycle)* denir. Bir p döngüsü için $s(p) = r(p) = v$ ise p ye, v köşesini baz kabul eden bir döngü adı verilir. Bir E grafında hiç döngü yoksa E grafı *çevrimsiz graf (acyclic graph)* olarak adlandırılır.
Bir döngü her zaman bir kapalı basit yol, bir kapalı basit yol da bir kapalı yoldur.

Tanım 2.1.39. ([2]) Bir $p = e_1e_2 \cdots e_n$ yolu ve $e \in E^1$ kenarı için $s(e_i) = s(e)$ iken $e_i \neq e$ $(i \in \{1, 2, \cdots, n\})$ oluyorsa e kenarı p yolunun *çıkışı (exit)* olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.40. ([21]) Bir E grafında her döngü bir çıkışa sahipse E grafı *L koşulunu (condition L)* sağlar. E grafındaki bütün köşeler hiçbir kapalı basit yolun bazı değilse veya en az iki kapalı basit yolun bazı oluyorsa E grafı *K koşulunu (condition K)* sağlar.

Örnek 2.1.41. E :



$f = e_1e_2e_3e_4$ yolu u_1 köşesini baz alan bir kapalı yoldur.
$p = e_4e_1e_2e_3$ yolu bir döngü, kapalı yol ve kapalı basit yoldur.
$q = e_6e_4e_1e_2e_3e_5$ yolu u_2 köşesini baz alan kapalı bir yoldur fakat kapalı basit yol değildir.
Aynı zamanda graf (L) koşulunu ve (K) koşulunu sağlar.

Tanım 2.1.42. ([21]) Bir E grafında $u, v \in E^0$ köşelerini ve $p \in E^*$ yolunu alalım. Eğer $s(p) = v$ ve $r(p) = u$ ise E^0 kümesi üzerinde $v \geq u$ şeklinde gösterilen $\geq$ bağıntısı tanımlanır ve v ile u *bağlantılıdır* denir. Bir $D \subseteq E^0$ olmak üzere eğer $v, u \in D$ için $v \geq w$ ve

$u \geq w$ olacak şekilde $w \in D$ köşesi varsa D kümesine *azalan yönlü (downward directed)* bir küme denir.

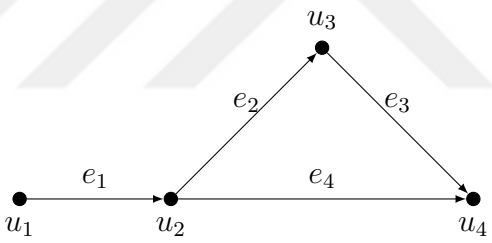
Tanım 2.1.43. ([21]) Her $v \in E^0$ köşesi için v ile bağlantılı olan E^0 daki bütün köşelerin kümesi

$$T(v) = \{w \in E^0 | v \geq w\}$$

ile gösterilir ve bu kümeye v köşesinin *ağacı (tree)* denir. Her köşe kendisiyle bağlantılı yani $v \geq v$ olduğu için $v \in T(v)$ olur.

Tanım 2.1.44. ([21]) E bir graf ve $H \subseteq E^0$ olsun.
(i) $v \in H$ iken $T(v) \subseteq H$ oluyorsa H kümesine *kalıtsal alt küme (hereditary subset)*,
(ii) $v \in E^0$ düzgün köşesi için $r(s^{-1}(v)) \subseteq H$ iken $v \in H$ oluyorsa H kümesine *doymuş alt küme (saturated subset)* denir.
Bir E grafında E^0 ve $\varnothing$ her zaman kalıtsal doymuş kümelerdir.

Örnek 2.1.45. E :



$H = \{u_2, u_3, u_4\}$ kümesi kalıtsal bir kümedir fakat doymuş küme değildir.
$u_2 \in H$ köşesi için $T(u_2) = \{u_2, u_3, u_4\}$ ve $T(u_2) \subseteq H$;
$u_3 \in H$ köşesi için $T(u_3) = \{u_3, u_4\}$ ve $T(u_3) \subseteq H$;
$u_4 \in H$ köşesi için $T(u_4) = \{u_4\}$ ve $T(u_4) \subseteq H$
olduğundan H kümesi kalıtsal kümedir.
$r(s^{-1}(u_2)) = \{u_3, u_4\} \subseteq H$ iken $u_2 \in H$;
$r(s^{-1}(u_3)) = \{u_4\} \subseteq H$ iken $u_3 \in H$;
$r(s^{-1}(u_4)) = \varnothing \subseteq H$ iken $u_4 \in H$;
$r(s^{-1}(u_1)) = \{u_2\} \subseteq H$ fakat $u_1 \notin H$
olduğundan H kümesi doymuş küme değildir.
$S = \{u_1, u_2\}$ kümesi ise kalıtsal olmayan doymuş bir kümedir.

Tanım 2.1.46. ([21]) E bir graf ve $H \subseteq E^0$ kalıtsal doymuş bir alt küme olsun.

$$B_H = \{v \in E^0 \backslash H : v \text{ sonsuz yayıcı ve } 0 < |s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \backslash H)| < \infty\}$$

kümesine *kırılan köşelerin (breaking vertices) kümesi* denir. $v \in B_H$ için

$$v^H = v - \sum_{\{s(e)=v, r(e) \notin H\}} ee^*$$

şeklinde tanımlanır.

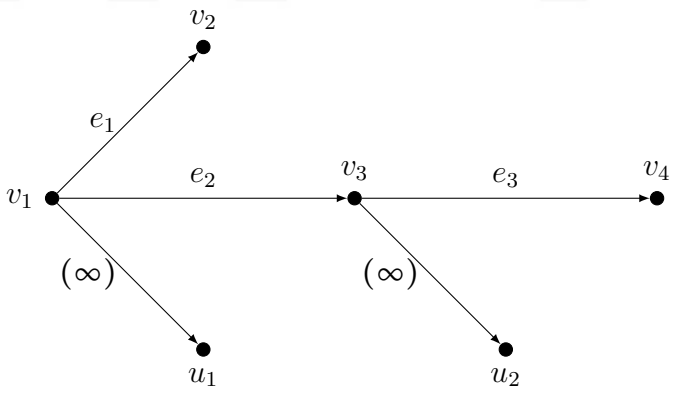
$H \subseteq E^0$ kalıtsal doymuş alt küme ve $S \subseteq B_H$ ise (H, S) ikilisine *uygun çift (admissible pair)* denir.

Tanım 2.1.47. ([21]) E keyfi bir graf ve $(H, S), E$ grafında bir uygun çift olmak üzere $E\backslash(H, S)$ *bölüm grafı (quotient graph)* aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(E\backslash(H,S))^0 := (E^0 \backslash H) \cup \{v' : v \in B_H \backslash S\}$$
$$(E\backslash(H,S))^1 := \{e \in E^1 : r(e) \notin H\} \cup \{e' : e \in E^1, r(e) \in B_H \backslash S\}$$

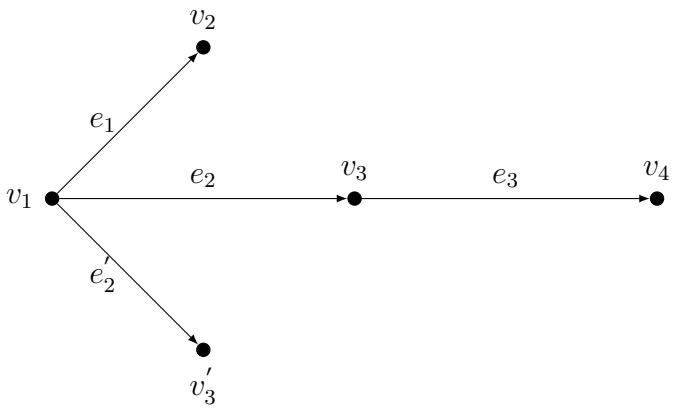
ve $s(e') = s(e)$ ile $r(e') = r(e)'$ dür.

Örnek 2.1.48. E :



$H = \{u_1, u_2\}$ kalıtsal doymuş bir küme, $B_H = \{v_1, v_3\}$ kırılan köşelerin kümesi ve $S = \{v_1\} \subseteq B_H$ olsun. Buna göre $E\backslash(H, S)$ bölüm grafı aşağıdaki gibidir.

