T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI

Y_o, Y_r, Y_n DARBOUX SLANT HELİSLER VE OSKÜLATÖR, REKTİFİYAN, NORMAL KÜRESEL GÖSTERGE EĞRİLERİ

Ceyda TOSUN

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

MANİSA–2024

Ceyda TOSUN	Y_o, Y_r, Y_n	**DARBOUX SLANT HELİSLER VE OSKÜLATÖR, REKTİFİYAN, NORMAL KÜRESEL GÖSTERGE EĞRİLERİ**	**2024**

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, tezin yazımında akademik ve etik kurallara aykırı herhangi bir yapay zekâ ve program kullanmadığımı beyan ederim.

Ceyda TOSUN

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ II
ŞEKİLLER DİZİNİ III
TEŞEKKÜR V
ÖZET VI
ABSTRACT VII
1. GİRİŞ 1
2. GENEL BİLGİLER 3
2.1. Eğriler İçin Temel Kavramlar 3
2.2. Yüzeyler İçin Temel Kavramlar 7
2.3. Oskülatör Darboux Çatısı İçin Temel Kavram ve Teoremler 12
2.4. Rektifiyan Darboux Çatısı İçin Temel Kavram ve Teoremler 21
2.5. Normal Darboux Çatısı İçin Temel Kavram ve Teoremler 22
3. YÜZEY ÜZERİNDE Y_o – DARBOUX SLANT HELİSLER VE OSKÜLATÖR DARBOUX ÇATISINA GÖRE KÜRESEL GÖSTERGE EĞRİLERİ 25
3.1. Yüzey Üzerinde Oskülatör Darboux Çatısına Göre Y_o – Darboux Slant Helisler 25
3.2. Yüzey Üzerinde Oskülatör Darboux Çatısına Göre Küresel Gösterge Eğrileri 36
3.2.1. D_o Küresel Gösterge Eğrisi 36
3.2.2. U Küresel Gösterge Eğrisi 42
3.2.3. Y_o Küresel Gösterge Eğrisi 48
4. YÜZEY ÜZERİNDE Y_r – DARBOUX SLANT HELİSLER VE REKTİFİYAN DARBOUX ÇATISINA GÖRE KÜRESEL GÖSTERGE EĞRİLERİ 63
4.1. Yüzey Üzerinde Rektifiyan Darboux Çatısına Göre Y_r – Darboux Slant Helisler 63
4.2. Yüzey Üzerinde Rektifiyan Darboux Çatısına Göre Küresel Gösterge Eğrileri 74
4.2.1. D_r Küresel Gösterge Eğrisi 75
4.2.2. V Küresel Gösterge Eğrisi 80
4.2.3. Y_r Küresel Gösterge Eğrisi 86
5. YÜZEY ÜZERİNDE Y_n – DARBOUX SLANT HELİSLER VE NORMAL DARBOUX ÇATISINA GÖRE KÜRESEL GÖSTERGE EĞRİLERİ 99
5.1. Yüzey Üzerinde Normal Darboux Çatısına Göre Y_n – Darboux Slant Helisler 99
5.2. Yüzey Üzerinde Normal Darboux Çatısına Göre Küresel Gösterge Eğrileri 113
5.2.1. D_n Küresel Gösterge Eğrisi 113
5.2.2. T Küresel Gösterge Eğrisi 119
5.2.3 Y_n Küresel Gösterge Eğrisi 125
6. SONUÇ VE ÖNERİLER 139

KAYNAKLAR 141

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\{\vec{T},\vec{V},\vec{U}\}$	Eğri-yüzey ikilisinin Darboux çatısı
τ_g	Eğri-yüzey ikilisinin geodezik burulması
k_g	Eğri-yüzey ikilisinin geodezik eğriliği
k_n	Eğri-yüzey ikilisinin normal eğriliği
$\vec{D}_n$	Normal Darboux birim vektörü
δ_n	Normal Darboux çatısının birinci eğriliği
μ_n	Normal Darboux çatısının ikinci eğriliği
$\vec{D}_o$	Oskülatör Darboux birim vektörü
δ_o	Oskülatör Darboux çatısının birinci eğriliği
μ_o	Oskülatör Darboux çatısının ikinci eğriliği
$\vec{D}_r$	Rektifiyan Darboux birim vektörü
δ_r	Rektifiyan Darboux çatısının birinci eğriliği
μ_r	Rektifiyan Darboux çatısının ikinci eğriliği
E^3	3-Boyutlu Öklid uzayı
$\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$	3-Boyutlu Öklid uzayında eğrinin Frenet çatısı
$\langle\,,\rangle$	3-Boyutlu Öklid uzayında iç çarpım
$\|\,,\|$	3-Boyutlu Öklid uzayında norm
$\times$	3-Boyutlu Öklid uzayında vektörel çarpım
M	3-Boyutlu Öklid uzayında yüzey
$\{\vec{D}_n,\vec{T},\vec{Y}_n\}$	Yüzey üzerinde normal Darboux çatısı
$\{\vec{D}_o,\vec{U},\vec{Y}_o\}$	Yüzey üzerinde oskülatör Darboux çatısı
$\{\vec{D}_r,\vec{V},\vec{Y}_r\}$	Yüzey üzerinde rektifiyan Darboux çatısı
$\{\vec{T}_{Y_o},\vec{N}_{Y_o},\vec{B}_{Y_o}\}$	Yüzey üzerinde Y_o – Darboux slant helisin Frenet çatısı
$\{\vec{T}_{Y_r},\vec{N}_{Y_r},\vec{B}_{Y_r}\}$	Yüzey üzerinde Y_r – Darboux slant helisin Frenet çatısı

$\left\{\vec{T}_{Y_n}, \vec{N}_{Y_n}, \vec{B}_{Y_n}\right\}$ Yüzey üzerinde $Y_n -$ Darboux slant helisin Frenet çatısı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1.8: $X(u,v)=(u,u\sin v,u\cos v)$ yüzeyi üzerinde

$\alpha(s)=\left(\frac{s}{\sqrt{3}},\frac{s}{\sqrt{3}}\sin\left(\ln\frac{s}{3}\right),\frac{s}{\sqrt{3}}\cos\left(\ln\frac{s}{3}\right)\right)$ eğrisi 61

Şekil 3.2.3.5: $X(u,v)=(u\sin v,u\cos v,u)$ yüzeyi üzerinde

$\alpha(s)=\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\frac{s}{\sqrt{5}}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\frac{s}{\sqrt{5}}\right)$ eğrisi 61

Şekil 3.2.3.6:

$$\alpha_{D_o}=\frac{1}{\sqrt{65}}\left(-\frac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\left(\sqrt{30}-\sqrt{6}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\right.$$
$$\left.-\frac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)+\left(\sqrt{30}-\sqrt{6}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),-\frac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}}\right)$$

D_o küresel gösterge eğrisi 61

Şekil 3.2.3.7: $\alpha_U=\vec{U}_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),-1\right)$

U küresel gösterge eğrisi 62

Şekil 3.2.3.8:

$$\alpha_{Y_o}=\vec{Y}_o=\frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix}\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)+\left(3+2\sqrt{5}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\\ \left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\left(3+2\sqrt{5}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\end{pmatrix}$$

Y_o küresel gösterge eğrisi 62

Şekil 4.1.8: $X(u,v)=(u,\cos v,\sin v)$ yüzeyi üzerinde

$\gamma(s)=\left(\frac{2s}{\sqrt{5}},\cos\frac{s}{\sqrt{5}},\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)$ eğrisi 61

Şekil 4.2.3.5: $X(u,v)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos u,\frac{1}{\sqrt{3}}\sin u,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u-2v\right)$ yüzeyi üzerinde

$\beta(s)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos s,\frac{1}{\sqrt{3}}\sin s,\frac{\sqrt{2}s}{\sqrt{3}}\right)$ eğrisi 62

Şekil 4.2.3.6: $\beta_{D_r}=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin s,\frac{1}{\sqrt{3}}\cos s,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

D_r küresel gösterge eğrisi 136

Şekil 4.2.3.7: $\beta_V=\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin s,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos s,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

β eğrisinin V küresel gösterge eğrisi 137

Şekil 4.2.3.8: $\alpha_{Y_r}=\vec{Y}_r=(-\cos s,-\sin s,0)$

Y_r Küresel Gösterge Eğrisi 137

Şekil 5.1.8: $X(u,v)=\left(\sqrt{2}v,\sin u,\cos u\right)$ yüzeyi üzerinde

$\alpha(s)=\left(\frac{\sqrt{2}s}{\sqrt{3}},\sin\frac{s}{\sqrt{3}},\cos\frac{s}{\sqrt{3}}\right)$ eğrisi 62

Şekil 5.2.3.5: $X(u,v)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos u+\sin v,\frac{1}{\sqrt{3}}\sin u+\cos v,\frac{u}{\sqrt{6}}+1\right)$ yüzeyi üzerinde

$\alpha(s)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\sqrt{2}s\right),\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{2}s\right)+1,\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)$ eğrisi 62

Şekil 5.2.3.6: $\alpha_{D_n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin\sqrt{2}s,-\cos\sqrt{2}s,\sqrt{2}\right)$

D_n küresel gösterge eğrisi 100

Şekil 5.2.3.7: $\alpha_T=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}s,\sqrt{2}\cos\sqrt{2}s,1\right)$

T küresel gösterge eğrisi 101

Şekil 5.2.3.8: $\alpha_{Y_n}=\left(-\cos\left(\sqrt{2}s\right),-\sin\left(\sqrt{2}s\right),0\right)$

Y_n küresel gösterge eğrisi 102

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında desteğini esirgemeyen, tecrübelerinden faydalandığım, akademik her konuda beni yönlendiren, danışman hocam Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT'e teşekkürlerimi sunarım.

Akademik desteği ile bana yardımcı olan, sayın hocam Doç. Dr. Tuba AĞIRMAN AYDIN'a ve her sorumda bana yardımcı olan, sayın hocam Doç. Dr. Burak ŞAHİNER'e teşekkür ederim.

Bu çalışma sırasında her türlü yardımı benden esirgemeyen arkadaşım, Öğr. Gör. Dr. Akın ALKAN'a çok teşekkür ederim.

Bu süreçte sonsuz sabır gösteren, bana güç veren çocuklarım Elif Sena SARITEPE ve Yusuf Ahmet SARITEPE'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ceyda TOSUN
Manisa, 2024

ÖZET

Doktora Tezi

Ceyda TOSUN

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

Bu tez çalışması, altı bölümden oluşmuştur.

Birinci bölüm tezin giriş bölümüdür. Bu bölümde, bazı özel eğriler ve bir yüzey üzerindeki özel eğriler ile ilgili literatür bilgisi ve bu tezde yapılanlar hakkında kısaca bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında eğriler ve yüzeyler teorisine ait temel kavramlar, oskülatör Darboux çatısı, rektifiyan Darboux çatısı ve normal Darboux çatısına ait temel kavram ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümler tezin orijinal kısımlarını oluştururlar.

Üçüncü bölümde, bir yüzey üzerinde Y_o-Darboux slant helis tanımlanmış ve oskülatör Darboux çatısına göre bir eğrinin Y_o- Darboux slant helis olma şartı verilmiştir. Ayrıca, oskülatör Darboux çatısının birim vektör alanlarının küresel gösterge eğrileri tanımlanmış ve küresel gösterge eğrilerinin Frenet elemanlarının, oskülatör Darboux çatısına bağlı eşitlikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, bir yüzey üzerinde Y_r-Darboux slant helis tanımlanmış ve rektifiyan Darboux çatısına göre bir eğrinin Y_r-Darboux slant helis olma şartı verilmiştir. Ayrıca, rektifiyan Darboux çatısının birim vektör alanlarının küresel gösterge eğrileri tanımlanmış ve küresel gösterge eğrilerinin Frenet elemanlarının, rektifiyan Darboux çatısına bağlı eşitlikleri verilmiştir.

Beşinci bölümde, bir yüzey üzerinde Y_n-Darboux slant helis tanımlanmış ve normal Darboux çatısına göre bir eğrinin Y_n- Darboux slant helis olma şartı verilmiştir. Ayrıca, normal Darboux çatısının birim vektör alanlarının küresel gösterge eğrileri tanımlanmış ve küresel gösterge eğrilerinin Frenet elemanlarının, normal Darboux çatısına bağlı eşitlikleri verilmiştir.

Altıncı bölümde, sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Darboux çatısı, oskülatör Darboux çatısı, rektifiyan Darboux çatısı, normal Darboux çatısı, Y_i-Darboux slant helis $(i=o,n,r)$, Küresel gösterge eğrileri, Frenet çatısı
2024, 144 sayfa

ABSTRACT
PhD Thesis

Ceyda TOSUN

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Education
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

This thesis study consists of six chapters.

The first chapter is the introduction of the thesis. In this section, literature information about special curves and special curves on the surface and brief information about what has been done in this thesis are given.

In the second chapter, the basic concepts of the theory of curves and surfaces in 3-dimensional Euclidean space, the basic concepts and theorems of the osculating Darboux frame, the rectifying Darboux frame and the normal Darboux frame are given.

The third, fourth and fifth chapters constitute the original parts of the thesis.

In the third chapter, Y_o – Darboux slant helix is defined on the surface and a curve is drawn according to the osculator Darboux frame. The condition of being Y_o – Darboux slant helix is given. In addition, the global indicator curves of the unit vector fields of the osculator Darboux frame are defined and the equations of the Frenet elements of the global indicator curves related to the osculator Darboux frame are given.

In the fourth chapter, Y_r – Darboux slant helix is defined on the surface and the condition for a curve to be Y_r – Darboux slant helix according to the rectifying Darboux frame is given. In addition, the global indicator curves of the unit vector fields of the rectifying Darboux frame are defined and the equations of the Frenet elements of the global indicator curves based to the rectifying Darboux frame are given.

In the fifth chapter, Y_n – Darboux slant helix is defined on the surface and a curve is drawn according to the normal Darboux frame. The condition of being Y_n – Darboux slant helix is given. In addition, the global indicator curves of the unit vector fields of the normal Darboux frame are defined and the equations of the Frenet elements of the global indicator curves based to the normal Darboux framework are given.

In the sixth section, the results and recommendations are given.

Keywords: Darboux frame, osculator Darboux frame, rectifying Darboux frame, normal Darboux frame, $Y_i -$ Darboux slant helix $(i = o, n, r)$, Spherical indicatrix Curves, Frenet frame.
2024, 144 pages

1. GİRİŞ

Eğriler teorisi, birçok alanda yaygın bir şekilde kullanılmasından dolayı diferansiyel geometrinin ilginç konulardan biridir ve birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. Eğriler teorisinde en çok ilgi çeken konulardan biri ise bazı özel eğriler olup bu eğrilerden en meşhur ve en kullanışlı olanları helisler ve slant helislerdir. Helisler ve slant helisler, doğada ve bilimde sıklıkla karşılaştığımız, bilgisayar destekli geometrik tasarımdan fraktal geometriye, kinematikten DNA çiftlerine, geniş bir kullanım alanına sahip olan eğrilerdir. Helis eğrileri, teğetleri sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğriler olarak tanımlanmıştır [1]. Izumiya ve Takeuchi helislere benzer şekilde asal normal vektörleri sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğriler olarak slant helisleri tanımlamışlar ve karakterizasyonlarını vermişlerdir [2]. Yakın zamanlarda E. Zıplar ve ark. Frenet çatısının Darboux ani dönme vektörü sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan özel eğriyi Darboux helis olarak tanımlamışlar ve bu eğri için karakterizasyonları vermişlerdir [3]. Daha sonra bu üç helis çeşidi üzerine matematikçiler birçok çalışmalar yaptılar ve bu çalışmalar sadece Öklid uzaylarında değil aynı zamanda Minkowski uzaylarında da yapılmıştır [4-10].

Diferansiyel geometrinin en önemli çalışma alanlarından biri de yüzeyler üzerindeki özel eğrilerdir. Yüzey üzerinde kalan özel eğrilerin belirlenmesi çok önemli problemlerden biridir ve bu eğriler de bilimin farklı alanlarında kullanım alanlarına sahiplerdir. Yüzey üzerindeki farklı özel eğrilerin incelenmesi hem geometri hem de geometri ile çok yakından ilişkili olan fizik, astronomi, mühendislik gibi bilimler açısından çok önemlidir. Bazı özel uzay eğrilerinin karakterizasyonları yüzeyler üzerinde de incelenebildiği gibi bu eğrilerden farklı olarak yüzey üzerinde kalan başka özel eğriler de eğri-yüzey ikilisinin çatısı olarak bilinen Darboux çatısı ile tanımlanmış ve incelenmiştir. Yüzey üzerindeki helisler J. Puig-Pey ve ark. tarafından incelenmiş ve konum vektörleri verilmiştir [11]. Bu eğrilerden bir diğeri, fizikte optik konusunda önemli bir yere sahip olan isophote eğrileridir. Bu eğrilerin geometrik tanımı F. Doğan ve Y. Yaylı tarafından yapılmış ve karakterizasyonlarına ilişkin incelemeler de hem Öklid hem de Lorentz uzaylarında ayrıntılı olarak incelenmiştir [12-14]. Benzer düşünceyle son yıllarda N. Macit ve M. Düldül, yüzey üzerinde bir diğer özel eğriyi relatively normal-slant helis ismi ile tanımlamış ve bu eğrilerin geometrisini incelemişlerdir [15]. Yadav, A., ve Pal, B. relatively normal-slant helisleri, konum vektörlerinin bulunduğu düzleme göre incelemiş ayrıca isophote eğrilerinin konum

vektörlerini vermişlerdir [16]. E. Nesovica ve ark. Minkowski 3-uzayında null olmayan relatively normal-slant helisleri incelemişlerdir [17]. A. Yadav ve ark. Minkowski 3-uzayında relatively normal-slant helislerin karakterizasyonlarını inceleyip slant helislerle ilişkilerini vermişlerdir [18].

Bununla birlikte, S. Hananoi ve ark. yüzey eğrileri üzerinde üç yeni vektör alanı tanımladılar [19]. M. Önder, bu üç yeni vektörü dikkate alarak yüzey üzerinde üç yeni özel eğri tanımladı. $i = o, n, r$ ve o, n, r indisleri sırasıyla yüzey üzerindeki eğrinin oskülatör, normal ve rektifiyan düzlemlerini temsil etmek üzere bu eğrileri D_i – Darboux slant helisler olarak isimlendirdi ve bağlantılı helis olarak tanımladığı yeni bazı helis türleri ile bu yüzey eğrilerinin ilişkisini ortaya koydu [20].

A. Alkan, doktora tezinde oskülatör Darboux çatısı, normal Darboux çatısı ve rektifiyan Darboux çatısı olmak üzere üç yeni çatı tanımlamıştır [21]. Bu çatılar yardımıyla $D_i -$ Darboux slant helisleri karakterize eden denklemleri, tanımlanan bu çatıların eğrilikleri ile Darboux çatısının eğrilikleri arasındaki ilişkilerden yararlanarak vermiştir.

İki ya da daha fazla eğri arasında matematiksel bir ilişki var ise bu eğrilere ilişkili eğriler denir. İlişkili eğrilerin en iyi bilinen örnekleri involüt-evolüt eğri çiftleri, Bertrand eğri çiftleri, Mannheim eğri çiftleridir. Son zamanlarda Choi ve Kim [22] yeni bir ilişkili eğri tipini gündeme getirmişlerdir. Bu eğriyi, verilen bir eğrinin Frenet vektör alanlarından birinin integral eğrisi olarak tanımlamışlardır ve ismine yönlü eğri adını vermişlerdir. Küresel gösterge eğrileri de eğri teorisinde ilişkili eğri kategorisine girmektedir. Kula ve Yaylı [8] slant helislerin küresel gösterge eğrilerini çalışmışlardır. Küresel göstergelerinin küresel helisler olduğunu bulmuşlardır. Şahiner gösterge eğrileri ile yönlü eğrileri ilişkilendirip, [23] nolu makalesinde teğet gösterge eğrisinin yönlü eğrisini araştırmıştır.

Bu tezde, Y_i – Darboux slant helisler tanımlanmış ve A. Alkan tarafından tanımlanan bu yeni üç çatı yardımıyla $Y_i -$ Darboux slant helislerin diferansiyel denklemleri, tanımlanan bu çatıların eğrilikleri ile Darboux çatısının eğrilikleri arasındaki ilişkilerden yararlanılarak verilmiştir. Ayrıca yeni tanımlanan bu üç çatıya göre bir eğrinin küresel gösterge eğrileri tanımlanmış ve küresel gösterge eğrilerinin Frenet elemanlarının bu çatılara bağlı eşitlikleri bulunmuştur.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde Öklid uzayında, eğriler, yüzeyler teorisi ve oskülatör, rektifiyan, normal Darboux slant helisler ile ilgili temel kavram ve teoremler verilecektir.

2.1. Eğriler İçin Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1: E^3 uzayında iki vektör $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$, $\vec{q}=(q_1,q_2,q_3)$ olmak üzere $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle \vec{p},\vec{q}\rangle = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$$

şeklinde tanımlıdır [24].

Tanım 2.1.2: E^3 uzayında bir vektör $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$ olmak üzere, $\vec{p}$ vektörünün normu

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{\langle \vec{p},\vec{p}\rangle}$$

şeklinde tanımlıdır [24].

Tanım 2.1.3: E^3 uzayında iki vektör $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$ ve $\vec{q}=(q_1,q_2,q_3)$ olmak üzere, $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\vec{p}\times\vec{q} = (p_2q_3 - p_3q_2, p_3q_1 - p_1q_3, p_1q_2 - p_2q_1)$$

şeklinde tanımlıdır [25,26].

Tanım 2.1.4: E^3 uzayının her bir p noktasında $f: E^3 \to IR$ fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri varsa f fonksiyonu C^∞ sınıfındandır veya düzgün fonksiyondur denir [24].

Tanım 2.1.5: I, IR nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha: I \subset IR \to E^3$ biçiminde düzgün bir α dönüşümüne E^3 uzayında bir eğri denir [21].

Tanım 2.1.6: $\alpha : I \subset IR \to E^3$ bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri denir [24,26].

Tanım 2.1.7: $\alpha : I \subset IR \to E^3$ bir eğri olsun. Her $s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise $\alpha(s)$ eğrisine birim hızlı eğri denir. Bu durumda $s \in I$ parametresine α eğrisinin yay parametresi adı verilir [25,26].

Tanım 2.1.8: E^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisi için $\vec{T}(s) = \alpha'(s)$ eşitliği ile belirli $\vec{T}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [24].

Tanım 2.1.9: E^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisi için $\kappa(s) = \|\vec{T}'(s)\|$ ile tanımlı $\kappa : I \to IR$ fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ değerine eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği veya birinci eğriliği denir [24].

Tanım 2.1.10: E^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisi için $\vec{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \vec{T}'(s)$ eşitliği ile belirli $\vec{N}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normal vektörü denir [24].

Tanım 2.1.11: E^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisi için $\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$ eşitliği ile belirli $\vec{B}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormal vektörü denir [24].

Tanım 2.1.12: $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$, $\vec{B}(s)$ vektörlerine $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ kümesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ vektör alanlarına α eğrisi üzerinde Frenet vektör alanları denir [24].

Tanım 2.1.13: Birim hızlı $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olmak üzere

$$\tau : I \to IR, \ \tau(s) = -\langle \vec{B}'(s), \vec{N}(s) \rangle$$

fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ değerine de eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması veya ikinci eğriliği denir [24].

Teorem 2.1.14: Birim hızlı $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olmak üzere, α eğrisinin Frenet türev formülleri

$$\begin{aligned} \vec{T}' &= \kappa \vec{N} \\ \vec{N}' &= -\kappa \vec{T} + \tau \vec{B} \\ \vec{B}' &= -\tau \vec{N} \end{aligned}$$

şeklindedir [24,26,27].

Tanım 2.1.15: E^3 uzayında bir birim hızlı $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olsun. $\left\{\vec{T}(s), \vec{N}(s)\right\}$ kümesinin gerdiği düzleme oskülatör düzlem, $\left\{\vec{T}(s), \vec{B}(s)\right\}$ kümesinin gerdiği düzleme rektifiyan düzlem, $\left\{\vec{N}(s), \vec{B}(s)\right\}$ kümesinin gerdiği düzleme normal düzlem denir [24].

Tanım 2.1.16: E^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olsun. $\vec{W} = \tau \vec{T} + \kappa \vec{B}$ ile tanımlı vektöre Frenet çatısının ani dönme vektörü veya Darboux vektörü denir [25].

Tanım 2.1.17: $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisinin her $s \in I$ için $\vec{\alpha}'(s) = \vec{T}(s)$ teğet vektörü, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisine helis veya eğilim çizgisi denir [1,25,27].

Teorem 2.1.18: $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisinin helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için $\dfrac{\tau(s)}{\kappa(s)}$ fonksiyonunun sabit olmasıdır [1,25,27].

Tanım 2.1.19: $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisinin her $s \in I$ için $\vec{N}(s)$ asli normal vektörü, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisine slant helis denir [2].

Teorem 2.1.20: $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma(s)=\left(\frac{\kappa^2}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right)(s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır [2].

Tanım 2.1.21: $\alpha: I\subset IR\to E^3$ eğrisinin her $s\in I$ için $\vec{W}(s)$ Darboux ani dönme vektörü, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisine Darboux helis denir [3].

Teorem 2.1.22: (i) $\alpha: I\subset IR\to E^3$ eğrisinin Darboux helis olması için gerek ve yeter şart her $s\in I$ için

$$\sigma_d(s)=\left(\frac{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\kappa^2}\frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}\right)(s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır [3].

(ii) $\alpha: I\subset IR\to E^3$ eğrisinin bir Darboux helis olması için gerek ve yeter şart α nın bir slant helis olmasıdır [3].

Tanım 2.1.23: E^3 uzayında bir birim hızlı $\alpha: I\subset IR\to E^3$ eğrisi verilsin. α eğrisinin birim teğet vektör alanı $\vec{T}$ olmak üzere $\overrightarrow{PQ}=\vec{T}$ alındığında P noktası α eğrisi çizerken, Q noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α eğrisinin 1. küresel göstergesi veya teğetler göstergesi denir.

α eğrisinin teğetler göstergesi $\alpha_T=T$ olur. Teğetler göstergesinin yay parametresine s_T denilirse $s_T\neq s$ olup, yay elementi $ds_T=\left\|\vec{T}'\right\|ds$ dir [30].

Tanım 2.1.24: E^3 uzayında bir birim hızlı $\alpha: I\subset IR\to E^3$ eğrisi verilsin. α eğrisinin asli normal vektör alanı $\vec{N}$ olmak üzere, $\overrightarrow{PQ}=\vec{N}$ alındığında P noktası α eğrisi çizerken, Q noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α eğrisinin 2.küresel göstergesi veya asli normaller göstergesi denir.

α eğrisinin asli normaller göstergesi $\alpha_N = N$ olur. Asli normaller göstergesinin yay parametresine s_N denilirse $s_N \neq s$ olup, yay elementi $ds_N = \left\|\vec{N}'\right\| ds$ dir [30].

Tanım 2.1.25: E^3 uzayında bir birim hızlı $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisi verilsin. α eğrisinin binormal vektör alanı $\vec{B}$ olmak üzere, $\overrightarrow{PQ} = \vec{B}$ alındığında P noktası α eğrisi çizerken, Q noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α eğrisinin 3.küresel göstergesi veya binormaller göstergesi denir.

α eğrisinin binormaller göstergesi $\alpha_B = B$ olur. Binormaller göstergesinin yay parametresine s_B denilirse $s_B \neq s$ olup, yay elementi $ds_B = \left\|\vec{B}'\right\| ds$ dir [30].

2.2. Yüzeyler İçin Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1: A, E^2 nin bir açık alt cümlesi olsun. $X : A \subset E^2 \to E^3$, $X(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa X dönüşümüne basit yüzey veya yüzey yaması denir [24].

1) X diferansiyellenebilirdir.
2) X homeomorfizmdir.
3) X regülerdir.

Tanım 2.2.2: M, E^3 uzayının bir alt cümlesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in X(A)$ ve $X(A) \subset M$ olacak şekilde bir $X : A \subset E^2 \to E^3$ basit yüzeyi varsa S ye E^3 de bir yüzey denir [24].

Tanım 2.2.3: Bir $X : A \subset E^2 \to E^3$ basit yüzeyi için $\vec{X}_u \times \vec{X}_v$ sıfırdan farklı olacak biçimde $(u,v) \in A$ noktasında birim normal vektör alanı veya yüzeyin normali;

$$\vec{U}(u,v) = \frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{\left\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\right\|}$$

ile tanımlıdır. Burada $\vec{X}_u$ ve $\vec{X}_v$ sırasıyla X in u ve v ye göre kısmı türevleridir [24].

Tanım 2.2.4: E^3 de bir M yüzeyi üzerinde bir birim hızlı $\alpha : I \subset IR \to M$ eğrisi verilsin. Yüzeyin birim normal vektör alanı $\vec{U}$ olsun. α eğrisinin birim teğet vektör alanı $\vec{T}$ olmak üzere $\vec{V} = \vec{U} \times \vec{T}$ eşitliği ile tanımlı vektör alanını göz önüne alalım. Vektörel çarpımın özelliklerinden $\left\{\vec{T}(s), \vec{V}(s), \vec{U}(s)\right\}$ kümesi $\alpha(s)$ noktasındaki $T_{\alpha(s)}E^3$ teğet uzayının bir ortonormal tabanı olur. Bu tabana (α, M) eğri-yüzey ikilisinin çatısı veya Darboux çatısı denir [24].

Tanım 2.2.5: $\alpha : I \subset IR \to M$ birim hızlı bir eğri ve Darboux çatısının vektörleri $\vec{T}(s), \vec{V}(s), \vec{U}(s)$ olsun.

$$k_n(s) = \left\langle \alpha''(s), \vec{U}(s) \right\rangle$$

eşitliği ile belirli $k_n(s)$ fonksiyonuna, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki normal eğriliği denir [24].

Tanım 2.2.6: $\alpha : I \subset IR \to M$ birim hızlı bir eğri ve Darboux çatısının vektörleri $\vec{T}(s), \vec{V}(s), \vec{U}(s)$ olsun.

$$k_g(s) = \left\langle \alpha''(s), \vec{V}(s) \right\rangle$$

eşitliği ile belirli $k_g(s)$ fonksiyonuna, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik eğriliği denir [24].

Tanım 2.2.7: $\alpha : I \subset IR \to M$ birim hızlı bir eğri ve Darboux çatısının vektörleri $\vec{T}(s), \vec{V}(s), \vec{U}(s)$ olsun.

$$\tau_g(s) = -\left\langle \vec{U}'(s), \vec{V}(s) \right\rangle$$

eşitliği ile belirli $\tau_g(s)$ fonksiyonuna, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik burulması denir [24].

Tanım 2.2.8: $\alpha : I \subset IR \to M$ birim hızlı bir eğri olmak üzere k_n, k_g ve $\tau_g(s)$ fonksiyonlarına (α, M) ikilisinin eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri denir [24].

Tanım 2.2.9: $\vec{U}$, M yüzeyi üzerinde birim dik vektör alanı olmak üzere M nin bir p noktasında

$$S_p(\vec{v}_p) = -D_{v_p}\vec{U}$$

eşitliği ile tanımlı $S_p : T_p(S) \to T_p(S)$ fonksiyonuna, M yüzeyinin p noktasında, $\vec{U}$ birim dik vektör alanına bağlı şekil operatörü denir. Burada $D_{v_p}\vec{U}$, $\vec{U}$ vektörünün $\vec{v}_p$ vektörü yönündeki kovaryant türevidir [24].

Tanım 2.2.10: **i)** M yüzeyinin bir p noktasında, $S_p : T_p(S) \to T_p(S)$ lineer dönüşümünün öz değerlerine, p noktasındaki asli eğrilikler denir.

ii) $S_p : T_p(S) \to T_p(S)$ lineer dönüşümünün sıfırdan farklı öz vektörlerine p noktasındaki asli vektörler veya eğrilik vektörleri denir.

iii) $\vec{v}_p \neq 0$ ve $\langle S(\vec{v}_p), \vec{v}_p \rangle = 0$ ise $\vec{v}_p$ vektörüne, p noktasında bir asimptotik vektör denir [24].

Tanım 2.2.11: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan bir eğri olsun.

- **i)** Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında M yüzeyinin bir eğrilik vektörü ise α eğrisine, M yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi denir.
- **ii)** Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında M yüzeyinin bir asimptotik vektörü ise α eğrisine, M yüzeyi üzerinde bir asimptotik eğri denir.
- **iii)** M yüzeyinin α eğrisi boyunca birim dik birim normal vektör alanı $\vec{U}_\alpha$ olmak üzere α'' vektör alanı, $\vec{U}_\alpha$ vektör alanının lineer bileşimi ise α eğrisine, M yüzeyi üzerinde bir geodezik eğri denir [24].

Teorem 2.2.12: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun.

- **i)** α eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\tau_g = 0$ olmasıdır.

ii) α eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart $k_n = 0$ olmasıdır.

iii) α eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart $k_g = 0$ olmasıdır [24,26].

Tanım 2.2.13: $\alpha : I \subset IR \to M$ eğrisinin birinci eğriliği κ , ikinci eğriliği τ ve Darboux çatısının eğrilikleri k_n , k_g ve τ_g arasında

$$\kappa^2 = k_g^2 + k_n^2, \quad k_g = \kappa \cos\phi, \quad k_n = \kappa \sin\phi, \qquad \tau_g = \tau - \phi' \tag{2.1}$$

bağıntıları vardır. Burada ϕ, Frenet çatısının $\vec{B}$ binormal vektörü ile $\vec{U}$ yüzey normali arasındaki açıdır [14].

Tanım 2.2.14: $\alpha : I \subset IR \to M$ birim hızlı bir eğri olsun. Darboux çatısının vektörleri $\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}$ ve eğrilikleri k_n, k_g, τ_g olmak üzere, Darboux çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned} \vec{T}' &= k_g \vec{V} + k_n \vec{U} \\ \vec{V}' &= -k_g \vec{T} + \tau_g \vec{U} \\ \vec{U}' &= -k_n \vec{T} - \tau_g \vec{V} \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklindedir [14,15,26].

Tanım 2.2.15: $\alpha : I \subset IR \to M$, birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Darboux çatısı ile Frenet çatısı arasındaki ilişkiler

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \vec{T} \\ \vec{N} &= \cos\phi \vec{V} + \sin\phi \vec{U} \\ \vec{B} &= -\sin\phi \vec{V} + \cos\phi \vec{U} \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad \begin{aligned} \vec{T} &= \vec{T} \\ \vec{V} &= \cos\phi \vec{N} - \sin\phi \vec{B} \\ \vec{U} &= \sin\phi \vec{N} + \cos\phi \vec{B} \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada ϕ, $\vec{B}$ binormal vektörü ile $\vec{U}$ yüzey normali arasındaki açıdır [14].

Tanım 2.2.16: $\alpha : I \subset IR \to E^3$, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. α nın Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ olmak üzere, α eğrisi boyunca yüzeyin $\vec{U}$ birim normali, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisine M yüzeyi üzerinde isophote eğrisi denir [14].

Teorem 2.2.17: $\alpha : I \subset IR \to E^3$, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Darboux çatısının vektörleri ve eğrilikleri sırasıyla $\left\{\vec{T},\vec{V},\vec{U}\right\}$, k_n, k_g ve τ_g olmak üzere, α eğrisinin isophote eğrisi olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_i(s) = \pm\left(\frac{k_n^2}{\left(k_n^2+\tau_g^2\right)^{3/2}}\left(\frac{\tau_g}{k_n}\right)' + \frac{k_g}{\left(k_n^2+\tau_g^2\right)^{1/2}} \right)(s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır. Burada $k_n \neq 0$ dır [14].

Tanım 2.2.18: E^3 de bir M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisi verilsin. α nın Darboux çatısı $\left\{\vec{T},\vec{V},\vec{U}\right\}$ olsun. α nın $\vec{V}$ vektör alanı sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisi, M yüzeyi üzerinde relatively normal-slant helis olarak adlandırılır [15].

Teorem 2.2.19: $\alpha : I \subset IR \to M, M$ yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Darboux çatısı $\left\{\vec{T},\vec{V},\vec{U}\right\}$ ve eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri k_n, k_g ve τ_g olsun. α eğrisinin relatively normal-slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_v(s) = \left(\frac{1}{\left(k_g^2+\tau_g^2\right)^{3/2}}\left(\tau_g' k_g - k_g'\tau_g - k_n\left(k_g^2+\tau_g^2\right)\right) \right)(s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır. Burada $\left(\tau_g, k_g\right) \neq (0,0)$ dır [15].

Tanım 2.2.20: $\alpha : I \subset IR \to M, M$ yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri, Darboux çatısının vektör alanları $\vec{T},\vec{V},\vec{U}$ ve eğrilikleri k_n, k_g ve τ_g olsun. α eğrisi boyunca

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_o(s) &= \tau_g(s)\vec{T}(s) - k_n(s)\vec{V}(s), \\
\tilde{D}_n(s) &= -k_n(s)\vec{V}(s) + k_g(s)\vec{U}(s), \\
\tilde{D}_r(s) &= \tau_g(s)\vec{T}(s) + k_g(s)\vec{U}(s)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

ile tanımlı vektör alanlarına sırasıyla oskülatör Darboux vektör alanı, normal Darboux vektör alanı ve rektifiyan Darboux vektör alanı denir [19].