$E\backslash(H,S)$:



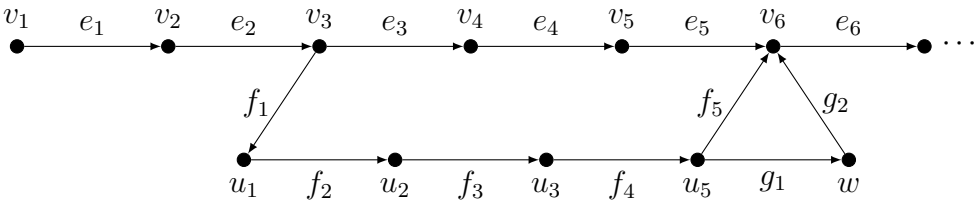
Tanım 2.1.49. ([21]) E grafında $v \in E^0$ köşesi için $\mid s^{-1}(v) \mid > 1$ ise (yani birden fazla kenar yayıyorsa) v köşesi *çatallanma (bifurcation)* olarak adlandırılır. $T(v)$ kümesinde bulunan herhangi bir köşede çatallanma veya döngü yoksa v köşesine bir *çizgi nokta (line point)* denir. $P_l(E)$ kümesi bütün çizgi noktaların kümesini gösterir.

Tanım 2.1.50. ([21]) E bir graf olsun. Her $v \in E^0$ köşesi için $v \geq s$ özelliğine sahip bir $s \in S \subseteq E^0$ sayılabilir kümesi varsa E grafı *sayılabilir ayırma özelliğine (countable separation property)* sahiptir.

Tanım 2.1.51. ([10]) c döngüsünün bazı olan v köşesi başka hiçbir döngünün bazı değilse bu c döngüsüne *özel döngü (exclusive cycle)* veya *K sız döngü (cycle without K)* adı verilir.

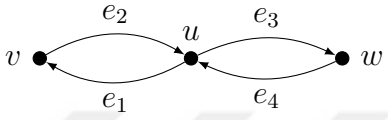
Tanım 2.1.52. ([16]) $n \geq 1$ için bir $p = e_1e_2\cdots e_n\cdots$ sonsuz yolu verilsin. $\tau_{\leq n}(p) = e_1\cdots e_n$ ve $\tau_{>n}(p) = e_{n+1}e_{n+2}\cdots$ şeklinde tanımlanır.
p ve q iki sonsuz yol olsun. Verilen iki m, n tamsayıları için $\tau_{>m}(p) = \tau_{>n}(q)$ eşitliği sağlanıyorsa p ve q yollarına *kuyruk eşdeğer (tail-equivalent)* denir.
$g \in E^*$ sonlu kapalı yol olsun. $p = ggg\cdots$ sonsuz yoluna *rasyonel yol (rational path)* adı verilir.

Örnek 2.1.53. E :



$p = e_1e_2e_3e_4e_5e_6\cdots$, $q = e_1e_2f_1f_2f_3f_4f_5e_6\cdots$ ve $h = e_1e_2f_1f_2f_3f_4g_1g_2e_6\cdots$ yolları sonsuz yollar ve $\tau_{>5}(p) = \tau_{>7}(q) = \tau_{>8}(h)$ olduğundan bu yollar kuyruk eşdeğerdir.

Örnek 2.1.54. E :



$g = e_1e_2e_3e_4$ bir kapalı yol ve $p = gggg\cdots$ yolu bir rasyonel yoldur.

Tanım 2.1.55. ([17]) E bir graf olsun. Her $v \in E^0$ köşesi için

$$M(v) = \{w \in E^0 : w \geq v\} \text{ ve } H(v) = E^0 \backslash M(v)$$

tanımlanır. Benzer şekilde $p \in E$ sonsuz yolu için

$$M(p) = \{w \in E^0 : w \geq v, v \in p^0\} \text{ ve } H(p) = E^0 \backslash M(p).$$

Burada $M(v)$ ve $M(p)$ kümeleri azalan yönlü kümelerdir.

Teorem 2.1.56. ([17]) v köşesi batak veya sonsuz yayıcı ise $H(v)$ kümesi kalıtsal doymuş alt kümedir.

İspat: $H(v)$ kümesinin kalıtsal alt küme olduğunu yani $x \in H(v)$ için $T(x) \subseteq H(v)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $x \in H(v)$ ve $y \in T(x)$ alalım. O halde $x \geq y$ dir. $x \in H(v)$ ise $x \notin M(v)$ olup $x \ngeq v$ olduğu açıktır. $y \in H(v)$ yani $y \notin M(v)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Tersini kabul edelim yani $y \in M(v)$ olsun. Buradan $y \geq v$ yazılır. $x \geq y$ ve $y \geq v$ ise $x \geq v$ çelişkisi elde edilir. Yani $y \notin M(v)$ olduğundan $H(v)$ kalıtsal alt kümedir.

Şimdi $H(v)$ kümesinin doymuş alt küme olduğunu gösterelim. $r(s^{-1}(x)) \subseteq H(v)$ iken $x \in H(v)$ olduğunu gösterelim. Bunun için tersini kabul edelim yani $x \notin H(v)$ olsun. O

zaman $x \in M(v)$ olur. Böylece $x \geq v$ dir. $p = e_1 \cdots e_n$ yolu $s(p) = x$ ve $r(p) = v$ olan bir yol olsun. Burada $s(p) = s(e_1) = x$ dir. $r(e_1) = w$ olsun. $r(s^{-1}(x)) \subseteq H(v)$ olduğundan $w \in H(v)$ yani $w \ngeq v$ dir. Fakat $x \geq v$ olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $x \in H(v)$ dir.

■

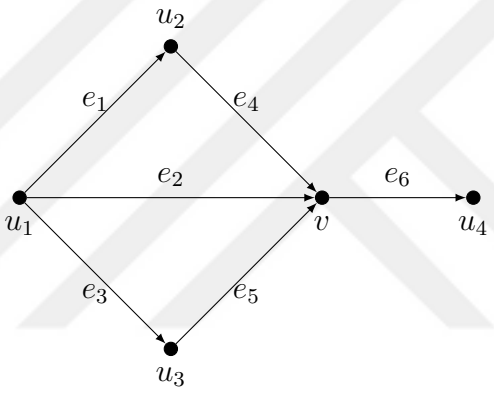
Teorem 2.1.57. ([17]) p sonsuz yol ise $H(p)$ kümesi kalıtsal doymuş alt kümedir.

İspat: Teorem 2.1.56 nın ispatına benzer olarak yapılır.

■

Örnek 2.1.58. Teorem 2.1.56 da verilen v köşesi sonlu sayıda kenar yayıyorsa $H(v)$ kümesi doymuş alt küme olmayabilir.

E :



$M(v) = \{u_1, u_2, u_3, v\}$ ve $H(v) = \{u_4\}$ olur.

$r(s^{-1}(v)) = \{u_4\} \subseteq H(v)$ iken $v \notin H(v)$ olduğundan $H(v)$, doymuş küme değildir.

3. LEAVITT YOL CEBİRLERİ

3.1. Katsayıları K Cisminden Alınan Leavitt Yol Cebirleri

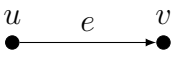
Tanım 3.1.1. ([2]) E keyfi bir graf olsun. E grafının *genişletilmiş grafı (extended graph)*, $(E^1)^* = \{e_i^* : e_i \in E^1\}$ kümesi ile r' ve s' fonksiyonları, her $e \in E^1$ için

$$r'(e^*) = s(e), s'(e^*) = r(e) \text{ ve } r'(e) = r(e), s'(e) = s(e)$$

olarak tanımlanan $\hat{E} = (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, r', s')$ grafıdır.
Genişletilmiş graftaki E^1 kümesi reel kenarları, $(E^1)^*$ kümesi gölge kenarları gösterir.

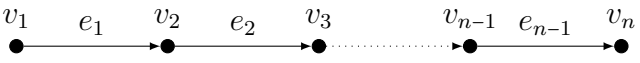
Tanım 3.1.2. ([21]) E keyfi bir graf ve K bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlarla beraber E^0, E^1 ve $(E^1)^*$ kümeleri tarafından üretilen K cebirine, katsayıları K cisminden alınan E grafının *Leavitt yol cebiri (Leavitt path algebra)* denir ve $L_K(E)$ ile gösterilir.
(V) Her $v_i, v_j \in E^0$ için $v_i v_j = \delta_{ij} v_i$
(E1) Her $e \in E^1$ için $s(e)e = e = er(e)$
(E2) Her $e \in E^1$ için $r(e)e^* = e^* = e^* s(e)$
(CK1) Her $e_i, e_j \in E^1$ için $e_i^* e_j = \delta_{ij} r(e_j)$
(CK2) Her $v \in E^0$ düzgün köşesi için $v = \sum_{\{e \in E^1 : s(e) = v\}} ee^*$
(V) ve (E1) şartlarını sağlayan E^0 ve E^1 kümeleri tarafından üretilen K-cebirine E grafı üzerindeki *yol K-cebiri* denir ve A(E) ile gösterilir. Ayrıca (CK1) ve (CK2) koşulları *Cuntz-Krieger bağıntıları* olarak adlandırılır.
(V) şartına göre E^0 kümesindeki her köşe $L_K(E)$ de ortogonal idempotentler kümesini oluşturur.