2.3. Oskülatör Darboux Çatısı İçin Temel Kavram ve Teoremler

Tanım 2.3.1: M bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$, bu yüzey üzerinde bir birim hızlı, $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ Darboux çatısına, k_g, k_n, τ_g eğriliklerine ve $\tilde{D}_o(s) = \tau_g(s)\vec{T}(s) - k_n(s)\vec{V}(s)$ oskülatör Darboux vektörüne sahip bir eğri olsun. Bu taktirde,

$$\tilde{D}_o(s) = \tau_g(s)\vec{T}(s) - k_n(s)\vec{V}(s)$$

vektörü normlanırsa

$$\vec{D}_o(s) = \frac{\tau_g(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s) + k_n^2(s)}}\vec{T}(s) - \frac{k_n(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s) + k_n^2(s)}}\vec{V}(s)$$

elde edilir. $\vec{D}_o$ vektörü $\vec{T}$ ve $\vec{V}$ nin gerdiği düzlemde olduğundan $\vec{U}$ vektörüne diktir. Dolayısıyla $\vec{Y}_o = \vec{D}_o \times \vec{U}$ birim vektörünün tanımlanması ile yüzey üzerindeki α eğrisi boyunca yeni bir ortonormal çatı olan $\{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o\}$ çatısı elde edilir. Tanımlanan $\{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o\}$ çatısına M yüzeyi üzerinde α eğrisinin oskülatör Darboux çatısı veya kısaca $OD-$ çatısı denir [21].

Teorem 2.3.2: M bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$, bu yüzey üzerinde yay parametresi s olan, $OD-$ çatısına sahip birim hızlı bir eğri olsun. $OD-$ çatısının vektör alanları $\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o$ ve eğrilikleri δ_o, μ_o olmak üzere, $OD-$ çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned} \vec{D}_o' &= -\delta_o \vec{Y}_o \\ \vec{U}' &= \mu_o \vec{Y}_o \\ \vec{Y}_o' &= \delta_o \vec{D}_o - \mu_o \vec{U} \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklindedir. Burada $\delta_o = \left(\frac{k_n^{\,2}}{k_n^{\,2} + \tau_g^{\,2}}\right)\left(\frac{\tau_g}{k_n}\right)' + k_g$ ve $\mu_o = \sqrt{k_n^{\,2} + \tau_g^{\,2}}$ dır [21].

İspat: $\vec{D}_o'$, $\left\{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o\right\}$ çatısının elemanlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir. Yani

$$\vec{D}_o' = a_1\vec{D}_o + a_2\vec{U} + a_3\vec{Y}_o \tag{2.5}$$

yazılır. Burada $a_i = a_i(s),\ i = 1,2,3$ s nin diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. (2.5) ifadesinin her iki yanı $\vec{D}_o$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\left\langle \vec{D}_o', \vec{D}_o \right\rangle = a_1\left\langle \vec{D}_o, \vec{D}_o \right\rangle + a_2\left\langle \vec{D}_o, \vec{U} \right\rangle + a_3\left\langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \right\rangle$$

bulunur. $\left\langle \vec{D}_o, \vec{D}_o \right\rangle = 1$ ve $\left\langle \vec{D}_o, \vec{U} \right\rangle = \left\langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \right\rangle = 0$ olduğundan $\left\langle \vec{D}_o', \vec{D}_o \right\rangle = a_1$ dır. Diğer taraftan $\left\langle \vec{D}_o, \vec{D}_o \right\rangle = 1$ eşitliğinin türevi alınırsa $\left\langle \vec{D}_o', \vec{D}_o \right\rangle = 0 = a_1$ bulunur. (2.5) ifadesinin her iki yanı $\vec{U}$ vektörü ile iç çarpım uygulanırsa

$$\left\langle \vec{D}_o', \vec{U} \right\rangle = a_1\left\langle \vec{D}_o, \vec{U} \right\rangle + a_2\left\langle \vec{U}, \vec{U} \right\rangle + a_3\left\langle \vec{Y}_o, \vec{U} \right\rangle$$

bulunur. $\left\langle \vec{D}_o, \vec{U} \right\rangle = \left\langle \vec{Y}_o, \vec{U} \right\rangle = 0$ ve $\left\langle \vec{U}, \vec{U} \right\rangle = 1$ olduğundan $\left\langle \vec{D}_o', \vec{U} \right\rangle = a_2$ olur. Diğer taraftan $\left\langle \vec{D}_o, -\vec{V} \right\rangle = \dfrac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \cos\phi$ olmak üzere

$$\sin^2\phi = 1 - \cos^2\phi = 1 - \frac{k_n{}^2}{\tau_g^2 + k_n^2} = \frac{\tau_g^2}{\tau_g^2 + k_n^2} \Rightarrow \sin\phi = \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \text{ olur. Buradan}$$

$$\vec{D}_o = \sin\phi\vec{T} - \cos\phi\vec{V} \tag{2.6}$$

yazılabilir. (2.6) ifadesinin türevi alınıp, (2.2) eşitliğindeki Darboux çatısı türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{D}_o' = (\phi' + k_g)\cos\phi\vec{T} + (\phi' + k_g)\sin\phi\vec{V} + (k_n\sin\phi - \tau_g\cos\phi)\vec{U}$$

elde edilir. Burada $\dfrac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \sin\phi$ ve $\dfrac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \cos\phi$ olduğu göz önüne alınırsa $\vec{U}$ vektörünün katsayısı sıfır olur. Dolayısıyla

$$\vec{D}_o' = (\phi' + k_g)\cos\phi\vec{T} + (\phi' + k_g)\sin\phi\vec{V} \tag{2.7}$$

bulunur. Bulunan $\vec{D}_o'$ vektörü, $\vec{U}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} a_2 = \left\langle \vec{D}_o', \vec{U} \right\rangle &= \left\langle (\phi' + k_g)\cos\phi\vec{T} + (\phi' + k_g)\sin\phi\vec{V}, \vec{U} \right\rangle \\ &= (\phi' + k_g)\cos\phi\left\langle \vec{T}, \vec{U} \right\rangle + (\phi' + k_g)\sin\phi\left\langle \vec{V}, \vec{U} \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de (2.5) ifadesi $\vec{Y}_o$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\left\langle \vec{D}_o', \vec{Y}_o \right\rangle = a_1\left\langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \right\rangle + a_2\left\langle \vec{U}, \vec{Y}_o \right\rangle + a_3\left\langle \vec{Y}_o, \vec{Y}_o \right\rangle$$

bulunur. $\left\langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \right\rangle = \left\langle \vec{U}, \vec{Y}_o \right\rangle = 0$ ve $\left\langle \vec{Y}_o, \vec{Y}_o \right\rangle = 1$ olduğundan $a_3 = \left\langle \vec{D}_o', \vec{Y}_o \right\rangle$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \vec{Y}_o = \vec{D}_o \times \vec{U} &= \left(\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}}\vec{T} - \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}}\vec{V} \right) \times \vec{U} \\ &= \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}}(\vec{T} \times \vec{U}) - \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}}(\vec{V} \times \vec{U}) \\ &= -\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}}\vec{T} - \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}}\vec{V} \end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \sin\phi$ ve $\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \cos\phi$ olduğu kullanılırsa

$$\vec{Y}_o = -\cos\phi\vec{T} - \sin\phi\vec{V} \tag{2.8}$$

elde edilir. (2.7) de bulunan $\vec{D}_o'$ vektörü ile (2.8) de bulunan $\vec{Y}_o$ vektörü iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} a_3 = \left\langle \vec{D}_o', \vec{Y}_o \right\rangle &= \left\langle (\phi' + k_g)\cos\phi\vec{T} + (\phi' + k_g)\sin\phi\vec{V}, -\cos\phi\vec{T} - \sin\phi\vec{V} \right\rangle \\ &= -(\phi' + k_g)\cos^2\phi\left\langle \vec{T}, \vec{T} \right\rangle - (\phi' + k_g)\sin^2\phi\left\langle \vec{V}, \vec{V} \right\rangle \\ &= -(\phi' + k_g)(\cos^2\phi + \sin^2\phi) \\ &= -(\phi' + k_g) \end{aligned} \tag{2.9}$$

bulunur. Burada ϕ' nü bulmak için, $\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}=\sin\phi$ ve $\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}=\cos\phi$ olduğu göz önüne alınırsa $\tan\phi=\frac{\tau_g}{k_n}$ bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\phi'\left(1+\tan^2\phi\right)=\left(\frac{\tau_g}{k_n}\right)'$$

elde edilir. Bu ifadede $\tan\phi=\frac{\tau_g}{k_n}$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\phi'\left(1+\frac{\tau_g^2}{k_n^2}\right)=\left(\frac{\tau_g}{k_n}\right)'$$

ve bu denklem düzenlenirse

$$\phi'=\left(\frac{\tau_g}{k_n}\right)'\left(\frac{k_n^2}{k_n^2+\tau_g^2}\right) \tag{2.10}$$

bulunur. (2.10) eşitliği, (2.9) da yazılırsa

$$a_3=-\left[\left(\frac{\tau_g}{k_n}\right)'\left(\frac{{k_n}^2}{{k_n}^2+{\tau_g}^2}\right)+k_g\right]$$

elde edilir. Bulunan a_1, a_2 ve a_3 değerleri (2.5) denkleminde yazılırsa

$$\vec{D}_o'=-\left[\left(\frac{\tau_g}{k_n}\right)'\left(\frac{{k_n}^2}{{k_n}^2+{\tau_g}^2}\right)+k_g\right]\vec{Y}_o \tag{2.11}$$

bulunur. Şimdi $\vec{U}$ vektörünün türevini hesaplayalım. $\vec{U}'$, $\left\{\vec{D}_o,\vec{U},\vec{Y}_o\right\}$ çatısının elemanlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir. Yani

$$\vec{U}'=b_1\vec{D}_o+b_2\vec{U}+b_3\vec{Y}_o \tag{2.12}$$

yazılır. Burada $b_i = b_i(s),\ i = 1,2,3\ \ s$ in diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. (2.12) eşitliğinin her iki yanı $\vec{D}_o$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\left\langle \vec{U}', \vec{D}_o \right\rangle = b_1 \left\langle \vec{D}_o, \vec{D}_o \right\rangle + b_2 \left\langle \vec{D}_o, \vec{U} \right\rangle + b_3 \left\langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \right\rangle$$

bulunur. $\left\langle \vec{D}_o, \vec{D}_o \right\rangle = 1$ ve $\left\langle \vec{D}_o, \vec{U} \right\rangle = \left\langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \right\rangle = 0$ olduğundan $\left\langle \vec{U}', \vec{D}_o \right\rangle = b_1$ olur. Darboux çatısının türev formüllerinden $\vec{U}' = -k_n \vec{T} - \tau_g \vec{V}$ dır.

$\vec{U}'$ ve $\vec{D}_o = \dfrac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{T} - \dfrac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{V}$ vektörleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b_1 = \left\langle \vec{U}', \vec{D}_o \right\rangle &= \left\langle -k_n \vec{T} - \tau_g \vec{V}, \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{T} - \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{V} \right\rangle \\ &= \frac{-k_n \tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \left\langle \vec{T}, \vec{T} \right\rangle + \frac{\tau_g k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \left\langle \vec{V}, \vec{V} \right\rangle \\ &= \frac{-k_n \tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} + \frac{\tau_g k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (2.12) eşitliğinin her iki yanı $\vec{U}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\left\langle \vec{U}', \vec{U} \right\rangle = b_1 \left\langle \vec{D}_o, \vec{U} \right\rangle + b_2 \left\langle \vec{U}, \vec{U} \right\rangle + b_3 \left\langle \vec{Y}_o, \vec{U} \right\rangle$$

bulunur. $\left\langle \vec{D}_o, \vec{U} \right\rangle = \left\langle \vec{Y}_o, \vec{U} \right\rangle = 0$ ve $\left\langle \vec{U}, \vec{U} \right\rangle = 1$ olduğundan $b_2 = \left\langle \vec{U}', \vec{U} \right\rangle$ olur. Öte yandan $\left\langle \vec{U}, \vec{U} \right\rangle = 1$ ifadesinin türevi alınırsa $\left\langle \vec{U}', \vec{U} \right\rangle = 0 = b_2$ elde edilir. (2.12) ifadesi $\vec{Y}_o$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\left\langle \vec{U}', \vec{Y}_o \right\rangle = b_1 \left\langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \right\rangle + b_2 \left\langle \vec{U}, \vec{Y}_o \right\rangle + b_3 \left\langle \vec{Y}_o, \vec{Y}_o \right\rangle$$

bulunur. $\left\langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \right\rangle = \left\langle \vec{U}, \vec{Y}_o \right\rangle = 0$ ve $\left\langle \vec{Y}_o, \vec{Y}_o \right\rangle = 1$ olduğundan $b_3 = \left\langle \vec{U}', \vec{Y}_o \right\rangle$ elde edilir. Darboux türev formüllerinden $\vec{U}' = -k_n \vec{T} - \tau_g \vec{V}$ dır. Ayrıca

$$\vec{Y}_o = \vec{D}_o \times \vec{U} = \left(\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{T} - \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{V} \right) \times \vec{U}$$

$$= \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} (\vec{T} \times \vec{U}) - \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} (\vec{V} \times \vec{U})$$

$$= -\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{T} - \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{V}$$

dır. Bu vektörler yerine yazılırsa

$$b_3 = \left\langle \vec{U}', \vec{Y}_o \right\rangle = \left\langle -k_n \vec{T} - \tau_g \vec{V}, -\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{T} - \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{V} \right\rangle$$

$$= \frac{k_n^2}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \left\langle \vec{T}, \vec{T} \right\rangle + \frac{\tau_g^2}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \left\langle \vec{V}, \vec{V} \right\rangle$$

$$= \frac{\tau_g^2 + k_n^2}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}}$$

$$= \sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}$$

bulunur. Bulunan b_1, b_2 ve b_3 değerleri (2.12) da yazılırsa

$$\vec{U}' = \sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}\, \vec{Y}_o \tag{2.13}$$

elde edilir. Şimdi $\vec{Y}_o$ vektörünün türevini hesaplayalım. $\vec{Y}_o'$, $\left\{ \vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o \right\}$ çatısının elemanlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir. Yani

$$\vec{Y}_o' = c_1 \vec{D}_o + c_2 \vec{U} + c_3 \vec{Y}_o \tag{2.14}$$

yazılır. Burada $c_i = c_i(s),\ i = 1,2,3$ s in diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. (2.14) ifadesinin her iki yanı $\vec{D}_o$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\left\langle \vec{Y}_o', \vec{D}_o \right\rangle = c_1 \left\langle \vec{D}_o, \vec{D}_o \right\rangle + c_2 \left\langle \vec{D}_o, \vec{U} \right\rangle + c_3 \left\langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \right\rangle$$

bulunur. $\left\langle \vec{D}_o, \vec{D}_o \right\rangle = 1$ ve $\left\langle \vec{D}_o, \vec{U} \right\rangle = \left\langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \right\rangle = 0$ olduğundan $\left\langle \vec{Y}_o', \vec{D}_o \right\rangle = c_1$ dır. (2.8) eşitliğinin türevi alınırsa ve Darboux çatısının türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\vec{Y}_o' &= \phi' \sin\phi\vec{T} - \cos\phi\vec{T}' - \phi'\cos\phi\vec{V} - \sin\phi\vec{V}' \\ &= \phi' \sin\phi\vec{T} - \cos\phi\left(k_g\vec{V} + k_n\vec{U}\right) - \phi'\cos\phi\vec{V} - \sin\phi\left(-k_g\vec{T} + \tau_g\vec{U}\right) \\ &= \left(\phi' \sin\phi + k_g \sin\phi\right)\vec{T} + \left(-\phi'\cos\phi - k_g\cos\phi\right)\vec{V} \\ &\quad -\left(k_n\cos\phi + \tau_g \sin\phi\right)\vec{U} \\ &= \left(\phi' + k_g\right)\sin\phi\vec{T} - \left(\phi' + k_g\right)\cos\phi\vec{V} - \left(k_n\cos\phi + \tau_g\sin\phi\right)\vec{U}\end{aligned} \tag{2.16}$$

bulunur. (2.16) de bulunan $\vec{Y}_o'$ vektörü ile $\vec{D}_o = \sin\phi\vec{T} - \cos\phi\vec{V}$ vektörü iç çarpılırsa

$$c_1 = \left\langle \vec{Y}_o', \vec{D}_o \right\rangle = \phi' + k_g$$

elde edilir. (2.10) ifadesi yerine yazılırsa

$$c_1 = \left(\frac{\tau_g}{k_n}\right)'\left(\frac{{k_n}^2}{{k_n}^2 + {\tau_g}^2}\right) + k_g$$

bulunur. (2.14) ifadesinin her iki yanı $\vec{U}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\left\langle \vec{Y}_o', \vec{U} \right\rangle = c_1\left\langle \vec{D}_o, \vec{U} \right\rangle + c_2\left\langle \vec{U}, \vec{U} \right\rangle + c_3\left\langle \vec{Y}_o, \vec{U} \right\rangle$$

elde edilir. $\left\langle \vec{D}_o, \vec{U} \right\rangle = \left\langle \vec{Y}_o, \vec{U} \right\rangle = 0$ ve $\left\langle \vec{U}, \vec{U} \right\rangle = 1$ olduğundan $c_2 = \left\langle \vec{Y}_o', \vec{U} \right\rangle$ dir. (2.16) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}c_2 = \left\langle \vec{Y}_o', \vec{U} \right\rangle &= \left\langle \left(\phi' + k_g\right)\sin\phi\vec{T} - \left(\phi' + k_g\right)\cos\phi\vec{V} - \left(k_n\cos\phi + \tau_g\sin\phi\right)\vec{U}, \vec{U} \right\rangle \\ &= -\left(k_n\cos\phi + \tau_g\sin\phi\right)\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \sin\phi$ ve $\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \cos\phi$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}c_2 &= -\left(k_n\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} + \tau_g\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}}\right) \\ &= -\left(\frac{k_n^2}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} + \frac{\tau_g^2}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}}\right) \\ &= -\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (2.14) ifadesi $\vec{Y}_o$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\left\langle \vec{Y}_o', \vec{Y}_o \right\rangle = c_1 \left\langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \right\rangle + c_2 \left\langle \vec{U}, \vec{Y}_o \right\rangle + c_3 \left\langle \vec{Y}_o, \vec{Y}_o \right\rangle$$

bulunur. $\left\langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \right\rangle = \left\langle \vec{U}, \vec{Y}_o \right\rangle = 0$ ve $\left\langle \vec{Y}_o, \vec{Y}_o \right\rangle = 1$ olduğundan $c_3 = \left\langle \vec{Y}_o', \vec{Y}_o \right\rangle$ dir. $\left\langle \vec{Y}_o, \vec{Y}_o \right\rangle = 1$ ifadesinin türevini alırsak $\left\langle \vec{Y}_o', \vec{Y}_o \right\rangle = c_3 = 0$ elde edilir. Bulunan c_1, c_2 ve c_3 ifadeleri (2.14) ifadesinde yazılırsa

$$\vec{Y}_o' = \left[\left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)' \left(\frac{k_n^{\,2}}{k_n^{\,2} + \tau_g^{\,2}} \right) + k_g \right] \vec{D}_o - \sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}\, \vec{U} \tag{2.17}$$

elde edilir. (2.11), (2.13) ve (2.17) denklemleri dikkate alınarak $\vec{D}_o', \vec{U}'$ ve $\vec{Y}_o'$ vektörleri matris formunda yazılırsa

$$\begin{pmatrix} \vec{D}_o' \\ \vec{U}' \\ \vec{Y}_o' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\left(\frac{k_n^{\,2}}{k_n^{\,2} + \tau_g^{\,2}} \right) \left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)' + k_g \\ 0 & 0 & \sqrt{k_n^{\,2} + \tau_g^{\,2}} \\ \left(\frac{k_n^{\,2}}{k_n^{\,2} + \tau_g^{\,2}} \right) \left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)' + k_g & \left(-\sqrt{k_n^{\,2} + \tau_g^{\,2}} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{D}_o \\ \vec{U} \\ \vec{Y}_o \end{pmatrix}$$

bulunur. Burada

$$\delta_o = \left(\frac{k_n^{\,2}}{k_n^{\,2} + \tau_g^{\,2}} \right) \left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)' + k_g, \;\; \mu_o = \sqrt{k_n^{\,2} + \tau_g^{\,2}} \tag{2.18}$$

denilirse $OD-$ çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \vec{D}_o' \\ \vec{U}' \\ \vec{Y}_o' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_o \\ 0 & 0 & \mu_o \\ \delta_o & -\mu_o & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{D}_o \\ \vec{U} \\ \vec{Y}_o \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir ve ispat tamamlanır [21].

Tanım 2.3.3: M, bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin $\tilde{D}_o$ vektörü alanı (veya denk olarak $\vec{D}_o = \dfrac{\tilde{D}_o}{\left\|\tilde{D}_o\right\|}$ birim vektör alanı) sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisi M, yüzeyi üzerinde D_o – Darboux slant helis olarak adlandırılır [20].

Teorem 2.3.4: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde OD – çatısı $\left\{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o\right\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin bir D_o – Darboux slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_o(s) = \frac{\mu_o}{\delta_o}(s) \tag{2.19}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır. Burada $\mu_o \neq 0$ ve $\delta_o \neq 0$ dır [21].

Sonuç 2.3.5: α , E^3 de M yüzeyi üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve Darboux çatısının eğrilikleri k_g, k_n ve τ_g olsun. α eğrisinin D_o – Darboux Slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_o(s) = \left(\frac{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}}{\dfrac{k_n^2}{k_n^2 + \tau_g^2}\left(\dfrac{\tau_g}{k_n}\right)' + k_g} \right)(s) \tag{2.20}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır [21].

2.4. Rektifiyan Darboux Çatısı İçin Temel Kavram ve Teoremler

Tanım 2.4.1: M bir yüzey ve $\gamma : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. γ nın Darboux çatısı $\left\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\right\}$, eğrilikleri k_g, k_n, τ_g ve rektifiyan Darboux vektörü $\tilde{D}_r(s) = \tau_g(s)\vec{T}(s) + k_g(s)\vec{U}(s)$ olsun. Bu taktirde,

$$\tilde{D}_r(s) = \tau_g(s)\vec{T}(s) + k_g(s)\vec{U}(s)$$

vektörü normlanırsa

$$\vec{D}_r(s)=\frac{\tilde{D}_r(s)}{\left\|\tilde{D}_r(s)\right\|}=\frac{\tau_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s)+\tau_g^2(s)}}\vec{T}(s)+\frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s)+\tau_g^2(s)}}\vec{U}(s)$$

elde edilir. $\vec{D}_r$ vektörü $\vec{T}$ ve $\vec{U}$ vektörünün gerdiği düzlemde bulunduğundan $\vec{V}$ vektörüne diktir. Dolayısıyla $\vec{Y}_r=\vec{D}_r\times\vec{V}$ birim vektörünün tanımlanması ile yüzey üzerindeki γ eğrisi boyunca yeni bir ortonormal çatı olan $\left\{\vec{D}_r,\vec{V},\vec{Y}_r\right\}$ çatısı elde edilir. Bu şekilde tanımlanan $\left\{\vec{D}_r,\vec{V},\vec{Y}_r\right\}$ çatısına M yüzeyi üzerinde γ eğrisinin rektifiyan Darboux çatısı veya kısaca $RD-$çatısı denir [21].

Teorem 2.4.2: M bir yüzey ve $\gamma:I\subset IR\to M$ bu yüzey üzerinde yay parametresi s olan, $RD-$çatısına sahip birim hızlı bir eğri olsun. $RD-$çatısının vektör alanları $\vec{D}_r,\vec{V},\vec{Y}_r$ ve eğrilikleri δ_r, μ_r olmak üzere, $RD-$çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned}\vec{D}_r{}' &= -\delta_r\vec{Y}_r\\ \vec{V}' &= \mu_r\vec{Y}_r\\ \vec{Y}_r{}' &= \delta_r\vec{D}_r-\mu_r\vec{V}\end{aligned}\qquad(2.21)$$

şeklindedir. Burada $\delta_r=\left(\frac{\tau_g}{k_g}\right)'\left(\frac{k_g^2}{k_g^2+\tau_g^2}\right)-k_n$ ve $\mu_r=\sqrt{k_g^2+\tau_g^2}$ dır [21].

İspat: Teorem 2.3.2 dekine benzer şekilde yapılır.

Tanım 2.4.3: $\gamma:I\subset IR\to M$ eğrisinin $\tilde{D}_r$ vektör alanı (veya denk olarak $\vec{D}_r=\frac{\tilde{D}_r}{\left\|\tilde{D}_r\right\|}$ birim vektör alanı) sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa γ eğrisi M yüzeyi üzerinde D_r-Darboux slant helis olarak adlandırılır [20].

Teorem 2.4.4: M, E^3 de bir yüzey ve $\gamma:I\subset IR\to M$ bu yüzey üzerinde $\left\{\vec{D}_r,\vec{V},\vec{Y}_r\right\}$ $RD-$çatısına sahip birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin D_r-Darboux slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s\in I$ için

$$\sigma_r(s)=\frac{\mu_r}{\delta_r}(s) \tag{2.22}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır. Burada $\mu_r \neq 0$ ve $\delta_r \neq 0$ dır [21].

Sonuç 2.4.5: γ, E^3 de M yüzeyi üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve bu eğrinin Darboux çatısının eğrilikleri k_g, k_n ve τ_g olsun. γ eğrisinin D_r-Darboux slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_r(s)=\left(\frac{\sqrt{k_g^2+\tau_g^2}}{\frac{k_g^2}{k_g^2+\tau_g^2}\left(\frac{\tau_g}{k_g}\right)'-k_n}\right)(s) \tag{2.23}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır [21].

2.5. Normal Darboux Çatısı İçin Temel Kavram ve Teoremler

Tanım 2.5.1: M bir yüzey ve $\beta: I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. β nın Darboux çatısı $\{\vec{T},\vec{V},\vec{U}\}$, eğrilikleri k_g, k_n, τ_g ve normal Darboux vektörü $\tilde{D}_n(s)=-k_n(s)\vec{V}(s)+k_g(s)\vec{U}(s)$ olsun. Bu taktirde,

$$\tilde{D}_n(s)=-k_n(s)\vec{V}(s)+k_g(s)\vec{U}(s)$$

vektörü normlanırsa

$$\vec{D}_n(s)=\frac{\tilde{D}_n(s)}{\left\|\tilde{D}_n(s)\right\|}=-\frac{k_n(s)}{\sqrt{k_n^2(s)+k_g^2(s)}}\vec{V}(s)+\frac{k_g(s)}{\sqrt{k_n^2(s)+k_g^2(s)}}\vec{U}(s)$$

elde edilir. $\vec{D}_n$ vektörü, $\vec{V}$ ve $\vec{U}$ vektörlerinin gerdiği düzlemde bulunduğundan $\vec{T}$ vektörüne diktir. Dolayısıyla $\vec{Y}_n=\vec{D}_n\times\vec{T}$ birim vektörünün tanımlanması ile yüzey üzerindeki β eğrisi boyunca yeni bir ortonormal çatı olan $\{\vec{D}_n,\vec{T},\vec{Y}_n\}$ çatısı elde

edilir. Bu şekilde tanımlanan $\left\{\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n\right\}$ çatısına, M yüzeyi üzerinde β eğrisinin normal Darboux çatısı veya kısaca $ND-$çatısı denir [21].

Teorem 2.5.2: M bir yüzey ve $\beta : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde yay parametresi s olan, $ND-$çatısına sahip birim hızlı bir eğri olsun. $ND-$çatısının vektör alanları $\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n$ ve eğrilikleri δ_n, μ_n olmak üzere, $ND-$çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned} \vec{D}_n' &= -\delta_n \vec{Y}_n \\ \vec{T}' &= \mu_n \vec{Y}_n \\ \vec{Y}_n' &= \delta_n \vec{D}_n - \mu_n \vec{T} \end{aligned} \tag{2.24}$$

şeklindedir. Burada $\delta_n = \left(\frac{k_n}{k_g}\right)' \left(\frac{k_g^2}{k_n^2 + k_g^2}\right) + \tau_g$ ve $\mu_n = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}$ dır [21].

İspat: İspatı teorem 2.3.2 dekine benzer şekilde yapılır.

Tanım 2.5.3: $\beta : I \subset IR \to M$ eğrisinin $\tilde{D}_n$ vektörü alanı (veya denk olarak $\vec{D}_n = \frac{\tilde{D}_n}{\left\|\tilde{D}_n\right\|}$ birim vektör alanı) sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa β eğrisi M yüzeyi üzerinde D_n-Darboux slant helis olarak adlandırılır [20].

Teorem 2.5.4: M, E^3 uzayında bir yüzey ve β bu yüzey üzerinde $ND-$çatısına sahip birim hızlı bir eğri olsun. β eğrisinin D_n-Darboux slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_n(s) = \frac{\mu_n}{\delta_n}(s) \tag{2.25}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır. Burada $\mu_n \neq 0$ ve $\delta_n \neq 0$ dır [21].

Sonuç 2.5.5: β, E^3 de M yüzeyi üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve Darboux çatısının eğrilikleri k_g, k_n ve τ_g olsun. β eğrisinin D_n-Darboux slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_n(s) = \left(\frac{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}{\frac{k_g^2}{k_n^2 + k_g^2}\left(\frac{k_n}{k_g}\right)' + \tau_g} \right)(s) \tag{2.26}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır [21].

3.YÜZEY ÜZERİNDE Y_o – DARBOUX SLANT HELİSLER VE OSKÜLATÖR DARBOUX ÇATISINA GÖRE KÜRESEL GÖSTERGE EĞRİLERİ

Bu bölümde, E^3 uzayında bir M yüzeyi üzerinde kalan yeni yüzey eğrileri Y_o – Darboux slant helis kavramı tanımlanacak ve yüzey üzerinde kalan eğrinin, Y_o – Darboux slant helis olma şartı verilecektir. Ayrıca $OD-$ çatısına göre küresel gösterge eğrileri tanımlanıp, bu eğrilerin Frenet çatı elemanlarının $OD-$ çatısına göre eşitleri verilecektir.

3.1: Yüzey Üzerinde Oskülatör Darboux Çatısına Göre Y_o – Darboux Slant Helisler

Tanım 3.1.1: M bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin $\vec{Y}_o$ vektör alanı, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisi M yüzeyi üzerinde Y_o- Darboux slant helis olarak adlandırılır. Burada $OD-$ çatısının eğrilikleri, $\delta_o \neq 0$ ve $\mu_o \neq 0$ dır.

Teorem 3.1.2: M bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde, $OD-$ çatısı $\left\{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o\right\}$ ve eğrilikleri δ_o, μ_o olan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Y_o- Darboux slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_{Y_o}(s) = \frac{\delta_o^2}{\left(\delta_o^2 + \mu_o^2\right)^{3/2}} \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)'(s) \tag{3.1.1}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

İspat: α birim hızlı, $OD-$ çatısı $\left\{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o\right\}$ ve eğrilikleri δ_o, μ_o olan Y_o- Darboux slant helis olsun. O halde tanım 3.1.1 gereği α eğrisinin $\vec{Y}_o$ vektör alanı, sabit doğrultulu bir vektör ile sabit bir θ açısı yapar. Dolayısıyla $\left\langle \vec{Y}_o, \vec{d}_{Y_o} \right\rangle = \cos\theta$ yazılabilir. Bu ifadenin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\left\langle \vec{Y}_o', \vec{d}_{Y_o} \right\rangle + \left\langle \vec{Y}_o, \vec{d}_{Y_o}' \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \vec{Y}_o', \vec{d}_{Y_o} \right\rangle = 0$$

bulunur. Bulunan bu eşitlikte $OD-$ çatısının türev formülleri yerine yazılarak

$$\left\langle \delta_o \vec{D}_o - \mu_o \vec{U}, \vec{d}_{Y_o} \right\rangle = 0\,,$$

$$\delta_o \left\langle \vec{D}_o, \vec{d}_{Y_o} \right\rangle - \mu_o \left\langle \vec{U}, \vec{d}_{Y_o} \right\rangle = 0\,,$$

$$\left\langle \vec{D}_o, \vec{d}_{Y_o} \right\rangle = \frac{\mu_o}{\delta_o} \left\langle \vec{U}, \vec{d}_{Y_o} \right\rangle$$

eşitliği elde edilir. Bulunan bu eşitlikte $\left\langle \vec{U}, \vec{d}_{Y_o} \right\rangle = p$ alınıp, yerine yazılırsa $\left\langle \vec{D}_o, \vec{d}_{Y_o} \right\rangle = \frac{\mu_o}{\delta_o} p$ elde edilir. $\vec{d}_{Y_o}$ vektörü, $\left\{ \vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o \right\}$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak

$$\vec{d}_{Y_o} = a_1 \vec{D}_o + a_2 \vec{U} + a_3 \vec{Y}_o \tag{3.1.2}$$

yazılabilir. (3.1.2) eşitliğindeki $\vec{d}_{Y_o}$ vektörüne sırasıyla $\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o$ vektörleri ile iç çarpım uygulanırsa,

$$\left\langle \vec{D}_o, \vec{d}_{Y_o} \right\rangle = a_1 = \frac{\mu_o}{\delta_o} p\,, \quad \left\langle \vec{U}, \vec{d}_{Y_o} \right\rangle = a_2 = p, \quad \left\langle \vec{Y}_o, \vec{d}_{Y_o} \right\rangle = a_3 = \cos\theta$$

eşitlikleri elde edilir. Bulunan bu ifadeler (3.1.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\vec{d}_{Y_o} = \frac{\mu_o}{\delta_o} p\vec{D}_o + p\vec{U} + \cos\theta \vec{Y}_o \tag{3.1.3}$$

vektörü bulunur. Burada $\vec{d}_{Y_o}$ vektörü birim vektör olarak alınabilir. Dolayısıyla $\left\| \vec{d}_{Y_o} \right\| = 1$ dir. O halde (3.1.3) eşitliğinin normu alınırsa,

$$\left\| \vec{d}_{Y_o} \right\| = \sqrt{\left(\frac{\mu_o}{\delta_o} p \right)^2 + p^2 + \cos^2\theta}$$

$$1 = p^2\left(\frac{\mu_o{}^2}{\delta_o{}^2}+1\right)+\cos^2\theta$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikten

$$1-\cos^2\theta = p^2\left(\frac{\mu_o{}^2+\delta_o{}^2}{\delta_o{}^2}\right)$$

$$p^2 = \frac{\delta_o{}^2\sin^2\theta}{\mu_o{}^2+\delta_o{}^2}$$

$$p = \frac{\delta_o}{\sqrt{\mu_o{}^2+\delta_o{}^2}}\sin\theta$$

yazılabilir. Elde edilen bu eşitlik (3.1.3) eşitliğindeki $\vec{d}_{Y_o}$ vektöründe yerine yazılırsa

$$\vec{d}_{Y_o} = \frac{\mu_o}{\sqrt{\mu_o{}^2+\delta_o{}^2}}\sin\theta\vec{D}_o+\frac{\delta_o}{\sqrt{\mu_o{}^2+\delta_o{}^2}}\sin\theta\vec{U}+\cos\theta\vec{Y}_o \qquad (3.1.4)$$

elde edilir. $\vec{d}_{Y_o}$ vektörü sabit vektör olduğundan $\vec{d}_{Y_o}{}' = \vec{0}$ dır. Bu durumda (3.1.4) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\vec{0} = \left(\frac{\mu_o}{\sqrt{\mu_o{}^2+\delta_o{}^2}}\right)'\sin\theta\vec{D}_o+\frac{\mu_o}{\sqrt{\mu_o{}^2+\delta_o{}^2}}\sin\theta\vec{D}_o{}'+\left(\frac{\delta_o}{\sqrt{\mu_o{}^2+\delta_o{}^2}}\right)'\sin\theta\vec{U}$$
$$+\frac{\delta_o}{\sqrt{\mu_o{}^2+\delta_o{}^2}}\sin\theta\vec{U}'+\cos\theta\vec{Y}_o{}'$$

bulunur. Bu eşitlikte gerekli türev alma işlemleri yapılıp, $OD-$ çatısının türev formülleri yerine yazılarak

$$\vec{d}_{Y_o}{}' = \frac{\delta_o\sin\theta\left(\mu_o{}'\delta_o-\delta_o{}'\mu_o\right)}{\left(\mu_o{}^2+\delta_o{}^2\right)^{3/2}}\vec{D}_o+\frac{\mu_o}{\sqrt{\mu_o{}^2+\delta_o{}^2}}\sin\theta\left(-\delta_o\vec{Y}_o\right)+\frac{\mu_o\sin\theta\left(\delta_o{}'\mu_o-\mu_o{}'\delta_o\right)}{\left(\mu_o{}^2+\delta_o{}^2\right)^{3/2}}\vec{U}$$
$$+\frac{\delta_o}{\sqrt{\mu_o{}^2+\delta_o{}^2}}\sin\theta\left(\mu_o\vec{Y}_o\right)+\cos\theta\left(\delta_o\vec{D}_o-\mu_o\vec{U}\right)$$

bulunur ve buradan

$$\vec{0}=\left(\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)'\frac{\delta_o^{\,3}}{\left(\mu_o^{\,2}+\delta_o^{\,2}\right)^{3/2}}\sin\theta+\delta_o\cos\theta\right)\vec{D}_o+\left(-\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)'\frac{\delta_o^{\,2}\mu_o}{\left(\mu_o^{\,2}+\delta_o^{\,2}\right)^{3/2}}\sin\theta-\mu_o\cos\theta\right)\vec{U}$$

elde edilir. $\vec{D}_o$ ve $\vec{U}$ vektörleri birbirine dik vektörler olduğundan bu eşitliğin sağlanabilmesi için

$$\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)'\frac{\delta_o^{\,3}}{\left(\mu_o^{\,2}+\delta_o^{\,2}\right)^{3/2}}\sin\theta+\delta_o\cos\theta=0 \text{ ve } -\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)'\frac{\delta_o^{\,2}\mu_o}{\left(\mu_o^{\,2}+\delta_o^{\,2}\right)^{3/2}}\sin\theta-\mu_o\cos\theta=0$$

olması gerekir. Bu eşitliklerden

$$\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)'\frac{\delta_o^{\,3}}{\left(\mu_o^{\,2}+\delta_o^{\,2}\right)^{3/2}}\sin\theta=-\delta_o\cos\theta,$$

$$\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)'\frac{\delta_o^{\,2}}{\left(\mu_o^{\,2}+\delta_o^{\,2}\right)^{3/2}}=-\cot\theta$$

bulunur. Burada θ açısı sabit olduğundan

$$\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)'\frac{\delta_o^{\,2}}{\left(\mu_o^{\,2}+\delta_o^{\,2}\right)^{3/2}}=-\cot\theta=sabit$$

elde edilir. Bu ifade $\sigma_{Y_o}(s)=\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)'\frac{\delta_o^{\,2}}{\left(\mu_o^{\,2}+\delta_o^{\,2}\right)^{3/2}}(s)=sabit$ biçiminde gösterilebilir.