Örnek 3.1.3. ([2]) E grafı aşağıdaki gibi verilsin.



E grafının Leavitt yol cebiri $L_K(E) \cong \mathbb{M}_2(K)$ olur.

E :



E grafının Leavitt yol cebiri $L_K(E) \cong \mathbb{M}_n(K)$ dır.

Örnek 3.1.4. ([21]) R_1 :



R_1 grafının Leavitt yol cebiri $L_K(R_1) \cong K[x, x^{-1}]$ şeklindedir.

Lemma 3.1.5. ([21]) E keyfi bir graf olsun. $k \in K$ ve $p, q \in E^*$ olmak üzere $L_K(E)$'nin her *elemanı (monomial)* kpq^* formundadır. Özellikle her eleman aşağıdaki iki formdan biriyle gösterilebilir:

(i) $k \in K$ ve $v_i \in E^0$ için kv_i,

(ii) $k \in K,\ e_{i_1}, \cdots, e_{i_m}, e_{j_1}, \cdots, e_{j_n} \in E^1$ ve $m, n \geq 0,\ m+n \geq 1$ için $ke_{i_1} \cdots e_{i_m} e^*_{j_n} \cdots e^*_{j_1}$ şeklindedir. Burada p ve $q,\ v_i$ köşesindeki 0 uzunluklu yollardır ya da $p = e_{i_1} \cdots e_{i_m},\ q = e_{j_1} \cdots e_{j_n}$ olacak şekilde p ve q yollarından en az birinin uzunluğu 0 dan büyüktür.

Lemma 3.1.6. ([21]) E keyfi bir graf olsun. Bu takdirde

$$L_K(E) = \bigoplus_{v \in E^0} L_K(E)v$$

Önerme 3.1.7. ([27]) E keyfi bir graf olsun. $\alpha, \beta \in E^*$ olmak üzere E grafındaki herhangi bir (H, S) uygun çifti için

$$I(H,S) = span\Big(\{\alpha\beta^* : r(\alpha) = r(\beta) \in H\} \cup \{\alpha w^H \beta^* : r(\alpha) = r(\beta) = w \in S\}\Big)$$

yazılabilir. Aynı zamanda $I(H, S),\ L_K(E)$ nin dereceli idealidir.

Önerme 3.1.8. ([26]) E keyfi bir graf olsun.

(i) $L_K(E)$ Leavitt yol cebirinde sıfırdan farklı her $\mathbb{Z}$-dereceli ideal bir köşe içerir.

(ii) E grafı (L) koşulunu sağlarsa $L_K(E)$ Leavitt yol cebirinde sıfırdan farklı her ideal bir köşe içerir.

Teorem 3.1.9. ([27]) E keyfi bir graf ve $(H, S),\ E$ grafındaki uygun çift olsun. Bu takdirde

$$L_K(E)/I(H,S) \cong L_K(E\backslash(H,S))$$

Teorem 3.1.10. ([10]) E keyfi bir graf olsun. $P \cap E^0 = H$ eşitliğini sağlayan $P,\ L_K(E)$ nin primitif ideali ise aşağıdaki özelliklerden birini sağlar.

i) P dereceli ideal değildir ve $c,\ v$ köşesini baz kabul eden, $E^0\backslash H = M(v)$ de çıkışı olmayan bir döngü olmak üzere P ideali $I(H, B_H) \cup \{f(c)\}$ tarafından üretilir.

ii) $u \in B_H$ ve $E^0\backslash H = M(v)$ olmak üzere $P,\ I(H, B_H\backslash\{u\})$ biçiminde bir dereceli idealdir.

iii) $E^0\backslash H$ azalan yönlü, (L) koşulunu ve sayılabilir ayırma özelliğini sağlamak üzere $P,\ I(H, B_H)$ biçiminde bir dereceli idealdir.

Önerme 3.1.11. ([26]) E keyfi bir graf olsun. $L_K(E)$ Leavitt yol cebiri, yarı asal (semiprime) halkadır.

Sonuç 3.1.12. ([2]) E keyfi bir graf olsun. $L_K(E)$ Leavitt yol cebiri basittir ancak ve ancak

i) E grafı (L) koşulunu sağlar.

ii) E^0 kümesinin kalıtsal doymuş alt kümeleri sadece $\{\varnothing\}$ ve E^0 kümeleridir.

Lemma 3.1.13. ([26]) E keyfi bir graf ve $v \in T(u)$ olacak şekilde $u, v \in E^0$ olsun. u köşesini v ile birleştiren tek bir yol varsa ve bu yol çatallanma içermiyorsa o zaman sol $L_K(E)$-modül olarak $L_K(E)u \cong L_K(E)v$ dir.

Lemma 3.1.14. ([26]) E keyfi bir graf ve $s^{-1}(u) = \{f_1, f_2 \cdots f_n\}$ olacak şekilde $u \in E^0$ düzgün köşesini alalım. Bu takdirde $L_K(E)u = \oplus_{i=1}^{n} L_K(E) f_i f_i^*$ olur. Ayrıca $v_i = r(f_i)$ ve $i \neq j$ olacak şekilde $r(f_i) \neq r(f_j)$ oluyorsa $L_K(E)u \cong \oplus_{i=1}^{n} L_K(E)v_i$ sağlanır.

Lemma 3.1.15. ([26]) E keyfi bir graf ve $u \in E^0$ sonsuz yayıcı olsun. $s^{-1}(u) = \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ olacak şekilde $\oplus_{i=1}^{\infty} L_K(E) f_i f_i^* \subsetneq L_K(E)u$ olur. Burada $L_K(E)u$, bir minimal sol ideal

değildir.

Sonuç 3.1.16. ([26]) E keyfi bir graf ve $w \in E^0$ olsun. $T(w)$ kümesi çatallanma içeriyorsa veya $w \in E^0$ köşesini baz kabul eden kapalı yol varsa $L_K(E)w$ sol ideali minimal ideal değildir.

Teorem 3.1.17. ([26]) E keyfi bir graf ve $u \in E^0$ olsun. $L_K(E)u$ minimal sol idealdir ancak ve ancak $u \in P_l(E)$ dir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Tanım 4.0.1. ([16]) E bir graf, p bir sonsuz yol ve $\mathbf{V}_{[p]} = \bigoplus_{q\in[p]} Kq$, bazı $\{q : q \in [p]\}$ olan bir K-vektör uzayı olsun. Aşağıda tanımlanan işleme göre $\mathbf{V}_{[p]}$ bir sol $L_K(E)$-modüldür. Her $q \in [p]$ ve her $v \in E^0,\ e \in E^1$ için

$$v \cdot q = \begin{cases} q, & \text{eğer } s(q) = v \\ 0, & \text{eğer } s(q) \neq v \end{cases}$$

$$e \cdot q = \begin{cases} eq, & \text{eğer } r(e) = s(q) \\ 0, & \text{eğer } r(e) \neq s(q) \end{cases}$$

$$e^* \cdot q = \begin{cases} \tau_{>1}(q), & \text{eğer } q = eq' \\ 0, & \text{eğer } q \neq eq' \end{cases}$$

Teorem 4.0.2. ([16], Theorem 3.3) $\mathbf{V}_{[p]}$ sol $L_K(E)$-modülü basit modüldür.

Tanım 4.0.3. ([16]) E bir graf, $w \in E^0$ bir batak ve $p,\ E$ grafında bir yol olsun. $N_w,\ \{p : r(p) = w\}$ kümesini baz kabul eden bir K-vektör uzayıdır. Aşağıda tanımlanan işleme göre $\mathbf{N}_w$ bir sol $L_K(E)$-modüldür. Her $v \in E^0,\ e \in E^1$ ve $r(p) = w$ olan her $p \in E^*$ yolu için

$$v \cdot p = \begin{cases} p, & \text{eğer } s(p) = v \\ 0, & \text{eğer } s(p) \neq v \end{cases}$$

$$e \cdot p = \begin{cases} ep, & \text{eğer } r(e) = s(p) \\ 0, & \text{eğer } r(e) \neq s(p) \end{cases}$$

$$e^* \cdot p = \begin{cases} p', & \text{eğer } p = ep' \\ 0, & \text{eğer } p \neq ep' \end{cases}$$

$e^* \cdot w = 0$, her $e \in E^0$ için

Önerme 4.0.4. ([16], Theorem 3.7) $\mathbf{N}_w$ sol $L_K(E)$-modülü basit modüldür.

Lemma 4.0.5. ([17], Lemma 3.1) E bir graf ve $w \in E^0$ bir batak olsun. $\mathbf{N}_w$ basit modülünün sıfırlayanı $I(H(w), B_{H(w)})$ dereceli idealidir.

İspat: $\mathbf{N}_w$ modülünün sıfırlayanı J ideali olsun. $J = I(H(w), B_{H(w)})$ eşitliğinin sağlandığını göstermek istiyoruz. Bunun için öncelikle $I(H(w), B_{H(w)}) \subseteq J$ olduğunu gös-

termeliyiz. $J,\ L_K(E)$ nin ideali olduğundan $H(w)$ ve $\{v^{H(w)} : v \in B_{H(w)}\}$ kümelerinin $\mathbf{N}_w$ modülünü sıfırladığını göstermek yeterlidir. Eğer $v \in H(w)$ ise $v \notin M(w)$ olup v ile w bağlantılı değildir ve $r(p) = w$ şartını sağlayan her p yolu için $vp = 0$ olur. Eğer $v \in B_{H(w)} \subset E^0 \backslash H(w)$ ise $p,\ s(p) = v$ ve $r(p) = w$ olan bir yoldur. $p = ep'$ olacak şekilde e kenarı p yolunun ilk kenarı olsun. Bu takdirde $r(e),\ w$ ile bağlantılı olduğundan $r(e) \notin H(w)$ yani $r(e) \in M(w)$ dir. Buradan,

$$v^{H(w)}p = \left(v - \sum_{\{f \in s^{-1}(v), r(f) \notin H\}} ff^*\right)ep' = (e-e)p' = 0$$

yazılabilir. Dolayısıyla $I(H(w), B_{H(w)}) \subseteq J$ sağlanmış olur. Şimdi $J \subseteq I(H(w), B_{H(w)})$ olduğunu gösterelim. Bunun için $F = E\backslash(H(w), B_{H(w)})$ bölüm grafını alırsak Teorem 3.1.9 dan $L_K(E)/I(H(w), B_{H(w)}) \cong L(F)$ yazabiliriz. $\mathbf{N}_w$, basit $L_K(E)$-modül olduğundan aynı zamanda $L_K(E)/I(H(w), B_{H(w)})$-modüldür, dolayısıyla $\mathbf{N}_w$, basit $L_K(F)$-modüldür. $\mathbf{N}_w$ modülünün $L_K(F)$-modül olarak sadık modül olduğunu gösterelim. $\mathbf{N}_w$ sol $L_K(F)$-modülünün sıfırlayanına $\bar{J}$ diyelim. F grafında her köşe w ile bağlantılı olduğundan $\bar{J} \cap F^0 = \varnothing$ dir. Aynı zamanda F grafında her köşe w batağı ile bağlantılı olduğundan F grafı (L) koşulunu sağlar. Dolayısıyla Önerme 3.1.8 den $L_K(F)$ in sıfırdan farklı her ideali bir köşe içerir yani $\bar{J} = 0$ olur.

■

Lemma 4.0.6. ([17], Lemma 3.2) E keyfi bir graf ve $p \in E^*$ sonsuz bir yol olsun.
i) p yolu bir özel döngüde bitmiyorsa $\mathbf{V}_{[p]}$ modülünün sıfırlayanı $I(H(p), B_{H(p)})$ dir.
ii) p yolu v köşesini baz alan c özel döngüsünde sonlanıyorsa $\mathbf{V}_{[p]}$ modülünün sıfırlayanı $I(H(p), B_{H(p)}, (c-v))$ dir.

İspat: *i)* $\mathbf{V}_{[p]}$ modülünün sıfırlayanı J ideali olsun. $J = I(H(p), B_{H(p)})$ olduğunu göstermek istiyoruz. Öncelikle $I(H(p), B_{H(p)}) \subseteq J$ olduğunu göstermeliyiz. $J,\ L_K(E)$ nin ideali olduğundan $H(p)$ ve $B_{H(p)}$ kümelerinin $\mathbf{V}_{[p]}$ modülünü sıfırladığını göstermek yeterlidir. Eğer $x \in H(p)$ ise $x \notin M(p)$ olup x ile p yolu bağlantılı olmaz ve buradan $x \cdot p = 0$ olur. Eğer $x \in B_{H(p)} \subset E^0 \backslash H(p)$ ise $p,\ s(p) = x$ ve $r(p) = v$ olan bir yoldur. $p = ep_1$ olacak şekilde e kenarı p yolunun ilk kenarı olsun. Bu takdirde $r(e),\ v$ ile bağlantılı olduğundan $r(e) \notin H(p)$ yani $r(e) \in M(p)$ dir. Buradan,

$$x^{H(p)} \cdot p = \left(x - \sum_{s(f)=x, r(f) \notin H(p)} ff^*\right)ep_1 = xep_1 - \sum ff^*ep_1 = ep_1 - ep_1 = 0$$

yazılabilir. Buradan $I(H(p), B_{H(p)}) \subseteq J$ olur. Şimdi $J \subseteq I(H(p), B_{H(p)})$ olduğunu gösterelim. Bunun için $F = E\backslash(H(p), B_{H(p)})$ bölüm grafını alırsak Teorem 3.1.9 dan $L_K(E)/I(H(p), B_{H(p)}) \cong L_K(F)$ yazılabilir. $\mathbf{V}_{[p]}$, basit $L_K(E)$-modül olduğundan aynı zamanda $L_K(E)/I(H(p), B_{H(p)})$-modüldür, dolayısıyla $\mathbf{V}_{[p]}$, basit $L_K(F)$-modüldür. Bu modülün sadık modül olduğunu göstermeliyiz. $\bar{J},\ \mathbf{V}_{[p]}$ sol $L_K(F)$-modülünün sıfırlayanı olsun. F grafında her köşe v ile bağlantılı olduğundan $\bar{J} \cap F^0 = \varnothing$ dir. Aynı zamanda F grafı (L) koşulunu sağlar. Dolayısıyla Önerme 3.1.8 den $L_K(F)$ in sıfırdan farklı her ideali bir köşe içerir yani $\bar{J} = 0$ olur.

ii) Lemma 4.0.5 in ispatında olduğu gibi çıkışı olmayan tek bir c döngüsüne sahip olan $F = E\backslash(H(p), B_{H(p)})$ bölüm grafı üzerindeki $\mathbf{V}_{[p]}$ basit $L_K(F)$-modülü elde edilir. $\mathbf{V}_{[p]}$ sol $L_K(F)$-modülünün sıfırlayanı $\bar{J}$ olup $\bar{J} \cap F^0 = 0$ olur. Dolayısıyla $\bar{J},\ L_K(F)$ in primitif idealidir. ([10], Teorem 4.3 (iii)) den $\bar{J},\ f(c)$ tarafından üretilen bir ideal olacak şekilde $K[x, x^{-1}]$ de indirgenmez $f(x)$ polinomu vardır. $\mathbf{V}_{[p]}$ modülünün sıfırlayanı $c - v$ olduğundan $f(x) = x - 1$ elde edilir.

■

Ara ve Rangaswamy [17] makalesinde $\mathbf{N}_w$ ve $\mathbf{V}_{[p]}$ basit modüllerinden farklı olarak $\mathbf{V}_{[q]}^f$ basit $L_K(E)$-modülünü tanımlamıştır.

Tanım 4.0.7. ([17]) $q = c^\infty$ olmak üzere $[q]$ bir sonsuz rasyonel yol ve $c = e_1 e_2 \cdots e_n,\ v$ köşesini baz kabul eden bir döngü olsun. $e \neq e_1$ olmak üzere

$$\sigma : L_K(E) \to L_K(E)$$

$$v \mapsto v$$

$$e \mapsto e$$

$$e^* \mapsto e^*$$

$$e_1 \mapsto a e_1$$

$$e_1^* \mapsto a^{-1} e_1$$

şeklinde tanımlanan bir otomorfizma olsun. $a \in K^\times$ için $\mathbf{V}_{[q]}^a$ üzerinde tanımlanan modül işlemi $*$ olarak tanımlanırsa

$$c * q = \sigma(c) c^\infty = a c c^\infty = a c^\infty = a q$$

ve c nin bütün devirli c_i permütasyonları için

$$c_i * c_i^{\infty} = ac_i^{\infty}$$

dir.

$n \geq 1$ olmak üzere $f(x) = 1 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in K[x, x^{-1}]$ indirgenmez polinom, $c = e_1e_2 \cdots e_m$ özel bir döngü ve $q = c^{\infty}$ olsun. $f(x)$ indirgenmez polinom olduğundan $K' = K[x, x^{-1}]/(f(x))$ bölüm halkası bir cisimdir. Buradan $M = \mathbf{V}_{[q]}^{\bar{x}}$, $L_{K'}(E)$-modül tanımlansın. $\bar{x} \in K'$ tersinir eleman olduğundan M modülünün basit $L_{K'}(E)$-modül olduğu açıktır. M modülü üzerinde skalerler $L_{K'}(E)$ den $L_K(E)$ ye kısıtlanırsa $\mathbf{V}_{[q]}^{f}$ sol $L_K(E)$-modül elde edilir.