Tersine $\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)'\frac{\delta_o^{\,2}}{\left(\mu_o^{\,2}+\delta_o^{\,2}\right)^{3/2}}=-\cot\theta=sabit$ olsun.

Buradan $\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)'\frac{\delta_o^{\,3}}{\left(\mu_o^{\,2}+\delta_o^{\,2}\right)^{3/2}}\sin\theta=-\delta_o\cos\theta$ yazılabilir. Şimdi θ sabit bir açı olmak üzere bir $\vec{d}_{Y_o}=\frac{\mu_o}{\sqrt{\mu_o^{\,2}+\delta_o^{\,2}}}\sin\theta\vec{D}_o+\frac{\delta_o}{\sqrt{\mu_o^{\,2}+\delta_o^{\,2}}}\sin\theta\vec{U}+\cos\theta\vec{Y}_o$ vektörünü ele

alalım. Alınan $\vec{d}_{Y_o}$ vektörüne, $\vec{Y}_o$ vektörü ile iç çarpım uygulanırsa $\left\langle \vec{Y}_o, \vec{d}_{Y_o} \right\rangle = \cos\theta = sabit$ elde edilir. $\vec{d}_{Y_o}$ vektörünün türevi alınırsa,

$$\vec{d}_{Y_o}{}' = \left(\frac{\mu_o}{\sqrt{\mu_o{}^2 + \delta_o{}^2}} \right)' \sin\theta \vec{D}_o + \frac{\mu_o}{\sqrt{\mu_o{}^2 + \delta_o{}^2}} \sin\theta \vec{D}_o{}' + \left(\frac{\delta_o}{\sqrt{\mu_o{}^2 + \delta_o{}^2}} \right)' \sin\theta \vec{U} + \frac{\delta_o}{\sqrt{\mu_o{}^2 + \delta_o{}^2}} \sin\theta \vec{U}' + \cos\theta \vec{Y}_o{}'$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli türev alma işlemleri yapılıp, türev formülleri yerine yazılırsa

$$\vec{d}_{Y_o}{}' = \left(\left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \frac{\delta_o{}^3}{\left(\mu_o{}^2 + \delta_o{}^2 \right)^{3/2}} \sin\theta + \delta_o \cos\theta \right) \vec{D}_o + \left(-\left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \frac{\delta_o{}^2 \mu_o}{\left(\mu_o{}^2 + \delta_o{}^2 \right)^{3/2}} \sin\theta - \mu_o \cos\theta \right) \vec{U}$$

bulunur. Bulunan bu eşitlikte $\left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \frac{\delta_o{}^3}{\left(\mu_o{}^2 + \delta_o{}^2 \right)^{3/2}} \sin\theta = -\delta_o \cos\theta$ ifadesi yerine yazılırsa $\vec{d}_{Y_o}{}' = \vec{0}$ elde edilir. O halde $\vec{d}_{Y_o}$ vektörü sabittir. α eğrisinin $OD-$ çatısının $\vec{Y}_o$ vektörü, sabit $\vec{d}_{Y_o}$ vektörü ile sabit açı yaptığından Tanım (3.1.1) gereği α eğrisi $Y_o -$Darboux slant helistir.

Sonuç 3.1.3: α eğrisinin $OD-$ çatısına göre $Y_o -$Darboux slant helis ekseni

$$\vec{d}_{Y_o} = \frac{\mu_o}{\sqrt{\mu_o{}^2 + \delta_o{}^2}} \sin\theta \vec{D}_o + \frac{\delta_o}{\sqrt{\mu_o{}^2 + \delta_o{}^2}} \sin\theta \vec{U} + \cos\theta \vec{Y}_o$$

biçimindedir.

Sonuç 3.1.4: α eğrisi $\sigma_{Y_o}(s) = 0$ olacak biçimde bir $Y_o -$Darboux slant helis ise α eğrisi $D_o -$Darboux slant helistir.

İspat: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, $\sigma_{Y_o}(s) = 0$ olacak biçimde bir $Y_o -$Darboux slant helis olsun. Bu durumda (3.1.1)

eşitliğinden $\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{{\delta_o}^2}{\left({\mu_o}^2+{\delta_o}^2\right)^{3/2}}=0$ bulunur. $\delta_o \neq 0$ ve $\mu_o \neq 0$ olduğundan bu eşitliğin sağlanabilmesi için $\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)'=0$ olması gerekir. O halde $\frac{\mu_o}{\delta_o}=sabit$ elde edilir. Elde edilen bu ifade Teorem 2.3.4 gereğince, α eğrisinin D_o-Darboux slant helis olduğunu gösterir.

Sonuç 3.1.5: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve Darboux çatısının eğrilikleri k_n, k_g ve τ_g olsun. α eğrisinin Y_o- Darboux slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_{Y_o}(s)=\frac{\left(\frac{{k_n}^2}{{k_n}^2+{\tau_g}^2}\left(\frac{\tau_g}{k_n}\right)'+k_g\right)^2}{\left(\left(\frac{{k_n}^2}{{k_n}^2+{\tau_g}^2}\left(\frac{\tau_g}{k_n}\right)'+k_g\right)^2+{k_n}^2+{\tau_g}^2\right)^{3/2}}\left(\frac{\sqrt{{k_n}^2+{\tau_g}^2}}{\frac{{k_n}^2}{{k_n}^2+{\tau_g}^2}\left(\frac{\tau_g}{k_n}\right)'+k_g}\right)'(s) \quad (3.1.5)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

İspat: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, Y_o- Darboux slant helis olsun. (3.1.1) denkleminde $\mu_o=\sqrt{{k_n}^2+{\tau_g}^2}$ ve $\delta_o=\left(\frac{{k_n}^2}{{k_n}^2+{\tau_g}^2}\right)\left(\frac{\tau_g}{k_n}\right)'+k_g$ eşitlikleri yerine yazılırsa yukarıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.6: α eğrisinin Y_o- Darboux slant helisin ekseninin Darboux çatı elemanları cinsinden eşiti

$$\vec{d}_{Y_o}=\left(\frac{\tau_g}{\sqrt{\left(\frac{{k_n}^2}{{k_n}^2+{\tau_g}^2}\left(\frac{\tau_g}{k_n}\right)'+k_g\right)^2+{k_n}^2+{\tau_g}^2}}\sin\theta-\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}\cos\theta\right)\vec{T}$$

$$+\left(\frac{\frac{k_n^{\,2}}{k_n^{\,2}+\tau_g^{\,2}}\left(\frac{\tau_g}{k_n}\right)'+k_g}{\sqrt{\left(\frac{k_n^{\,2}}{k_n^{\,2}+\tau_g^{\,2}}\left(\frac{\tau_g}{k_n}\right)'+k_g\right)^2+k_n^{\,2}+\tau_g^{\,2}}}\sin\theta\right)\vec{U}$$

$$-\left(\frac{k_n}{\sqrt{\left(\frac{k_n^{\,2}}{k_n^{\,2}+\tau_g^{\,2}}\left(\frac{\tau_g}{k_n}\right)'+k_g\right)^2+k_n^{\,2}+\tau_g^{\,2}}}\sin\theta+\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}\cos\theta\right)\vec{V} \quad (3.1.6)$$

biçimindedir.

İspat: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I\subset IR\to M$ bu yüzey üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin $OD-$çatısı $\left\{\vec{D}_o,\vec{U},\vec{Y}_o\right\}$ ve eğrilikleri δ_o,μ_o olan Y_o- Darboux slant helis olsun. $\vec{Y}_o=\vec{D}_o\times\vec{U}$ eşitliğinde, $\vec{D}_o$ vektörünün Darboux vektörleri cinsinden $\vec{D}_o=\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}\vec{T}-\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}\vec{V}$ eşiti kullanılarak

$$\vec{Y}_o=\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}\left(\vec{T}\times\vec{U}\right)-\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}\left(\vec{V}\times\vec{U}\right)$$

$$\vec{Y}_o=-\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}\vec{T}-\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}\vec{V}$$

yazılabilir. $\vec{Y}_o$ ve $\vec{D}_o$ vektörleri (3.1.4) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\vec{d}_{Y_o}=\frac{\mu_o}{\sqrt{\mu_o^{\,2}+\delta_o^{\,2}}}\sin\theta\left(\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}\vec{T}-\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}\vec{V}\right)+\frac{\delta_o}{\sqrt{\mu_o^{\,2}+\delta_o^{\,2}}}\sin\theta\vec{U}$$
$$+\cos\theta\left(-\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}\vec{T}-\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}\vec{V}\right)$$

$$\vec{d}_{Y_o}=\left(\frac{\mu_o}{\sqrt{{\mu_o}^2+{\delta_o}^2}}\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}\sin\theta-\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}\cos\theta\right)\vec{T}+\frac{\delta_o}{\sqrt{{\mu_o}^2+{\delta_o}^2}}\sin\theta\vec{U}$$
$$+\left(-\frac{\mu_o}{\sqrt{{\mu_o}^2+{\delta_o}^2}}\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}\sin\theta-\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}}\cos\theta\right)\vec{V}$$

eşitliği bulunur. Burada $\mu_o=\sqrt{\tau_g^2+k_n^2}$ ve $\delta_o=\frac{{k_n}^2}{{k_n}^2+{\tau_g}^2}\left(\frac{\tau_g}{k_n}\right)'+k_g$ eşitlikleri yerine yazılırsa (3.1.6) eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.1.7: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha:I\subset IR\to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, $OD-$çatısı $\left\{\vec{D}_o,\vec{U},\vec{Y}_o\right\}$ ve eğrilikleri δ_o,μ_o olan Y_o- Darboux slant helis olsun. Bu durumda,

i) α, M yüzeyi üzerinde $k_g\neq 0$ olan bir asimptotik eğri ise α $\vec{d}_{Y_o}=\frac{\tau\sin\theta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{T}-\cos\theta\vec{N}+\frac{\kappa\sin\theta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{B}$ eksenli bir slant helistir.

ii) α, M yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi ise α eğrisi $\vec{d}_{Y_o}=-\cos\theta\vec{T}+\sin\theta\vec{B}$ eksenli bir helistir.

İspat: i) α asimptotik eğri olsun. O halde Teorem 2.2.12 gereği $k_n=0$ dır. Bu durumda (2.1) eşitlikleri kullanılarak $k_g=\mp\kappa$ ve $\tau_g=\tau$ ifadeleri elde edilir. α, Y_o- Darboux slant helis olduğundan elde edilen bu eşitlikler (3.1.5) de yerine yazılırsa $\sigma_{Y_o}=\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\frac{\kappa^2}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}}=sabit$ bulunur. Bu durumda Teorem 2.1.20 gereğince α bir slant helistir. Ayrıca Tanım 2.2.18 de verilen Darboux çatısı ile Frenet çatısı arasındaki ilişkiler (2.1) deki eşitlikler ve bulunan bu değerler (3.1.6) da kullanılırsa, Y_o- Darboux slant helisin Frenet çatısının vektörleri cinsinden ekseni

$$\vec{d}_{Y_o}=\frac{\tau\sin\theta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{T}+\frac{\kappa\sin\theta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{U}-\cos\theta\vec{V},$$

$$\vec{d}_{Y_o}=\frac{\tau\sin\theta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{T}+\frac{\kappa\sin\theta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(\sin\phi\,\vec{N}+\cos\phi\,\vec{B}\right)-\cos\theta\left(\cos\phi\,\vec{N}-\sin\phi\,\vec{B}\right),$$

$$\vec{d}_{Y_o} = \frac{\tau \sin\theta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{T} + \left(\frac{\kappa \sin\theta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} \frac{k_n}{\kappa} - \cos\theta \frac{k_g}{\kappa} \right)\vec{N} + \left(\frac{\kappa \sin\theta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} \frac{k_g}{\kappa} + \cos\theta \frac{k_n}{\kappa} \right)\vec{B},$$

$$\vec{d}_{Y_o} = \frac{\tau \sin\theta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{T} - \cos\theta\vec{N} + \frac{\kappa \sin\theta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{B}$$

şeklinde olur.

ii) α M yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi ise Teorem 2.2.12 gereği $\tau_g = 0$ dır. Bu eşitlik (3.1.5) de kullanılırsa

$$\sigma_{Y_o}(s) = \left(\left(\frac{k_n}{k_g} \right)' \frac{{k_g}^2}{\left({k_n}^2 + {k_g}^2 \right)^{3/2}} \right)(s) = sabit \tag{3.1.7}$$

elde edilir. Ayrıca (2.1) eşitliklerinden $\tau = \phi'$, $\frac{k_n}{k_g} = \tan\phi$ ve ${k_n}^2 + {k_g}^2 = \kappa^2$ yazılabilir. Elde edilen bu ifadeler (3.1.7) de yerine yazılırsa $\sigma_{Y_o} = (\tan\phi)' \frac{\kappa^2 \cos^2\phi}{\kappa^3}$ bulunur. Bu eşitlikte türev alma işlemi yapıldığında, $\sigma_{Y_o} = \phi' \frac{1}{\cos^2\phi} \frac{\cos^2\phi}{\kappa}$ elde edilir. Buradan $\sigma_{Y_o}(s) = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}(s) = sabit$ bulunur. Teorem (2.2.18) gereği α eğrisi bir helis eğrisidir. Ayrıca $\tau_g = 0$ eşitliği (3.1.6) da kullanılırsa, $Y_o -$Darboux slant helisin ekseni

$$\vec{d}_{Y_o} = (-\cos\theta)\vec{T} + \frac{k_g}{\sqrt{{k_n}^2 + {k_g}^2}} \sin\theta\vec{U} + \left(-\frac{k_n}{\sqrt{{k_n}^2 + {k_g}^2}} \sin\theta \right)\vec{V} \tag{3.1.8}$$

biçiminde elde edilir. Bulunan bu eşitlikte Tanım 2.2.18 de verilen Darboux çatısı ile Frenet çatısı arasındaki ilişkiler ve (2.1) deki eşitlikler yerine yazıldığında,

$$\vec{d}_{Y_o} = (-\cos\theta)\vec{T} + \cos\phi\sin\theta\left(\sin\phi\vec{N} + \cos\phi\vec{B}\right) - \sin\phi\sin\theta\left(\cos\phi\vec{N} - \sin\phi\vec{B}\right),$$

$$\begin{aligned}\vec{d}_{Y_o} = {} & (-\cos\theta)\vec{T} + (\cos\phi\sin\phi\sin\theta - \cos\phi\sin\phi\sin\theta)\vec{N} \\ & + \left(\cos^2\phi\sin\theta + \sin^2\phi\sin\theta\right)\vec{B}\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu eşitlikten, Y_o – Darboux slant helisin Frenet çatısının vektörleri cinsinden ekseni

$$\vec{d}_{Y_o} = -\cos\theta\vec{T} + \sin\theta\vec{B}$$

biçiminde elde edilir.

Örnek 3.1.8: M yüzeyi, $u > 0$ olmak üzere $X(u,v) = (u, u\sin v, u\cos v)$

parametrizasyonu ile verilen bir koni yüzeyi olsun. $u = \frac{s}{\sqrt{3}}(s > 0)$ ve $v = \ln\frac{s}{3}$ alınarak M yüzeyi üzerinde

$$\alpha(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}}\sin\left(\ln\frac{s}{3}\right), \frac{s}{\sqrt{3}}\cos\left(\ln\frac{s}{3}\right)\right)$$

eğrisi elde edilir.

$$\alpha(s)' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin\left(\ln\frac{s}{3}\right) + \cos\left(\ln\frac{s}{3}\right)\right), \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\ln\frac{s}{3}\right) - \sin\left(\ln\frac{s}{3}\right)\right)\right)$$

ve $\left\|\alpha(s)'\right\| = 1$ olduğundan α eğrisi birim hızlıdır. Şimdi bu eğrinin Darboux çatı elemanlarını elde edelim. α eğrisi birim hızlı eğri olduğundan, $\vec{T}(s) = \alpha(s)'$ eşitliği kullanılarak

$\vec{T}(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin\left(\ln\frac{s}{3}\right) + \cos\left(\ln\frac{s}{3}\right)\right), \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\ln\frac{s}{3}\right) - \sin\left(\ln\frac{s}{3}\right)\right)\right)$ elde edilir.