Lemma 4.0.8. ([17], Lemma 3.3) $\mathbf{V}_{[q]}^{f}$ $L_K(E)$-modülü basittir.

İspat: A, $\mathbf{V}_{[q]}^{f}$ modülünün bir $L_K(E)$- alt modülü olsun. $A = \mathbf{V}_{[q]}^{f}$ olduğunu göstereceğiz. İlk olarak $0 \neq \lambda, \mu \in K'$ skalerleri için $\lambda q \in A$ olmak üzere $\mu q \in A$ olduğunu gösterelim. Bunun için $(\bar{x}\lambda)q \in A$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$c * (\lambda q) = \sigma(c)(\lambda c^{\infty}) = (\bar{x}\lambda)q$$

olduğundan $(\bar{x}\lambda)q \in A$ dır. $0 \neq \lambda_i \in K'$ ve p_i yolları $[q]$ daki farklı yollar olmak üzere $0 \neq a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \in A$ olsun. $p_i = p_i'c^{\infty}$ yolu tek bir şekilde yazılabilir. Burada p_i' yolları e_1 kenarını içermeyen sonlu yollardır. $i \geq 2$ olmak üzere $l(p_1') \geq l(p_i')$ olduğunu varsayalım. Buradan p_1', e_1 kenarını içermeyen en uzun uzunluğa sahip bir yol olduğundan

$$\left[(p_1')^*\right] * a = \lambda_1 c^{\infty}$$

yazılır. Böylece $\lambda_1 q \in A$ dır. $0 \neq \mu \in K'$ ve $p_0 \in [q]$ olsun. O halde $p_0 = p_0'q$ olur. Burada p_0', e_1 kenarını içermeyen sonlu bir yoldur. Hipotezden $\mu q \in A$ elde edilir ve

$$\mu p_0 = p_0' * (\mu q) \in A$$

olur. Böylece $A = \mathbf{V}_{[q]}^{f}$ eşitliği sağlanır.

■

Lemma 4.0.9. ([17], Lemma 3.4) $n \geq 1$ için $f(x) = 1 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in K[x, x^{-1}]$ indirgenmez polinom, $c = e_1e_2 \cdots e_m$ bir özel döngü ve $q = c^{\infty}$ olsun. Bu takdirde $\mathbf{V}_{[q]}^{f}$ modülünün sıfırlayanı $I(H(q), B_{H(q)}, f(c))$ dereceli idealidir.

İspat: $F = E\backslash(H(q), B_{H(q)})$ bölüm grafı olmak üzere $\mathbf{V}_{[q]}^{f}$ $L_K(F)$-modülünün sıfırlayanı $\bar{J}$ olsun. $f(c) \in \bar{J}$ olduğunu göstermeliyiz. $\sigma,\ L_K(E)$ nin her elemanını kendisine eşleyen bir otomorfizması olmak üzere

$$f(c) * c^{\infty} = \sigma(f(c))c^{\infty} = f(\sigma(c))c^{\infty} = f(\bar{x})c^{\infty} = 0$$

olup $f(c) \in \bar{J}$ olur.

■

$v \in B_{H(v)}$ olacak şekilde $v \in E^0$ bir sonsuz yayıcı olsun. $F = E\backslash(H(v), B_{H(v)}\backslash\{v\})$ bölüm grafı ve $P = I(H(v), B_{H(v)}\backslash\{v\})$ bir dereceli primitif ideal olsun. Teorem 3.1.9 a göre

$$L_K(E)/P \cong L_K(F)$$

dir. Burada $e \in E^1$ ve $r(e) = v$ için $s(e') = s(e)$ ve $r(e') = v'$ bir batak olmak üzere $F^0 = (E^0\backslash H(v)) \cup \{v'\}$ ve $F^1 = \{e \in E^1 : r(e) \notin H(v)\} \cup \{e' : e \in E^1, r(e) = v\}$ dir. $M_F(v') = F^0$ olduğunu gösterelim. $M_E(v) = E^0\backslash H(v)$ olduğundan $v \geq v'$ olduğunu göstermek yeterlidir. $v \in B_{H(v)}$ olduğundan $s(e) = v$ ve $r(e) \in M_E(v)$ olacak şekilde $e \in E^1$ kenarı vardır. $r(e) = v$ ise $e' \in F^1$ ve $s(e') = v,\ r(e') = v'$ olur. Eğer $r(e) \neq v$ ise $M_E(v)$ deki her köşe v ile bağlantılı olduğundan $s(p) = r(e)$ ve $r(p) = v$ olan bir $p = f_1 \cdots f_m$ yolu vardır. Böylece $s(q) = v$ ve $r(q) = v'$ olacak şekilde $q = ef_1f_2 \cdots f_{m-1}f_m,\ F$ grafında bir yoldur. F grafında v' batağı ile oluşturulan $\mathbf{N}_{v'}$ basit $L_K(F)$-modülünü göz önüne alalım. $M_F(v') = F^0$ olduğundan Lemma 4.0.5 e göre $\mathbf{N}_{v'}$ basit sadık $L_K(F)$-modüldür. $L_K(E) \to L_K(F)$ dönüşümünden $\mathbf{N}_{v'}$ modülü basit $L_K(E)$-modül olarak düşünülebilir. Bu modül $\mathbf{N}_v^{B_{H(v)}}$ ile gösterilir.

Lemma 4.0.10. ([17], Lemma 3.5) v köşesi sonsuz yayıcı ve $v \in B_{H(v)}$ olsun. $\mathbf{N}_v^{B_{H(v)}}$ modülünün sıfırlayanı $I(H(v), B_{H(v)}\backslash\{v\})$ dereceli idealidir.

$r(s^{-1}(v)) \subseteq H(v)$ olacak şekilde v köşesi bir sonsuz yayıcı olsun. v köşesi $E\backslash(H(v), B_{H(v)})$ bölüm grafında tek bataktır. $\mathbf{N}_v$, basit $L_K(E\backslash H(v), B_{H(v)})$-modül olsun. Bu durumda $\mathbf{N}_v$ sadık bir basit $L_K(E\backslash H(v), B_{H(v)})$-modüldür. $L_K(E) \to L_K(E\backslash H(v), B_{H(v)})$ dönüşümünden $\mathbf{N}_v$ bir basit $L_K(E)$-modül olur.

Bu modül $\mathbf{N}_v^{H(v)}$ ile gösterilir.

Lemma 4.0.11. ([17], Lemma 3.6) v köşesi sonsuz yayıcı ve $r(s^{-1}(v)) \subseteq H(v)$ olsun. $\mathbf{N}_v^{H(v)}$ basit modülünün sıfırlayanı $I(H(v), B_{H(v)})$ dereceli idealidir.

Tanım 4.0.12. ([17], Definition 3.7) E keyfi bir graf ve K bir cisim olsun. Aşağıda tanımlanan modüller, *Chen modül* olarak adlandırılır.
i) $w \in E^0$ bir batak olmak üzere $\mathbf{N}_w$ bir basit $L_K(E)$-modüldür.
ii) v sonsuz yayıcı ve $v \in B_{H(v)}$ olmak üzere $\mathbf{N}_v^{B_{H(v)}}$ bir basit $L_K(E)$-modüldür.
iii) v sonsuz yayıcı ve $r(s^{-1}(v)) \subseteq H(v)$ olmak üzere $\mathbf{N}_v^{H(v)}$ bir basit $L_K(E)$-modüldür.
iv) $p \in E^*$ sonsuz yol olmak üzere $\mathbf{V}_{[p]}$ bir basit $L_K(E)$-modüldür.
v) c bir özel döngü, $q = c^\infty$ bir yol ve $f(x) \neq x - 1$ için $f(x) \in K[x, x^{-1}]$ indirgenmez polinom olmak üzere $\mathbf{V}_{[q]}^f$ bir basit $L_K(E)$-modüldür.

Yukarıda tanımlanan tüm basit modüller ikili olarak izomorfik değildir.

Teorem 4.0.13. ([17], Theorem 3.9) E keyfi bir graf, K bir cisim ve $P,\ L_K(E)$ nin keyfi primitif ideali olsun. Bu durumda sıfırlayanı P ideali olan bir Chen basit S modülü vardır.

İspat: $P,\ L_K(E)$ nin primitif ideali ve $H = P \cap E^0$ olsun. Teorem 3.1.10 daki (i) şartının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda P dereceli ideal değildir ve c, u köşesini baz kabul eden, $E^0 \backslash H = M(u)$ da çıkışı olmayan bir döngü olmak üzere P ideali $I(H, B_H) \cup \{f(c)\}$ tarafından üretilir. $q = c^\infty$ olsun. $H = H(q) = E^0 \backslash M(u)$ ve Lemma 4.0.9 dan $\mathbf{V}_{[q]}^f$ modülünün sıfırlayanı $I(H, B_H, f(c)) = P$ olur.
Teorem 3.1.10 daki (ii) şartının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $u \in B_{H(u)}$ ve $E^0 \backslash H(u) = M(u)$ olmak üzere $P,\ I(H, B_H \backslash \{u\})$ biçiminde bir dereceli idealdir. $u \in B_{H(u)}$ sonsuz yayıcıdır ve $M(u) = E^0 \backslash H$ olduğundan $H = H(u)$ olur. Böylece Lemma 4.0.10 dan $\mathbf{N}_u^{B_{H(u)}}$ modülünün sıfırlayanı $I(H, B_H \backslash \{u\}) = P$ olur.
Şimdi Teorem 3.1.10 daki (iii) şartının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $E^0 \backslash H$ azalan yönlü bir kümedir, (L) koşulunu ve sayılabilir ayırma özelliğini sağlar ve $P,\ I(H, B_H)$ biçiminde bir dereceli idealdir. $E \backslash (H, B_H)$ bölüm grafındaki her köşe S deki bazı köşelerle bağlantılı olacak şekilde $E^0 \backslash H$ ın sayılabilir S alt kümesini alalım. $E \backslash (H, B_H)$ gra-

fındaki bütün köşelerle bağlantılı $E\backslash(H, B_H)$ da tek bir batak olduğunu ya da $E\backslash(H, B_H)$ grafındaki her köşe p^0 daki bir köşeyle bağlantılı olacak şekilde $E\backslash(H, B_H)$ da bir p sonsuz yolunun varlığını gösterelim. Bunun için $F := E\backslash(H, B_H)$ olsun. Eğer F grafı bir v batağına sahipse F^0 azalan yönlü küme olduğundan v tek batak köşesidir ve $v \in S$ olmak üzere $F^0 = M(v)$ olur. F grafının herhangi bir batak içermediğini kabul edelim. S kümesi sonsuz ise $v_1, v_2, v_3, \cdots S$ nin elemanlarının bir sıralaması olur. $S = \{v_1, \cdots, v_k\}$ sonlu bir küme olsun. O zaman $v_1, \cdots, v_k$ sonlu dizisi, sonsuz sayıda tekrar ederek $v_1, \cdots, v_k, v_1, \cdots, v_k, v_1, \cdots, v_k$ sonsuz dizisi elde edilir ve $v_{kr+i} = v_i$ yazılır. F grafındaki $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ yollarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

1) $i \leq j$ olduğunda $\lambda_i,\ \lambda_j$ nin bir ilk yoludur,

2) bütün i ler için $l(\lambda_i) \geq i$,

3) bütün i ler için $v_i \geq r(\lambda_i)$.

S kümesindeki her köşe p^0 daki bir köşe ile bağlantılı olacak şekilde bir p sonsuz yolunu oluşturmak için λ_i yollarını kullanırsak F grafının her köşesi p^0 daki bir köşe ile bağlantılı olur. Ayrıca g kapalı yol olmak üzere yukarıda oluşturulan p yolu rasyonel bir sonsuz $ggg\cdots$ yolu olduğunda her köşenin g^0 ile bağlantılı olması şartıyla birlikte F grafında (L) koşulu g nin özel döngü olamayacağını gerektirir.

$E\backslash(H, B_H)$ grafındaki bütün köşelerle bağlantılı olan $E\backslash(H, B_H)$ da bir tek v batağı varsa o zaman $H = H(v)$ dir. Bu durumda iki olasılık vardır; ya v köşesi E grafında bir bataktır ya da $r(s^{-1}(v)) \subseteq H(v)$ olacak şekilde v köşesi bir sonsuz yayıcıdır. Her iki durumda da Lemma 4.0.5 ve Lemma 4.0.11 den $\mathbf{N}_v$ ve $\mathbf{N}_v^{H(v)}$ modüllerinin sıfırlayanı $I(H(v), B_{H(v)}) = P$ idealidir.

$(E\backslash(H, B_H))^0 = M(p)$ olacak şekilde $E\backslash(H, B_H)$ grafında sonsuz bir p yolu mevcut olsun. O zaman p yolu E grafında sonsuz bir yol olarak göz önüne alınabilir. Bu takdirde $H = H(p)$ olur ve $E\backslash(H, B_H)$ grafı (L) koşulunu sağladığından p yolu E grafında bir özel döngüde bitemez. Böylece Lemma 4.0.6 dan $\mathbf{V}_{[p]}$ modülünün sıfırlayanı $I(H, B_H) = P$ olur.

■

Tanım 4.0.14. ([18], Definition 2.1) E bir graf ve v köşesi E grafında bir sonsuz yayıcı olsun. $\mathbf{S}_{v\infty},\ \ B = \{p : r(p) = v, p \in E^*\}$ kümesini baz kabul eden K-vektör uzayıdır.

$u \in E^0$ ve $e \in E^1$ olmak üzere $\mathbf{S}_{v\infty}$ üzerindeki P_u, S_e ve S_{e^*} lineer dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlansın. Her $p \in B$ için

$$P_u(p) = \begin{cases} p, & s(p) = u \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$S_e(p) = \begin{cases} ep, & s(p) = r(e) \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$S_{e^*}(v) = 0$$

$$S_{e^*}(p) = \begin{cases} p', & p = ep' \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Buradan $\{P_u, S_e, S_{e^*} : u \in E^0, e \in E^1\}$ endomorfizmleri Leavitt yol cebirlerinin şartlarını sağlar. u yu P_u ya, e yi S_e ye ve e^* ı S_{e^*} a götüren bir $\phi : L_K(E) \to End_K(\mathbf{S}_{v\infty})$ cebir homomorfizması tanımlanır. $\mathbf{S}_{v\infty}$, ϕ homomorfizması yardımıyla $L_K(E)$ üzerinde bir sol modüldür. Bu $L_K(E)$-modül işlemi $\cdot$ ile ifade edilir.

Uyarı 4.0.15. ([18]) v bir düzgün köşe ise $\mathbf{S}_{v\infty}$ yapısı tanımlanamaz. $\sum_{e\in s^{-1}(v)} S_e S_{e^*} = P_v$ eşitliğinin her iki yanı v köşesi ile çarpılırsa $\left(\sum_{e\in s^{-1}(v)} S_e S_{e^*}\right)(v) = P_v(v)$ olur. Fakat $\left(\sum_{e\in s^{-1}(v)} S_e S_{e^*}\right)(v) = 0$ olmasına rağmen $P_v(v) \neq 0$ dır. Dolayısıyla (CK2) koşulu sağlanmaz.

Önerme 4.0.16. ([18], Proposition 2.3) E grafındaki her v sonsuz yayıcı için $\mathbf{S}_{v\infty}$ bir basit sol $L_K(E)$-modüldür.

İspat: $A, \mathbf{S}_{v\infty}$'nin sıfırdan farklı alt modülü olsun. $A = \mathbf{S}_{v\infty}$ olduğunu göstereceğiz. $k_i \in K$ ve $r(p_i) = v$ olacak şekilde E grafındaki birbirinden farklı p_i yolları için

$$0 \neq x = \sum_{i=1}^{n} k_i p_i \in A \qquad (\star)$$

olsun.

n üzerinden tümevarım yoluyla $v \in A$ olduğunu gösterelim.

Eğer $n = 1$ ise $x = k_1 p_1$ olur. Buradan $p_1^* x = k_1 p_1^* p_1 = k_1 v \in A$ dır.

$n > 1$ olsun. $A,\ n$ yoldan daha az yolun K-lineer birleşimi olan, sıfırdan farklı bir eleman içeriyorsa $v \in A$ olduğunu kabul edelim. $(\star)$ daki p_i yolları arasında p_1 in en küçük uzunluklu yol olduğunu varsayalım. Eğer $p_1 = v$ yani sıfır uzunluklu bir yol ve bazı s ler için $l(p_s) > 0$ ise $p_s^*.v = 0$ olduğundan $0 \neq p_s^*.x \in A, n$ terimden daha az yolun toplamı olup tümevarımdan $v \in A$ olur. Şimdi $l(p_1) > 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $p_1^*.x = a \in A$ dır. Eğer $p_1^*.x,\ n$ terimden daha az yolun toplamı ise ispat tamamlanır. Aksi takdirde b, sıfırdan farklı ilk terimi $k_t p_t$ olan n den küçük terimlerin toplamı olmak üzere

$a = k_1 p_1^* p_1 + b = k_1 v + b$ olur. Buradan $p_t^*.a = p_t^*.b \in A$ ve $0 \neq p_t^*.b$, n terimden daha az yolun toplamıdır. Dolayısıyla tümevarımdan $v \in A$ olur ve $A = \mathbf{S}_{v\infty}$ eşitliği sağlanır.