$\vec{X}_u = (1, \sin v, \cos v)$ ve $\vec{X}_v = (0, u\cos v, -u\sin v)$ eşitliklerinden

$$\vec{X}_u \times \vec{X}_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & \sin v & \cos v \\ 0 & u\cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = (-u, u\sin v, u\cos v),\ \left\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\right\| = \sqrt{2}u$$

bulunur. Bu eşitliklerden yüzeyin birim normal vektör alan $\vec{U} = \frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{\left\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, \sin v, \cos v)$ elde edilir. Böylece yüzeyin normalinin eğriye

kısıtlanmış vektörü $\vec{U}_\alpha(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1,\sin\left(\ln\frac{s}{3}\right),\cos\left(\ln\frac{s}{3}\right)\right)$ biçiminde elde edilir. Elde edilen $\vec{T}(s)$ ve $\vec{U}_\alpha(s)$ vektörleri $\vec{V}(s)=\vec{U}_\alpha(s)\times\vec{T}(s)$ eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\vec{V}(s)=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-1,2\cos\left(\ln\frac{s}{3}\right)-\sin\left(\ln\frac{s}{3}\right),-\cos\left(\ln\frac{s}{3}\right)-2\sin\left(\ln\frac{s}{3}\right)\right)$$

elde edilir. Eğrinin Darboux çatısına bağlı eğriliklerini bulalım. Bu durumda

$\alpha(s)''=\frac{1}{\sqrt{3}s}\left(0,\cos\left(\ln\frac{s}{3}\right)-\sin\left(\ln\frac{s}{3}\right),-\cos\left(\ln\frac{s}{3}\right)-\sin\left(\ln\frac{s}{3}\right)\right)$ ve

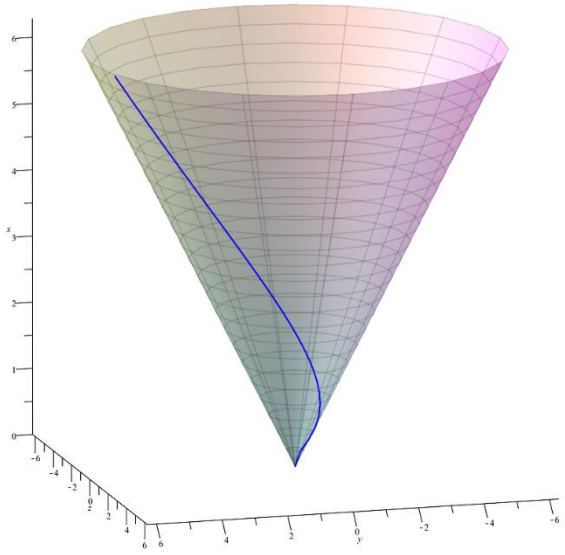
$\vec{U}_\alpha(s)'=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(0,\frac{1}{s}\cos\left(\ln\frac{s}{3}\right),-\frac{1}{s}\sin\left(\ln\frac{s}{3}\right)\right)$ şeklinde bulunan eşitlikler kullanılarak,

$$k_n=\left\langle\alpha'',\vec{U}_\alpha\right\rangle=-\frac{1}{\sqrt{6}s},$$

$$k_g=\left\langle\alpha'',\vec{V}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}s},$$

$$\tau_g=-\left\langle\vec{U}_\alpha{}',\vec{V}\right\rangle=-\frac{1}{\sqrt{3}s}$$

Darboux çatısının eğrilikleri elde edilir. Bu eşitlikler sonuç 3.1.5 de yerine yazılırsa $\sigma_{Y_o}(s)=0=sabit$ olduğundan α eğrisi M yüzeyi üzerinde bir Y_o-Darboux slant helistir. Sonuç 3.1.4 gereği α eğrisi M yüzeyi üzerinde bir D_o- Darboux slant helistir. Grafiği Şekil 3.1.8 de verilmiştir.



Şekil 3.1.8: $X(u,v)=(u,u\sin v,u\cos v)$ yüzeyi üzerinde

$$\alpha(s)=\left(\frac{s}{\sqrt{3}},\frac{s}{\sqrt{3}}\sin\left(\ln\frac{s}{3}\right),\frac{s}{\sqrt{3}}\cos\left(\ln\frac{s}{3}\right)\right)$$

3.2: Yüzey Üzerinde Oskülatör Darboux Çatısına Göre Küresel Gösterge Eğrileri

Bu bölümde $OD-$ çatısının $\vec{D}_o,\vec{U}$ ve $\vec{Y}_o$ birim vektör alanlarının küresel gösterge eğrileri tanımlanıp, tanımlanan bu eğrilerin Frenet çatı elemanlarının $OD-$ çatısı cinsinden eşitleri bulunacaktır. $OD-$ çatısının eğrilikleri $\delta_o\neq 0,\ \mu_o\neq 0$ dır.

3.2.1: D_o Küresel Gösterge Eğrisi

Tanım 3.2.1.1: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I\subset IR\to M$ bu yüzey üzerinde kalan bir birim hızlı eğri olsun. α eğrisinin $OD-$ çatısı $\left\{\vec{D}_o,\vec{U},\vec{Y}_o\right\}$ ve eğrilikleri δ_o,μ_o olmak üzere, α eğrisi çizilirken tüm $\vec{D}_o$ vektörleri orijine taşınırsa birim küre yüzeyi üzerinde meydana gelen eğriye, α eğrisinin D_o küresel gösterge eğrisi denir. α eğrisinin D_o küresel gösterge eğrisinin denklemi $\alpha_{D_o}=\vec{D}_o$ biçimindedir. D_o küresel

gösterge eğrisinin yay parametresi s_o olmak üzere $s_o \neq s$ ve yay parametresi $ds_o = \left\| \vec{D}_o' \right\| ds$ dir. Burada türev alma işlemlerinde s parametresine göre türev "$'$" ve s_o parametresine göre türev "$\square$"sembolü ile gösterilecektir.

Teorem 3.2.1.2: M, E^3 de bir yüzey, $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve $\alpha_{D_o} = \vec{D}_o$, D_o küresel gösterge eğrisi olsun. α eğrisinin $OD-$ çatı elemanları $\left\{ \vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o, \delta_o, \mu_o \right\}$ ve D_o küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanları $\left\{ \vec{T}_{D_o}, \vec{N}_{D_o}, \vec{B}_{D_o}, \kappa_{D_o}, \tau_{D_o} \right\}$ olmak üzere, D_o küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanlarının $OD-$ çatı elemanları cinsinden eşiti aşağıdaki biçimdedir.

$$\vec{T}_{D_o} = \mp \vec{Y}_o,$$

$$\vec{N}_{D_o} = \mp \frac{|\delta_o|}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{D}_o + \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{U},$$

$$\vec{B}_{D_o} = \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{D}_o + \frac{|\delta_o|}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{U},$$

$$\kappa_{D_o} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)^2} = \frac{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}}{|\delta_o|}, \qquad \tau_{D_o} = \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \frac{|\delta_o|}{\left(\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2} \right)}$$

İspat: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve α eğrisinin D_o küresel gösterge eğrisi α_{D_o} olsun. O halde Tanım 3.2.1.1 gereği

$$\alpha_{D_o}(s_o) = \vec{D}_o(s)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanının s_o parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha_{D_o}}{ds_o} = \frac{d\vec{D}_o}{ds_o}$$

elde edilir. Bu eşitlikte zincir kuralı uygulanıp, $OD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa,

$$\frac{d\alpha_{D_o}}{ds_o} = \frac{d\vec{D}_o}{ds}\frac{ds}{ds_o},$$

$$\vec{T}_{D_o} = \vec{D}_o{}' \frac{ds}{ds_o},$$

$$\vec{T}_{D_o} = \left(-\delta_o \vec{Y}_o\right)\frac{ds}{ds_o} \tag{3.2.1}$$

bulunur. $\vec{T}_{D_o}$ birim vektör olduğundan $\left\|\vec{T}_{D_o}\right\| = 1$ dir. (3.2.1) eşitliğinin her iki tarafının normu alındığında $1 = |\delta_o|\frac{ds}{ds_o}$ bulunur. Bu eşitlikten $\frac{ds}{ds_o} = \frac{1}{|\delta_o|}$ elde edilir. Bulunan bu ifade (3.2.1) de yerine yazılırsa

$$\vec{T}_{D_o} = \mp\vec{Y}_o$$

elde edilir. Burada

$$\vec{T}_{D_o} = -\vec{Y}_o \tag{3.2.2}$$

tercih edilerek işlemlere devam edilecektir. α eğrisinin D_o küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının birinci eğriliği $\kappa_{D_o} = \left\|\dot{\vec{T}}_{D_o}\right\|$ eşitliğinden aşağıdaki biçimde bulunur. (3.2.2) eşitliğinin her iki tarafının s_o parametresine göre türevi alındığında $\frac{d\vec{T}_{D_o}}{ds_o} = -\frac{d\vec{Y}_o}{ds_o}$ eşitliği elde edilir. Bulunan bu eşitlikte zincir kuralı uygulanıp, $OD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{T}}_{D_o} = -\frac{d\vec{Y}_o}{ds}\frac{ds}{ds_o}$$

$$= -\vec{Y}_o{}' \frac{ds}{ds_o} = -\left(\delta_o \vec{D}_o - \mu_o \vec{U}\right)\frac{1}{|\delta_o|}$$

$$= \mp\vec{D}_o + \frac{\mu_o}{|\delta_o|}\vec{U} \tag{3.2.3}$$

elde edilir. (3.2.3) eşitliğinin normu alındığında

$$\kappa_{D_o} = \left\| \dot{\vec{T}}_{D_o} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)^2} = \frac{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}}{|\delta_o|} \tag{3.2.4}$$

bulunur. Benzer şekilde α eğrisinin D_o küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının asli normal vektörü

$$\vec{N}_{D_o} = \frac{1}{\kappa_{D_o}} \dot{\vec{T}}_{D_o}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte (3.2.3) ve (3.2.4) de bulunan ifadeler yerine yazılırsa

$$\vec{N}_{D_o} = \frac{|\delta_o|}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \left(\mp \vec{D}_o + \frac{\mu_o}{|\delta_o|} \vec{U} \right)$$

$$= \mp \frac{|\delta_o|}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{D}_o + \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{U}$$

elde edilir. Burada

$$\vec{N}_{D_o} = -\frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{D}_o + \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{U} \tag{3.2.5}$$

tercih edilmiştir. Son olarak α eğrisinin D_o küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının binormal vektör alanı $\vec{B}_{D_o} = \vec{T}_{D_o} \times \vec{N}_{D_o}$ yazılabilir. Bu eşitlikte (3.2.5) ve (3.2.2) deki ifadeler yerine yazılırsa

$$\vec{B}_{D_o} = \mp \vec{Y}_o \times \left(\mp \frac{|\delta_o|}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{D}_o + \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{U} \right),$$

$$\vec{B}_{D_o} = \frac{|\delta_o|}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \left(\vec{Y}_o \times \vec{D}_o \right) - \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \left(\vec{Y}_o \times \vec{U} \right),$$

$$\vec{B}_{D_o} = \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{D}_o + \frac{|\delta_o|}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{U} \tag{3.2.6}$$

şeklinde α eğrisinin D_o küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının binormal vektör alanı elde edilir. Şimdi α eğrisinin D_o küresel gösterge eğrisinin burulmasını $\tau_{D_o} = -\left\langle \dot{\vec{B}}_{D_o}, \vec{N}_{D_o} \right\rangle$ eşitliğinden bulalım. Burada $\vec{B}_{D_o} = \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{D}_o + \frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{U}$ alınarak işlemlere devam edilmiştir. $\vec{B}_{D_o}$ vektörünün s_o parametresine göre türevini alınırsa

$$\frac{d\vec{B}_{D_o}}{ds_o} = \frac{d\vec{B}_{D_o}}{ds} \frac{ds}{ds_o},$$

$$\dot{\vec{B}}_{D_o} = \vec{B}_{D_o}{}' \frac{1}{|\delta_o|},$$

$$\dot{\vec{B}}_{D_o} = \left(\frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{D}_o + \frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{U} \right)' \frac{1}{|\delta_o|}$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli türev alma işlemleri yapılıp, $OD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{B}}_{D_o} = \left(\frac{\mu_o' \sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}} - \frac{2\delta_o \delta_o' + 2\mu_o \mu_o'}{2\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \mu_o}{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}} \vec{D}_o + \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \left(-\delta_o \vec{Y}_o \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_o' \sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}} - \frac{2\delta_o \delta_o' + 2\mu_o \mu_o'}{2\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \delta_o}{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}} \vec{U} + \frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \left(\mu_o \vec{Y}_o \right) \right) \frac{1}{|\delta_o|}$$

$$\dot{\vec{B}}_{D_o} = \left(\frac{\mu_o' \delta_o^{\,2} - \delta_o \delta_o' \mu_o}{\left(\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2} \right)^{3/2}} \vec{D}_o + \frac{\delta_o' \mu_o^{\,2} - \delta_o \mu_o \mu_o'}{\left(\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2} \right)^{3/2}} \vec{U} \right) \frac{1}{|\delta_o|},$$

$$\dot{\vec{B}}_{D_o} = \left(\left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \frac{\delta_o^{\,3}}{\left(\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2} \right)^{3/2}} \vec{D}_o - \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \frac{\mu_o \delta_o^{\,2}}{\left(\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2} \right)^{3/2}} \vec{U} \right) \frac{1}{|\delta_o|},$$

$$\dot{\vec{B}}_{D_o} = \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{{\delta_o}^2}{\left({\delta_o}^2 + {\mu_o}^2\right)^{3/2}} \left(\delta_o \vec{D}_o - \mu_o \vec{U}\right) \frac{1}{|\delta_o|},$$

$$\dot{\vec{B}}_{D_o} = \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{|\delta_o|}{\left({\delta_o}^2 + {\mu_o}^2\right)^{3/2}} \left(\delta_o \vec{D}_o - \mu_o \vec{U}\right) \tag{3.2.7}$$

elde edilir. Bulunan $\dot{\vec{B}}_{D_o}$ vektörü ile $\vec{N}_{D_o}$ vektörü iç çarpım uygulanırsa

$$\left\langle \dot{\vec{B}}_{D_o}, \vec{N}_{D_o} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{|\delta_o|}{\left({\delta_o}^2 + {\mu_o}^2\right)^{3/2}} \left(\delta_o \vec{D}_o - \mu_o \vec{U}\right), -\frac{\delta_o}{\sqrt{{\delta_o}^2 + {\mu_o}^2}} \vec{D}_o + \frac{\mu_o}{\sqrt{{\delta_o}^2 + {\mu_o}^2}} \vec{U} \right\rangle,$$

$$\left\langle \dot{\vec{B}}_{D_o}, \vec{N}_{D_o} \right\rangle = \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{|\delta_o|}{\left({\delta_o}^2 + {\mu_o}^2\right)^2} \left(-{\delta_o}^2 - {\mu_o}^2\right),$$

$$\left\langle \dot{\vec{B}}_{D_o}, \vec{N}_{D_o} \right\rangle = -\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{|\delta_o|}{\left({\delta_o}^2 + {\mu_o}^2\right)}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik $\tau_{D_o} = -\left\langle \dot{\vec{B}}_{D_o}, \vec{N}_{D_o} \right\rangle$ eşitliğinde yazıldığında α eğrisinin D_o küresel gösterge eğrisinin burulması

$$\tau_{D_o} = \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{|\delta_o|}{\left({\delta_o}^2 + {\mu_o}^2\right)} \tag{3.2.8}$$

şeklinde elde edilir. Böylece α eğrisinin D_o küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanlarının $OD-$ çatı elemanları cinsinden eşitlikleri elde edilmiş olur.

Sonuç 3.2.1.3: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir $D_o -$ Darboux slant helis ise α_{D_o}, D_o küresel gösterge eğrisi çember ya da çember parçasıdır.

İspat: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir $D_o -$ Darboux slant helis olsun. Bu durumda Teorem 2.3.4 gereği $\frac{\mu_o}{\delta_o} = sabittir.$ Bu eşitlik (3.2.4) ve (3.2.8) de dikkate alınırsa

$$\tau_{D_o} = \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{\delta_o}{\left(\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}\right)} = 0,\ \kappa_{D_o} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)^2} = sabit$$

elde edilir. Bu eşitliklere dayanarak D_o küresel gösterge eğrisinin çember ya da çember parçası olduğunu söyleyebiliriz.

Sonuç 3.2.1.4: α_{D_o}, D_o küresel gösterge eğrisi bir helis eğrisi ise α eğrisi bir $Y_o -$ Darboux slant helistir.

İspat: α_{D_o}, D_o küresel gösterge eğrisi bir helis eğrisi olsun. Bu durumda Teorem 2.2.18 den $\frac{\tau_{D_o}}{\kappa_{D_o}} = sabit$ olur. (3.2.4) ve (3.2.8) eşitliğinde bulunan değerler yerine yazılırsa

$$\frac{\tau_{D_o}}{\kappa_{D_o}} = \frac{\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{\delta_o}{\left(\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}\right)}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)^2}}$$

$$= \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{\delta_o^{\,2}}{\left(\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}\right)^{3/2}} = sabit$$

elde edilir. Teorem 3.1.2 gereği α eğrisi bir $Y_o -$ Darboux slant helistir.

3.2.2: U Küresel Gösterge Eğrisi

Tanım 3.2.2.1: M, E^3 de bir yüzey, $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve $OD -$ çatısı $\left\{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o\right\}$, eğrilikleri δ_o, μ_o olan bir eğri olsun. α eğrisi çizilirken tüm $\vec{U}$ vektörleri orijine taşınırsa, birim küre yüzeyi üzerinde meydana gelen eğriye α eğrisinin U küresel gösterge eğrisi denir. α eğrisinin U küresel gösterge eğrisinin denklemi $\alpha_U = \vec{U}$ biçimindedir. U küresel gösterge eğrisinin yay parametresi s_u olmak üzere $s_u \neq s$ ve yay parametresi $ds_u = \left\|\vec{U}'\right\| ds$ dir.

Teorem 3.2.2.2: M, E^3 de bir yüzey, $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve $\alpha_U = \vec{U}$, U küresel gösterge eğrisi olsun. α eğrisinin $OD-$ çatı elemanları $\left\{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o, \delta_o, \mu_o\right\}$ ve α_U, U küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanları $\left\{\vec{T}_U, \vec{N}_U, \vec{B}_U, \kappa_U, \tau_U\right\}$ olmak üzere, U küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanlarının $OD-$ çatı elemanları cinsinden eşiti aşağıdaki biçimdedir.

$$\vec{T}_U = \vec{Y}_o,$$

$$\vec{N}_U = \frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{D}_o - \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{U},$$

$$\vec{B}_U = \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{D}_o + \frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}} \vec{U},$$

$$\kappa_U = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)^2}, \qquad \tau_U = -\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{\delta_o^{\,2}}{\mu_o\left(\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}\right)}$$

İspat: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin $OD-$ çatı elemanları $\left\{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o, \delta_o, \mu_o\right\}$ ve Frenet çatı elemanları $\left\{\vec{T}_U, \vec{N}_U, \vec{B}_U, \kappa_U, \tau_U\right\}$ olmak üzere α eğrisinin U küresel gösterge eğrisi α_U olsun. Bu durumda Tanım 3.2.2.1 gereği

$$\alpha_U\left(s_u\right) = \vec{U}\left(s\right)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanının s_u parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha_U}{ds_u} = \frac{d\vec{U}}{ds_u}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte zincir kuralı uygulanıp, $OD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa,

$$\frac{d\alpha_U}{ds_u} = \frac{d\vec{U}}{ds}\frac{ds}{ds_u},$$

$$\vec{T}_U = \vec{U}' \frac{ds}{ds_u},$$

$$\vec{T}_U = \left(\mu_o \vec{Y}_o\right) \frac{ds}{ds_u} \tag{3.2.9}$$

bulunur. $\vec{T}_U$ birim vektör olduğundan $\left\|\vec{T}_U\right\| = 1$ dir. (3.2.9) eşitliğinin her iki tarafının normu alındığında $1 = \left|\mu_o\right| \frac{ds}{ds_u}$ bulunur. Bu eşitlikten $\frac{ds}{ds_u} = \frac{1}{\left|\mu_o\right|}$ elde edilir. Bulunan eşitlik (3.2.9) da yerine yazılırsa

$$\vec{T}_U = \mp \vec{Y}_o$$

elde edilir. Bundan sonraki işlemler

$$\vec{T}_U = \vec{Y}_o \tag{3.2.10}$$

alınarak devam edilecektir. α_U, U küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının birinci eğriliği $\kappa_U = \left\|\dot{\vec{T}}_U\right\|$ yazılabilir. (3.2.10) eşitliğinin her iki tarafının s_u parametresine göre türevi alındığında $\frac{d\vec{T}_U}{ds_u} = \frac{d\vec{Y}_o}{ds_u}$ eşitliği elde edilir. Bulunan bu eşitlikte zincir kuralı uygulanıp, $OD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{T}}_U = \frac{d\vec{Y}_o}{ds} \frac{ds}{ds_u},$$

$$= \vec{Y}_o' \frac{ds}{ds_u} = \left(\delta_o \vec{D}_o - \mu_o \vec{U}\right) \frac{1}{\left|\mu_o\right|},$$

$$= \frac{\delta_o}{\left|\mu_o\right|} \vec{D}_o \pm \vec{U} \tag{3.2.11}$$

elde edilir. (3.2.11) eşitliğinin normu alındığında

$$\kappa_U = \left\|\dot{\vec{T}}_U\right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\delta_o}{\mu_o}\right)^2} = \frac{\sqrt{{\delta_o}^2 + {\mu_o}^2}}{\left|\mu_o\right|} \tag{3.2.12}$$

bulunur. Benzer şekilde α eğrisinin U küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının asli normal vektörü

$$\vec{N}_U = \frac{1}{\kappa_U}\dot{\vec{T}}_U$$

yazılabilir. (3.2.12) ve (3.2.11) de bulunan ifadeler bu eşitlikte yerine yazılırsa

$$\vec{N}_U = \frac{|\mu_o|}{\sqrt{\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}}}\left(\frac{\delta_o}{|\mu_o|}\vec{D}_o \pm \vec{U}\right),$$

$$= \frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}}}\vec{D}_o \pm \frac{|\mu_o|}{\sqrt{\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}}}\vec{U}$$

elde edilir. Burada

$$\vec{N}_U = \frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}}}\vec{D}_o - \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}}}\vec{U} \qquad (3.2.13)$$

alınarak işlemlere devam edilecektir. α eğrisinin U küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının binormal vektör alanı $\vec{B}_U = \vec{T}_U \times \vec{N}_U$ eşitliğinden bulunabilir. (3.2.10) ve (3.2.13) eşitlikleri bu ifade de yerine yazılırsa

$$\vec{B}_U = \vec{Y}_o \times \left(\frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}}}\vec{D}_o - \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}}}\vec{U}\right)$$

$$= \frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}}}\left(\vec{Y}_o \times \vec{D}_o\right) - \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}}}\left(\vec{Y}_o \times \vec{U}\right)$$

$$= \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}}}\vec{D}_o + \frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}}}\vec{U} \qquad (3.2.14)$$

şeklinde α eğrisinin U küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının binormal vektör alanı elde edilir. Şimdi α eğrisinin U küresel gösterge eğrisinin burulması $\tau_U = -\left\langle \dot{\vec{B}}_U, \vec{N}_U \right\rangle$ eşitliğinden elde edilir. $\vec{B}_U$ vektörünün s_u parametresine göre türevini alınırsa

$$\frac{d\vec{B}_U}{ds_u} = \frac{d\vec{B}_U}{ds}\frac{ds}{ds_u},$$

$$\dot{\vec{B}}_U = \vec{B}_U{}' \frac{1}{|\mu_o|},$$

$$\dot{\vec{B}}_U = \left(\frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2}} \vec{D}_o + \frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2}} \vec{U} \right)' \frac{1}{|\mu_o|}$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli türev alma işlemleri yapılıp, $OD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{B}}_U = \left(\frac{\mu_o' \sqrt{\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2} - \frac{2\delta_o\delta_o{}' + 2\mu_o\mu_o{}'}{2\sqrt{\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2}} \mu_o}{\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2} \vec{D}_o + \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2}} \left(-\delta_o \vec{Y}_o \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_o{}' \sqrt{\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2} - \frac{2\delta_o\delta_o{}' + 2\mu_o\mu_o{}'}{2\sqrt{\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2}} \delta_o}{\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2} \vec{U} + \frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2}} \left(\mu_o \vec{Y}_o \right) \right) \frac{1}{|\mu_o|},$$

$$= \left(\frac{\mu_o'\delta_o{}^2 - \delta_o\delta_o{}'\mu_o}{\left(\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2\right)^{3/2}} \vec{D}_o + \frac{\delta_o{}'\mu_o{}^2 - \delta_o\mu_o\mu_o'}{\left(\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2\right)^{3/2}} \vec{U} \right) \frac{1}{|\mu_o|},$$

$$= \left(\left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \frac{\delta_o{}^3}{\left(\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2\right)^{3/2}} \vec{D}_o - \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \frac{\mu_o\delta_o{}^2}{\left(\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2\right)^{3/2}} \vec{U} \right) \frac{1}{|\mu_o|},$$

$$\dot{\vec{B}}_U = \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \frac{\delta_o{}^2}{\left(\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2\right)^{3/2}} \left(\frac{\delta_o}{|\mu_o|} \vec{D}_o \mp \vec{U} \right)$$

elde edilir. Burada

$$\dot{\vec{B}}_U = \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \frac{\delta_o{}^2}{\left(\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2\right)^{3/2}} \left(\frac{\delta_o}{\mu_o} \vec{D}_o - \vec{U} \right) \tag{3.2.15}$$

alınabilir. Bulunan $\dot{\vec{B}}_U$ vektörü ile $\vec{N}_U$ vektörü iç çarpım uygulanırsa

$$\left\langle \dot{\vec{B}}_U, \vec{N}_U \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{\delta_o^{\,2}}{\left(\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}\right)^{3/2}} \left(\frac{\delta_o}{\mu_o}\vec{D}_o - \vec{U}\right), \frac{1}{\sqrt{\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}}}\left(\delta_o\vec{D}_o - \mu_o\vec{U}\right) \right\rangle,$$

$$\left\langle \dot{\vec{B}}_U, \vec{N}_U \right\rangle = \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{\delta_o^{\,2}}{\left(\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}\right)^{2}} \left(\frac{\delta_o^{\,2}}{\mu_o} + \mu_o\right)$$

$$= \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{\delta_o^{\,2}}{\mu_o\left(\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}\right)}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik $\tau_U = -\left\langle \dot{\vec{B}}_U, \vec{N}_U \right\rangle$ eşitliğinde yazıldığında α eğrisinin U küresel gösterge eğrisinin burulması

$$\tau_U = -\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{\delta_o^{\,2}}{\mu_o\left(\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}\right)} \tag{3.2.16}$$

şeklinde elde edilir. Böylece α eğrisinin U küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanlarının $OD-$ çatı elemanları cinsinden eşitlikleri elde edilmiş olur.

Sonuç 3.2.2.3: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir D_o – Darboux slant helis ise $\alpha_U(s_u) = \vec{U}(s)$, U küresel gösterge eğrisi çember ya da çember parçasıdır.

İspat: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir D_o – Darboux slant helis olsun. Bu durumda Teorem 2.3.4 gereği $\frac{\mu_o}{\delta_o} = sabittir.$ Bu eşitlik dikkate alındığında U küresel gösterge eğrisinin (3.2.12) ve (3.2.16) eşitliklerinde elde edilen birinci eğriliği ve burulması,

$$\kappa_U = \sqrt{1+\left(\frac{\delta_o}{\mu_o}\right)^2} = sabit,\ \tau_U = -\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{\delta_o^{\,2}}{\mu_o\left(\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}\right)} = 0$$

biçimindedir. Buradan α_U, U küresel gösterge eğrisinin çember ya da çember parçası olduğu görülür.

Sonuç 3.2.2.4: α_U, U küresel gösterge eğrisi helis bir eğrisi ise α eğrisi bir Y_o- Darboux slant helistir.

İspat: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri ve α_U, U küresel gösterge eğrisi bir helis eğrisi olsun. Teorem 2.1.18 gereği

$$\frac{\tau_U}{\kappa_U}=\frac{-\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)'\frac{\delta_o^{\,2}}{\mu_o\left(\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}\right)}}{\sqrt{1+\left(\frac{\delta_o}{\mu_o}\right)^2}}$$

$$=-\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)'\frac{\delta_o^{\,2}}{\left(\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}\right)^{3/2}}=sabit$$

elde edilir. O halde Teorem 3.1.2 gereği α eğrisi bir Y_o- Darboux slant helistir.

3.2.3: Y_o Küresel Gösterge Eğrisi

Tanım 3.2.3.1: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I\subset IR\to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, $OD-$çatısı $\left\{\vec{D}_o,\vec{U},\vec{Y}_o\right\}$ ve eğrilikleri δ_o,μ_o olan bir eğri olsun. α eğrisi çizilirken tüm $\vec{Y}_o$ vektörleri orijine bağlanırsa, birim küre yüzeyi üzerinde meydana gelen eğriye α eğrisinin Y_o küresel gösterge eğrisi denir. α eğrisinin Y_o küresel gösterge eğrisinin denklemi $\alpha_{Y_o}=\vec{Y}_o$ olur. Y_o küresel gösterge eğrisinin yay parametresi s_{Y_o} olmak üzere $s_{Y_o}\neq s$ ve yay parametresi $ds_{Y_o}=\left\|\vec{Y}_o'\right\|ds$ dir.

Teorem 3.2.3.2: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I\subset IR\to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri, $\alpha_{Y_o}=\vec{Y}_o$, Y_o küresel gösterge eğrisi olsun. α eğrisinin $OD-$çatı elemanları $\left\{\vec{D}_o,\vec{U},\vec{Y}_o,\delta_o,\mu_o\right\}$ ve α_{Y_o}, Y_o küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanları $\left\{\vec{T}_{Y_o},\vec{N}_{Y_o},\vec{B}_{Y_o},\kappa_{Y_o},\tau_{Y_o}\right\}$ olmak üzere, Y_o küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanlarının $OD-$ çatı elemanları cinsinden eşiti aşağıdaki biçimdedir.

$$\vec{T}_{Y_o} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}\vec{D}_o - \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\vec{U},$$

$$\vec{N}_{Y_o} = \frac{1}{\sqrt{1+g^2}}\left(-\frac{fg}{\sqrt{1+f^2}}\vec{D}_o - \frac{g}{\sqrt{1+f^2}}\vec{U} - \vec{Y}_o\right),$$

$$\vec{B}_{Y_o} = \frac{1}{\sqrt{1+g^2}}\left(\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\vec{D}_o + \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}\vec{U} - g\vec{Y}_o\right),$$

$$\kappa_{Y_o} = \sqrt{1+g^2},\ \tau_{Y_o} = -\frac{g'}{\delta_o\sqrt{1+f^2}\left(1+g^2\right)}.$$

Burada $\frac{\mu_o}{\delta_o} = f, \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{{\delta_o}^2}{\left({\delta_o}^2 + {\mu_o}^2\right)^{3/2}} = g$ kısaltmaları kullanılmıştır.

İspat: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri, α eğrisinin $OD-$ çatı elemanları $\left\{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o, \delta_o, \mu_o\right\}$ olmak üzere, α eğrisinin Y_o küresel gösterge eğrisi α_{Y_o} ve Y_o küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanları $\left\{\vec{T}_{Y_o}, \vec{N}_{Y_o}, \vec{B}_{Y_o}, \kappa_{Y_o}, \tau_{Y_o}\right\}$ olsun. Bu durumda Tanım 3.2.3.1 gereği $\alpha_{Y_o}\left(s_{Y_o}\right) = \vec{Y}_o\left(s\right)$ dır. Bu eşitliğin her iki yanının s_{Y_o} parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha_{Y_o}}{ds_{Y_o}} = \frac{d\vec{Y}_o}{ds_{Y_o}}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte zincir kuralı uygulanıp, $OD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\frac{d\alpha_{Y_o}}{ds_{Y_o}} = \frac{d\vec{Y}_o}{ds}\frac{ds}{ds_{Y_o}},$$

$$\vec{T}_{Y_o} = \vec{Y}_o{}'\frac{ds}{ds_{Y_o}},$$

$$\vec{T}_{Y_o} = \left(\delta_o \vec{D}_o - \mu_o \vec{U}\right)\frac{ds}{ds_{Y_o}} \tag{3.2.17}$$

bulunur. $\vec{T}_{Y_o}$ birim vektör olduğundan $\left\|\vec{T}_{Y_o}\right\| = 1$ dir. (3.2.17) eşitliğinin her iki tarafının normu alındığında $1 = \sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}\,\frac{ds}{ds_{Y_o}}$ bulunur. Bu eşitlikten $\frac{ds}{ds_{Y_o}} = \frac{1}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}}$ elde edilir. Bulunan eşitlik (3.2.17) de yerine yazılırsa

$$\vec{T}_{Y_o} = \frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}}\vec{D}_o - \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}}\vec{U} \tag{3.2.18}$$

vektörü elde edilir. α eğrisinin Y_o küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının birinci eğriliği $\kappa_{Y_o} = \left\|\dot{\vec{T}}_{Y_o}\right\|$ yazılabilir. (3.2.18) eşitliğinin her iki tarafının s_{Y_o} parametresine göre türevi alındığında $\dot{\vec{T}}_{Y_o} = \frac{d\vec{T}_{Y_o}}{ds_{Y_o}} = \frac{d\vec{T}_{Y_o}}{ds}\frac{ds}{ds_{Y_o}}$ eşitliği elde edilir. Bulunan bu eşitlikte gerekli türev alma işlemleri yapılıp, $OD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{T}}_{Y_o} = \left(\frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}}\vec{D}_o - \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}}\vec{U}\right)'\frac{ds}{ds_{Y_o}}$$

$$= \left(\left(\frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}}\right)'\vec{D}_o + \left(\frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}}\right)\left(-\delta_o \vec{Y}_o\right) - \left(\frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}}\right)'\vec{U}\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}}\right)\left(\mu_o \vec{Y}_o\right)\right)\frac{1}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}}$$

$$= \left(\frac{\delta_o'\mu_o^{\,2} - \mu_o'\mu_o\delta_o}{\left(\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}\right)^{3/2}}\vec{D}_o - \frac{\mu_o'\delta_o^{\,2} - \delta_o'\delta_o\mu_o}{\left(\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}\right)^{3/2}}\vec{U} - \sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}\vec{Y}_o\right)\frac{1}{\sqrt{\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}}}$$

$$= -\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)'\frac{\mu_o\delta_o^{\,2}}{\left(\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}\right)^2}\vec{D}_o - \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)'\frac{\delta_o^{\,3}}{\left(\delta_o^{\,2} + \mu_o^{\,2}\right)^2}\vec{U} - \vec{Y}_o \tag{3.2.19}$$

elde edilir. Elde edilen (3.2.19) eşitliğinin normu alındığında

$$\kappa_{Y_o} = \left\| \dot{\vec{T}}_{Y_o} \right\| = \sqrt{\left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)'^2 \frac{\mu_o{}^2 \delta_o{}^4 + \delta_o{}^6}{\left(\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2 \right)^4} + 1},$$

$$\kappa_{Y_o} = \sqrt{\left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)'^2 \frac{\delta_o{}^4}{\left(\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2 \right)^3} + 1} \tag{3.2.20}$$

eşitliği elde edilir. Bundan sonraki işlemlerde kolaylık olması için $\frac{\mu_o}{\delta_o} = f, \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \frac{\delta_o{}^2}{\left(\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2 \right)^{3/2}} = g$ kısaltmaları kullanılırsa,

$$\kappa_{Y_o} = \sqrt{1 + g^2} \tag{3.2.21}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca bu kısaltmalar (3.1.19) eşitliğinde de yapılırsa,

$$\dot{\vec{T}}_{Y_o} = -\frac{fg}{\sqrt{1+f^2}} \vec{D}_o - \frac{g}{\sqrt{1+f^2}} \vec{U} - \vec{Y}_o \tag{3.2.22}$$

yazılabilir. α eğrisinin Y_o Küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının asli normal vektörü

$$\vec{N}_{Y_o} = \frac{1}{\kappa_{Y_o}} \dot{\vec{T}}_{Y_o}$$

yazılabilir. (3.2.21) ve (3.2.22) de bulunan ifadeler bu eşitlikte yerine yazılırsa

$$\vec{N}_{Y_o} = \frac{1}{\sqrt{1+g^2}} \left(-\frac{fg}{\sqrt{1+f^2}} \vec{D}_o - \frac{g}{\sqrt{1+f^2}} \vec{U} - \vec{Y}_o \right) \tag{3.2.23}$$

elde edilir. α eğrisinin Y_o Küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının binormal vektör alanı $\vec{B}_{Y_o} = \vec{T}_{Y_o} \times \vec{N}_{Y_o}$ yazılabilir. $\frac{\mu_o}{\delta_o} = f, \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \frac{\delta_o{}^2}{\left(\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2 \right)^{3/2}} = g$ kısaltmaları (3.2.18) deki eşitlikte de kullanılırsa

$$\vec{T}_{Y_o} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}} \vec{D}_o - \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \vec{U} \tag{3.2.24}$$

bulunur. O halde (3.2.24) ve (3.2.23) eşitliklerinden

$$\vec{B}_{Y_o} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+f^2}} \vec{D}_o - \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \vec{U} \right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{1+g^2}} \left(-\frac{fg}{\sqrt{1+f^2}} \vec{D}_o - \frac{g}{\sqrt{1+f^2}} \vec{U} - \vec{Y}_o \right) \right),$$

$$= \left(-\frac{g}{\sqrt{1+f^2}} \left(\vec{D}_o \times \vec{U} \right) - \left(\vec{D}_o \times \vec{Y}_o \right) \right.$$

$$\left. + \frac{f^2 g}{\sqrt{1+f^2}} \left(\vec{U} \times \vec{D}_o \right) + f \left(\vec{U} \times \vec{Y}_o \right) \right) \frac{1}{\sqrt{1+f^2}\sqrt{1+g^2}},$$

$$= \left(\frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \vec{D}_o + \frac{1}{\sqrt{1+f^2}} \vec{U} - g\vec{Y}_o \right) \frac{1}{\sqrt{1+g^2}} \tag{3.2.25}$$

biçiminde α eğrisinin Y_o küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının binormal vektör alanı elde edilir. Son olarak, α eğrisinin Y_o küresel gösterge eğrisinin burulmasını elde edelim. $\tau_{Y_o} = -\left\langle \dot{\vec{B}}_{Y_o}, \vec{N}_{Y_o} \right\rangle$ yazılabilir. $\vec{B}_{Y_o}$ vektörünün s_{Y_o} parametresine göre türevini alınırsa