■

Önerme 4.0.17. ([18], Proposition 2.5) E bir graf ve $v \in E^0$ bir sonsuz yayıcı olsun. Bu takdirde $\mathbf{S}_{v\infty}$ basit sol $L_K(E)$-modülünün sıfırlayanı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Ann_L(\mathbf{S}_{v\infty}) = \begin{cases} I(H(v), B_{H(v)}), & \text{eğer } |s^{-1}(v) \cap r^{-1}(M(v))| = 0 \text{ ise} \\ I(H(v), B_{H(v)} \backslash \{v\}), & \text{eğer } 0 < |s^{-1}(v) \cap r^{-1}(M(v))| < \infty \text{ ise} \\ I(H(v), B_{H(v)}), & \text{eğer } |s^{-1}(v) \cap r^{-1}(M(v))| = \infty \text{ ise} \end{cases}$$

İspat: $J = Ann_L(\mathbf{S}_{v\infty})$ olsun. Herhangi bir $u \in H(v)$ için $u \not\geq v$ olduğundan $H(v) \subseteq J$ dir. Ayrıca $r(p) = v$ olan bütün p yolları için $u \cdot p = 0$ dır. Böylece $J \cap E^0 = H(v)$ dir. $r(s^{-1}(v)) \subseteq H(v)$ olacak şekilde $|s^{-1}(v) \cap r^{-1}(M(v))| = 0$ olduğunu kabul edelim. $u \in B_{H(v)}$ olsun. Eğer $p,\ r(p) = v$ ve $s(p) \neq u$ olan bir yol ise $u^{H(v)} \cdot p = 0$ dır. Diğer bir deyişle, $p = ep',\ s(p) = u$ ve $r(p) = v$ olan bir yol ise o zaman

$$u^{H(v)} \cdot p = \left(u - \sum_{f \in s^{-1}(u), r(f) \notin H(v)} f f^* \right) \cdot ep' = (e - e)p' = 0.$$

Buradan $I(H(v), B_{H(v)}) \subseteq J$ sağlanır. $J \cap E^0 = H(v)$ olsun. Şimdi J primitif idealinin dereceli ideal olduğunu gösterelim. Tersini kabul edelim yani J bir dereceli ideal olmasın. Teorem 3.1.10 (i) den v köşesi $c^0 \subset M(v)$ olacak şekilde c döngüsünün bir bazı olur. $s(e) = v$ ve $r(e) \in M(v)$ olan bir e kenarı vardır. Ancak $r(s^{-1}(v)) \subseteq H(v)$ olduğundan bu mümkün değildir. Dolayısıyla $J \cap E^0 = H(v)$ eşitliği ile J primitif ideali bir dereceli idealdir. $I(H(v), B_{H(v)})$ ideali, $I(H(v), B_{H(v)}) \cap E^0 = H(v)$ olan en büyük dereceli ideal olduğundan $J = I(H(v), B_{H(v)})$ olur.

$0 < |s^{-1}(v) \cap r^{-1}(M(v))| < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $v \in B_{H(v)}$ olur. Eğer $u \neq v$ ve $u \in B_{H(v)}$ ise $u^{H(v)} \in J$ olur. Diğer yandan

$$v^{H(v)} \cdot v = \left(v - \sum_{f \in s^{-1}(v), r(f) \notin H(v)} f f^* \right) \cdot v = v \cdot v - 0 = v \neq 0$$

olduğundan $v^{H(v)} \notin J$ dir. Buradan $I(H(v), B_{H(v)} \backslash \{v\}) \subseteq J$ olur. $J \cap E^0 = H(v)$ olacak şekilde J primitif idealini alalım. J nin dereceli ideal olduğunu gösterelim. J nin dereceli ideal olmadığını farz edelim. Teorem 3.1.10 (i) den $I(H(v), B_{H(v)}) \subseteq J$ olur ve $v^{H(v)} \notin J$ olduğundan bu imkansızdır. Dolayısıyla J bir dereceli idealdir ve $J = I(H(v), B_{H(v)} \backslash \{v\})$ sonucu elde edilir.

$|s^{-1}(v) \cap r^{-1}(M(v))| = \infty$ olduğunu kabul edelim yani $M(v)$ de v köşesini baz kabul eden

sonsuz sayıda kapalı yol vardır. $M(v) = E^0 \backslash H(v)$ olduğundan Teorem 3.1.10 (i) den J dereceli olmayan bir ideal olamaz. Ayrıca $v \notin B_{H(v)}$ olduğundan $I(H(v), B_{H(v)}) \subseteq J$ dir. Buradan $I(H(v), B_{H(v)}) \cap E^0 = H(v) = J \cap E^0$ eşitliğinden $J = I(H(v), B_{H(v)})$ elde edilir.

■

Önerme 4.0.18. ([18], Proposition 2.6) v köşesi bir sonsuz yayıcı ve $0 < |s^{-1}(v) \cap r^{-1}(M(v))| < \infty$ olsun. Bu durumda $\mathbf{S}_{v\infty} \cong \mathbf{N}_v^{B_{H(v)}}$.

İspat: $v \in B_{H(v)}$ olsun. Önerme 4.0.17 den ve Lemma 4.0.10 dan $\mathbf{S}_{v\infty}$ ve $\mathbf{N}_v^{B_{H(v)}}$ modülleri aynı $I(H(v), B_{H(v)} \backslash \{v\})$ primitif ideali tarafından sıfırlanır. Ayrıca $\mathbf{S}_{v\infty}$ ve $\mathbf{N}_v^{B_{H(v)}}$ modüllerinin K-bazları arasında bir birebir eşleme vardır. Gerçekten de $r(p) = v$ olan bir $p'e = p \in E^*$ bir yol ise $\mathbf{N}_v^{B_{H(v)}}$ basit modülü için tanımlanan F grafında $r(e') = v'$, $s(e') = s(e) = r(p')$ olur ve dolayısıyla $p'e' \in F$ yolu $r(p'e') = v'$ olacak şekilde F grafında bir yoldur. Buradan $v \mapsto v'$ ve $p = p'e \mapsto p'e'$ istenen birebir ve örten eşlemedir. O zaman $\phi(v) = v'$ ve $\phi(p'e) = p'e'$ olarak tanımlanan $\phi : \mathbf{S}_{v\infty} \to \mathbf{N}_v^{B_{H(v)}}$ dönüşümü bir izomorfizmadır.

■

Önerme 4.0.19. ([18], Proposition 2.7) v köşesi bir sonsuz yayıcı ve $|s^{-1}(v) \cap r^{-1}(M(v))| = 0$ olsun. Bu durumda $\mathbf{S}_{v\infty} \cong \mathbf{N}_v^{H(v)}$.

İspat: İki basit modül aynı K-bazına ve aynı sıfırlayan primitif ideale sahip olduğundan Önerme 4.0.17 ve Lemma 4.0.11 den ispat açıktır.

■

Teorem 4.0.20. ([18], Theorem 2.9) v köşesi bir sonsuz yayıcı ve $|s^{-1}(v) \cap r^{-1}(M(v))| = \infty$ olsun. $\mathbf{N}_{v\infty}$ modülü, $I(H(v), B_{H(v)})$ primitif ideali tarafından sıfırlanan yeni bir basit sol $L_K(E)$-modüldür ve $\mathbf{N}_{v\infty}$, daha önce tanımlanan $\mathbf{N}_w$, $\mathbf{N}_{v_1}^{B_{H(v_1)}}$, $\mathbf{N}_{v_2}^{B_{H(v_2)}}$, $\mathbf{V}_{[p]}^f$, $\mathbf{V}_{[p]}$ beş basit sol $L_K(E)$-modüllerinden herhangi birisiyle izomorf değildir.

İspat: $\mathbf{V}_{[p]}^f$ basit $L_K(E)$-modülünün sıfırlayan ideali, Lemma 4.0.9 dan dereceli olmayan primitif idealdir. $\mathbf{N}_{v\infty}$ modülünün sıfırlayan ideali ise Önerme 4.0.17 den dereceli bir ideal olduğundan $\mathbf{N}_{v\infty} \ncong V_{[p]}^f$ dir.

Şimdi $\mathbf{N}_{v\infty} \ncong \mathbf{V}_{[p]}$ olduğunu gösterelim. $\varphi : \mathbf{N}_{v\infty} \to \mathbf{V}_{[p]}$ dönüşümü bir $L_K(E)$-morfizmi

olsun. $\varphi \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bütün farklı $q_i \in [p]$ yolları için $\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} k_i q_i$ alalım. Bütün $\tau_{\leq n}(q_i)$ ler farklı ikililer olacak şekilde n seçelim. $\mathbf{N}_{v\infty},\ L_K(E)$-modül olduğundan tüm $e \in E^1$ için $e^*.v = 0$ ve buradan $\tau_{\leq n}(q_1)^*.v = 0$ dır. Fakat $\varphi(\tau_{\leq n}(q_1)^*.v) = \tau_{\leq n}(q_1)^*.\varphi(v) = k_1\tau_{>n}(q_1) \neq 0$ olması bir çelişkidir. Dolayısıyla $\mathbf{N}_{v\infty} \ncong \mathbf{V}_{[p]}$.

$N_{v\infty},\ N_w,\ N_{v_2}^{H_{v_2}}$ ve $\mathbf{N}_{v_1}^{B_{H(v_1)}}$ basit $L_K(E)$-modüllerini sıfırlayan ideallerin hepsi dereceli ideallerdir. Bu yüzden $\mathbf{N}_{v\infty}$ basit $L_K(E)$-modülünün $\mathbf{N}_w,\ \mathbf{N}_{v_2}^{H(v_2)}$ ve $\mathbf{N}_{v_1}^{B_{H(v_1)}}$ basit $L_K(E)$-modüllerine izomorf olmadığını göstermek için $\mathbf{N}_{v\infty}$ modülünü sıfırlayan idealin $H(v)$ köşeler kümesinin diğer üç modülü sıfırlayan ideallerin köşeler kümesinden farklı olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 4.0.5 de gösterildiği gibi $\mathbf{N}_w$ modülünün sıfırlayan dereceli ideali $I(H(w), B_{H(w)})$ idealidir ve bu idealin köşeler kümesi $H(w)$ dır. Lemma 4.0.10 a göre $\mathbf{N}_{v_1}^{B_{H(v_1)}}$ modülünün sıfırlayan dereceli ideali $I(H(v_1), B_{H(v_1)}\backslash\{v_1\})$ idealidir ve bu idealin köşeler kümesi $H(v_1)$ dir. Benzer şekilde Lemma 4.0.11 de gösterildiği gibi $\mathbf{N}_{v_2}^{H(v_2)}$ modülünün sıfırlayanı $I(H(v_2), B_{H(v_2)})$ dereceli idealidir ve bu idealin köşeler kümesi $H(v_2)$ dir. $H(v)$ ve $H(w)$ köşeler kümesini göz önüne alalım. $M(w)$ kümesi w batağını içerdiğinden ve $M(v)$ herhangi bir batak içermediğinden $H(v) \neq H(w)$ dir. Dolayısıyla $\mathbf{N}_{v\infty} \ncong \mathbf{N}_w$ olur. Şimdi $H(v) = H(v_2)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $M(v) = M(v_2)$ olur. Böylece v_2 köşesinden v köşesine bir yol vardır. Fakat v_2 köşesi $M(v_2)$ de bir batak olduğundan $v_2 \geq v$ olması mümkün değildir. O halde $H(v) \neq H(v_2)$ yani $\mathbf{N}_{v\infty} \ncong \mathbf{N}_{v_2}^{H(v_2)}$ dir. Son olarak $\mathbf{N}_{v_1}^{B_{H(v_1)}}$ ve $\mathbf{N}_{v\infty}$ modüllerinin sıfırlayan idealleri farklı olduğundan $H(v) \neq H(v_1)$ dir. Buna göre $\mathbf{N}_{v\infty} \ncong \mathbf{N}_{v_1}^{B_{H(v_1)}}$ dir.

■

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Leavitt yol cebirlerinin modül yapısı ilk olarak Chen [16] tarafından sonsuz yolların kuyruk eşdeğeri denklik sınıfları ve bataklar kullanılarak tanımlanmıştır ve bu modüller Chen basit modüller olarak adlandırılmıştır. Daha sonra Ara ve Rangaswamy [17], [18] tarafından sonsuz yayıcılar ve sonsuz yollar kullanılarak Chen basit modüllerine izomorfik olmayan yeni basit $L_K(E)$-modüller tanımlanmış ve $L_K(E)$ cebirinin primitif ideallerinin bazı Chen modüllerinin sıfırlayan ideali olduğu gösterilmiştir. Bu tez çalışmasında [16], [17] ve [18] makalelerinde tanımlanan basit $L_K(E)$-modüller ve onları sıfırlayan idealleri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Leavitt, W. G. (1957), Modules Without Invariant Basis Number. *Proc. Amer. Soc.*, 8, 322-328.

[2] Abrams, G., Aranda Pino, G. (2005), The Leavitt Path Algebra of a Graph. *J. Algebra*, 293(2), 319-334.

[3] Abrams, G., Aranda Pino, G. (2008), The Leavitt Path Algebras of Arbitrary Graphs. *Houston J.Math*, 34(2), 423-442.

[4] Ara, P., Moreno, M. A., Pardo, E. (2007), Nonstable K-Theory for Graph Algebras. *Algebras and Representation Theory*, 10, 157-178.

[5] Aranda Pino, G., Barquero, D. M., Gonzalez, C. M., Molina, M. S. (2008), The Socle of a Leavitt Path Algebra. *J. Pure Appl. Algebra*, 212, 500-509.

[6] Pino, G. A., Molina M. S. (2006), Exchange Leavitt Path Algebras and Stable Rank. *J. Algebra*, 305, 912-936.

[7] Abrams, G., Pino, G. A., Molina, M. S. (2008), Locally Finite Leavitt Path Algebras. *Israel Journal of Mathematics*, 165, 329-348.

[8] Abrams, G., Pino, G. A., Molina, M. S. (2007), Finite Dimensional Leavitt Path Algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 209, 753-762.

[9] Abrams, G., Aranda Pino, G. (2006), Purely Infinite Simple Leavitt Algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 207(3), 553-563.

[10] Rangaswamy, K. M. (2013), The Theory of Prime Ideals of Leavitt Path Algebras over Arbitrary Graph. *J. Algebra*, 375, 73-96.

[11] Tomforde, M. (2011), Leavitt Path Algebras with Coefficients in a Commutative Ring. *J. Pure Apple. Algebra*, 215, 471-484.

[12] Larki, H. (2015), Ideal Structure of Leavitt Path Algebras with Coefficients in a Unital Commutative Ring. *Communications in Algebra*, 43, 5031-5058.

[13] Nordstrom, H., Nordstrom J. A. F. (2020), Leavitt Path Algebras over Arbitrary Unital Rings and Algebras. *J. Algebra and Its Applications*, 06, 2050107.

[14] Wardati, K. (2017), On Semisimple Leavitt Path Algebras over a Commutative Unital Ring. *J. Algebra*, 39(5), 671-683.

[15] Ara, P., Brustenga, M. (2010), Module Theory Over Leavitt Path Algebras and K-theory. *J. Pure Appl. Algebra*, 214, 1131-1151.

[16] Chen, X. W. (2015), Irreducible Representations of Leavitt Path Algebras. *Forum Math.*, 27, 549-574.

[17] Ara, P., Rangaswamy, K. M. (2014), Finitely Presented Simple Modules over Leavitt Path Algebras. *J. Algebra*, 417, 333-352.

[18] Rangaswamy, K. M. (2015), On Simple Modules over Leavitt Path Algebras. *J. Algebra*, 423, 239-258.

[19] Dummit, D. S., Foote, R.M. (2004), Abstract Algebra. *United States of America: John Wiley and Sons, Inc.*.

[20] Rotman, J. J. (2002), Advanced Modern Algebra. *Prentice Hall*.

[21] Abrams, G., Ara, P., Molina, M. S. (2016), Leavitt Path Algebras. *London: Springer*.

[22] Matej, B. (2014), Introduction to Noncommutative Algebra. *Springer*.

[23] Kasch, F. (1982), Modules and Rings. *London: Academic Press*.

[24] Tekir, Ü., Çallıalp, F. (2009), Değişmeli Halkalar ve Modüller. *İstanbul: Birsen Yayınevi*.

[25] Hungerford, T. W. (1974), Algebra. *Springer*.

[26] Pino, G. A., Barquero, D. M., Gonzalez, C. M., Molina, M. S. (2010), Socle Theory for Leavitt Path Algebras of Arbitrary Graphs. *Rev. Mat. Iberoam.*, 26, 611-638.

[27] Tomforde, M. (2007), Uniqueness Theorems and Ideal Structure for Leavitt Path Algebras. *J. Algebra*, 318, 270-299.

[28] Kariman, D., Irawati, Muchtadi-Alamsyah, I. (2019), The $\mathfrak{U}$-Projective Resolution of Simple Modules over Leavitt Path Algebras. *AIP Conference Proceedings*, 2192, 040006.