$$\frac{d\vec{B}_{Y_o}}{ds_{Y_o}} = \frac{d\vec{B}_{Y_o}}{ds} \frac{ds}{ds_{Y_o}},$$

$$\dot{\vec{B}}_{Y_o} = \vec{B}_{Y_o}{}' \frac{1}{\sqrt{\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2}}$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikte (3.2.25) yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{B}}_{Y_o} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+g^2}} \left(\frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \vec{D}_o + \frac{1}{\sqrt{1+f^2}} \vec{U} - g\vec{Y}_o \right) \right)' \frac{1}{\sqrt{\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2}}$$

bulunur. Burada $\frac{\mu_o}{\delta_o} = f$ eşitliğinden, $\frac{1}{\sqrt{\delta_o{}^2 + \mu_o{}^2}}$ yerine $\frac{1}{\delta_o\sqrt{1+f^2}}$ yazılabilir. Ayrıca gerekli türev alma işlemleri yapılıp, $OD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{B}}_{Y_o} = \left(\frac{-gg'}{\left(1+g^2\right)^{3/2}} \left(\frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \vec{D}_o + \frac{1}{\sqrt{1+f^2}} \vec{U} - g\vec{Y}_o \right) \right.$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1+g^2}} \left(\frac{f'}{\left(1+f^2\right)^{3/2}} \vec{D}_o + \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \left(-\delta_o \vec{Y}_o \right) \right)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1+g^2}} \left(\frac{-ff'}{\left(1+f^2\right)^{3/2}} \vec{U} + \frac{1}{\sqrt{1+f^2}} \left(\mu_o \vec{Y}_o \right) \right)$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{1+g^2}} \left(-g'\vec{Y}_o - g\left(\delta_o \vec{D}_o - \mu_o \vec{U} \right) \right) \right) \frac{1}{\delta_o \sqrt{1+f^2}},$$

$$\dot{\vec{B}}_{Y_o} = \left(\left(\frac{-gg'}{\left(1+g^2\right)^{3/2}} \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+g^2}} \overbrace{\frac{f'}{\left(1+f^2\right)^{3/2}}}^{g\delta_o} - \frac{g\delta_o}{\sqrt{1+g^2}} \right) \vec{D}_o \right.$$

$$+ \left(\frac{-gg'}{\left(1+g^2\right)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1+f^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+g^2}} \overbrace{\frac{ff'}{\left(1+f^2\right)^{3/2}}}^{\mu_o g} + \frac{\mu_o g}{\sqrt{1+g^2}} \right) \vec{U}$$

$$\left. + \left(\frac{g^2 g'}{\left(1+g^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{1+g^2}} \frac{f\delta_o}{\sqrt{1+f^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+g^2}} \frac{\mu_o}{\sqrt{1+f^2}} - \frac{g'}{\sqrt{1+g^2}} \right) \vec{Y}_o \right) \frac{1}{\delta_o \sqrt{1+f^2}},$$

$$\dot{\vec{B}}_{Y_o} = \left(\left(\frac{-gg'f}{\left(1+g^2\right)^{3/2} \sqrt{1+f^2}} \right) \vec{D}_o + \left(\frac{-gg'}{\left(1+g^2\right)^{3/2} \sqrt{1+f^2}} \right) \vec{U} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{-g'}{\left(1+g^2\right)^{3/2}} \right) \vec{Y}_o \right) \frac{1}{\delta_o \sqrt{1+f^2}} \qquad (3.2.26)$$

Elde edilir. $\tau_{Y_o} = -\left\langle \dot{\vec{B}}_{Y_o}, \vec{N}_{Y_o} \right\rangle$ eşitliğinde, (3.2.26) ve (3.2.23) eşitlikleri yerine yazıldığında

$$\tau_{Y_o} = -\left\langle \left(\left(\frac{-gg'f}{\left(1+g^2\right)^{3/2}\sqrt{1+f^2}} \right)\vec{D}_o + \left(\frac{-gg'}{\left(1+g^2\right)^{3/2}\sqrt{1+f^2}} \right)\vec{U} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{-g'}{\left(1+g^2\right)^{3/2}} \right)\vec{Y}_o \right)\frac{1}{\delta_o\sqrt{1+f^2}}, \right.$$

$$\left. \left(-\frac{fg}{\sqrt{1+f^2}}\vec{D}_o - \frac{g}{\sqrt{1+f^2}}\vec{U} - \vec{Y}_o \right)\frac{1}{\sqrt{1+g^2}} \right\rangle$$

yazılabilir. Bulunan eşitlikte iç çarpım işlemi tamamlandığında

$$\tau_{Y_o} = -\frac{1}{\delta_o\sqrt{1+f^2}\left(1+g^2\right)^2}\left(\frac{g'g^2f^2}{1+f^2} + \frac{g'g^2}{1+f^2} + g' \right)$$

$$\tau_{Y_o} = -\frac{g'}{\delta_o\sqrt{1+f^2}\left(1+g^2\right)} \tag{3.2.27}$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.3.3: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir D_o – Darboux slant helis ise Y_o küresel gösterge eğrisi büyük çember ya da büyük çember parçasıdır.

İspat: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir D_o – Darboux slant helis olsun. Bu durumda teorem 2.3.4 gereği $\frac{\mu_o}{\delta_o} = sabittir.\ g = \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{{\delta_o}^2}{\left({\delta_o}^2 + {\mu_o}^2\right)^{3/2}}$

eşitliğinden $g = \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \frac{1}{\delta_o\left(1+\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)^2\right)^{3/2}}$ yazılabilir. Buradan $g = 0$ elde edilir. Bu eşitlikten Y_o küresel gösterge eğrisinin (3.2.21) ve (3.2.27) eşitliklerinde elde edilen birinci eğriliği ve burulması,

$$\kappa_{Y_o} = \sqrt{1+g^2} = 1, \quad \tau_{Y_o} = -\frac{g'}{\delta_o\sqrt{1+f^2}\left(1+g^2\right)} = 0$$

biçimindedir. Buradan $\alpha_{Y_o}\left(s_{Y_o}\right)=\vec{Y}_o(s)$, Y_o küresel gösterge eğrisinin büyük çember ya da büyük çember parçası olduğu görülür.

Sonuç 3.2.3.4: α eğrisi bir Y_o-Darboux slant helis ise $\alpha_{Y_o}\left(s_{Y_o}\right)=\vec{Y}_o(s)$, Y_o küresel gösterge eğrisi bir çember ya da çember parçasıdır.

İspat: α eğrisi bir Y_o-Darboux slant helis olsun. Bu durumda Teorem 3.1.2 gereği $\sigma_{Y_o}(s)=\dfrac{\delta_o^2}{\left(\delta_o^2+\mu_o^2\right)^{3/2}}\left(\dfrac{\mu_o}{\delta_o}\right)'(s)$ fonksiyonu sabittir. Bu ifade aynı zamanda $g=\left(\dfrac{\mu_o}{\delta_o}\right)'\dfrac{1}{\delta_o\left(1+\left(\dfrac{\mu_o}{\delta_o}\right)^2\right)^{3/2}}$ ifadesiyle aynıdır. Yani $g=sabit$ olur. O halde Y_o küresel gösterge eğrisinin birinci eğriliği ve burulması $\kappa_{Y_o}=\sqrt{1+g^2}=sabit$, $\tau_{Y_o}=-\dfrac{g'}{\delta_o\sqrt{1+f^2\left(1+g^2\right)}}=0$ olur. Bu eşitliklere dayanarak Y_o küresel gösterge eğrisinin bir çember ya da çember parçası olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek 3.2.3.5: M yüzeyi $X(u,v)=(u\sin v,u\cos v,u)$ parametrizasyonu ile verilen koni yüzeyi olsun. $u=\dfrac{s}{\sqrt{5}}$ ve $v=\sqrt{3}\ln\dfrac{s}{5}$ alınırsa M yüzeyi üzerinde

$$\alpha(s)=\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\frac{s}{\sqrt{5}}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\frac{s}{\sqrt{5}}\right)$$

eğrisi elde edilir. Elde edilen eğrinin s parametresine göre türevi alındığında,

$$\alpha(s)'=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\left(\sqrt{3}\ln\dfrac{s}{5}\right)+\dfrac{s}{\sqrt{5}}\cos\left(\sqrt{3}\ln\dfrac{s}{5}\right)\dfrac{\sqrt{3}}{s},\\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cos\left(\sqrt{3}\ln\dfrac{s}{5}\right)-\dfrac{s}{\sqrt{5}}\sin\left(\sqrt{3}\ln\dfrac{s}{5}\right)\dfrac{\sqrt{3}}{s},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

Bulunur ve $\left\|\alpha(s)'\right\|=1$ olduğundan α eğrisi birim hızlı bir eğridir. α eğrisinin Darboux çatı elemanları sırasıyla aşağıdaki biçimde elde edilebilir. α eğrisi birim hızlı bir eğri olduğundan

$$\vec{T}(s)=\alpha(s)'=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),1\right)$$

bulunur. $X_u=(\sin v,\cos v,1)$ ve $X_v=(u\cos v,-u\sin v,0)$ eşitliklerinden

$X_u\times X_v=(u\sin v,u\cos v,-u)$ elde edilir. Bu eşitliklerden yüzeyin birim normal vektör alanı $\vec{U}=\frac{X_u\times X_v}{\|X_u\times X_v\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin v,\cos v,-1)$ şeklindedir. Böylece normal vektör alanının α eğrisine kısıtlanmışı

$$\vec{U}_\alpha(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),-1\right)$$

şeklinde elde edilir. Bulunan $\vec{U}_\alpha(s)$ ve $\vec{T}(s)$ eşitlikleri $\vec{V}(s)=\vec{U}_\alpha(s)\times\vec{T}(s)$ eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\vec{V}(s)=\frac{1}{\sqrt{10}}\left(2\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),-2\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),-\sqrt{3}\right)$$

elde edilir. Bulunan yukarıdaki eşitliklerden,

$$\alpha''(s)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}s}\left(\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),-\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),0\right)$$

ve $\vec{U}_\alpha(s)'=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}s}\left(\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),-\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),0\right)$ elde edilir. Bulunan bu eşitlikler kullanılarak Darboux çatısının eğrilikleri;

$$k_n(s)=\left\langle\alpha''(s),\vec{U}_\alpha(s)\right\rangle=-\frac{3}{5\sqrt{2}s},$$

$$k_g(s)=\left\langle\alpha''(s),\vec{V}(s)\right\rangle=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}s},$$

$$\tau_g(s) = -\left\langle \vec{U}_\alpha(s)', \vec{V}(s) \right\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}s}$$

elde edilir. Darboux çatısının eğrilikleri kullanılarak Oskülatör Darboux çatısının eğrilikleri,

$\delta_o = \left(\frac{{k_n}^2}{{k_n}^2 + {\tau_g}^2} \right) \left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)' + k_g = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}s}$ ve $\mu_o = \sqrt{{k_n}^2 + {\tau_g}^2} = \frac{\sqrt{39}}{5\sqrt{2}s}$ şeklindedir. Tanım 3.2.1 deki $\vec{D}_o = \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{T} - \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{V}$ ve $\vec{Y}_o = -\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{T} - \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{V}$ ifadelerinde Darboux çatı elemanları kullanılarak,

$$\vec{D}_o = \frac{1}{\sqrt{65}} \begin{pmatrix} -\frac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}} \sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right) - \left(\sqrt{30}-\sqrt{6}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), \\ -\frac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}} \cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right) + \left(\sqrt{30}-\sqrt{6}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), -\frac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ve

$$\vec{Y}_o = \frac{1}{\sqrt{65}} \begin{pmatrix} \left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right) + \left(3+2\sqrt{5}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), \\ \left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right) - \left(3+2\sqrt{5}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), \left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Şimdi α eğrisinin sırasıyla D_o, U, Y_o küresel gösterge eğrilerini bulalım. Tanım 3.2.1.1 gereği α eğrisinin D_o küresel gösterge eğrisi,

$$\alpha_{D_o}(s) = \vec{D}_o(s) = \frac{1}{\sqrt{65}} \begin{pmatrix} -\frac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}} \sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right) - \left(\sqrt{30}-\sqrt{6}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), \\ -\frac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}} \cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right) + \left(\sqrt{30}-\sqrt{6}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), -\frac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. D_o küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanları Teorem 3.2.1.2 deki

$\vec{T}_{D_o} = -\vec{Y}_o$ eşitliğinden

$$\vec{T}_{D_o} = -\frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} \left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)+\left(3+2\sqrt{5}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), \\ \left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\left(3+2\sqrt{5}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right) \end{pmatrix},$$

$\vec{N}_{D_o} = -\frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}}}\vec{D}_o + \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}}}\vec{U}$ eşitliğinden

$$\vec{N}_{D_o} = \frac{1}{3\sqrt{13}}\begin{pmatrix} \left(8+\sqrt{5}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), \\ \left(8+\sqrt{5}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\left(\sqrt{5}-5\right) \end{pmatrix}$$

ve $\vec{B}_{D_o} = \frac{\mu_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}}}\vec{D}_o + \frac{\delta_o}{\sqrt{\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}}}\vec{U}$ eşitliğinden

$$\vec{B}_{D_o} = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{3\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\sqrt{6}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), \\ -\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)+\sqrt{6}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{10}}{1-\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca eğrinin eğriliği ve burulması,

$$\kappa_{D_o} = \sqrt{1+\left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\ \tau_{D_o} = \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)'\frac{\delta_o}{\left(\delta_o^{\,2}+\mu_o^{\,2}\right)^{3/2}} = 0$$

şeklindedir. Benzer şekilde Tanım 3.2.2.1 gereği α eğrisinin U küresel gösterge eğrisini

$$\alpha_U(s_u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),-1\right)$$

biçiminde elde ederiz. U küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının vektörleri Teorem 3.2.2.2 deki eşitliklerden,

$$\vec{T}_U = \frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} \left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)+\left(3+2\sqrt{5}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), \\ \left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\left(3+2\sqrt{5}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right) \end{pmatrix},$$

$$\vec{N}_U = -\frac{1}{3\sqrt{13}}\begin{pmatrix} \left(8+\sqrt{5}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), \\ \left(8+\sqrt{5}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\left(\sqrt{5}-5\right) \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$\vec{B}_U = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{3\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\sqrt{6}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), \\ -\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)+\sqrt{6}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{10}}{1-\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca eğrilik ve burulması $\kappa_U = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}, \tau_U = 0$ dır. Son olarak α eğrisinin Y_o küresel gösterge eğrisi Tanım 3.2.3.1 gereği

$$\alpha_{Y_o}(s) = \frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} \left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)+\left(3+2\sqrt{5}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), \\ \left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\left(3+2\sqrt{5}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Y_o küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının vektörleri Teorem 3.2.3.2 deki eşitlikler kullanılarak,

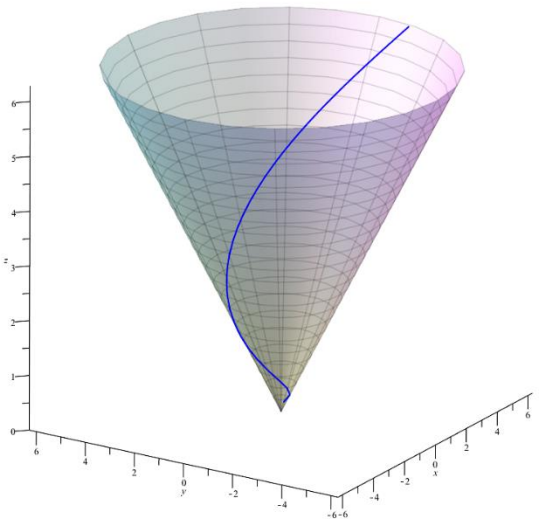
$$\vec{T}_{Y_o} = -\frac{1}{3\sqrt{13}}\begin{pmatrix} \left(8+\sqrt{5}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), \\ \left(8+\sqrt{5}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\left(\sqrt{5}-5\right) \end{pmatrix},$$

$$\vec{N}_{Y_o} = \frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} \left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)+\left(3+2\sqrt{5}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), \\ \left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\left(3+2\sqrt{5}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right) \end{pmatrix},$$

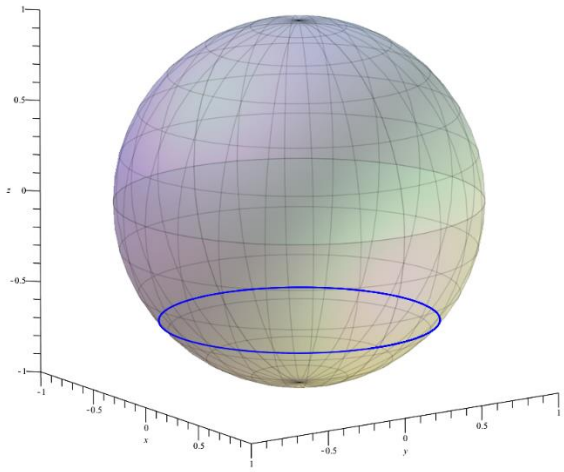
$$\vec{B}_{Y_o} = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{3\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\sqrt{6}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), \\ -\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)+\sqrt{6}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{10}}{1-\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca eğrinin eğrilik ve burulması $\kappa_{Y_o} = 1, \tau_{Y_o} = 0$ dır.

$u=\frac{s}{\sqrt{5}}$ ve $v=\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}$ olmak üzere $X(u,v)=(u\sin v,u\cos v,u)$ parametrizasyonu ile verilen M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)=\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\frac{s}{\sqrt{5}}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\frac{s}{\sqrt{5}}\right)$ eğrisinin $OD-$ çatısına göre küresel gösterge eğrilerinin şekilleri, Şekil 3.2.3.6, Şekil 3.2.3.7 ve Şekil 3.2.3.8 de verilmiştir.

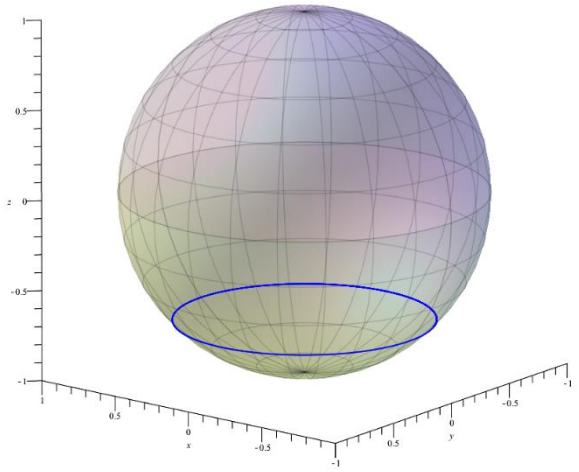


Şekil 3.2.3.5: $X(u,v)=(u\sin v,u\cos v,u)$ yüzeyi üzerinde $\alpha(s)=\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\frac{s}{\sqrt{5}}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right),\frac{s}{\sqrt{5}}\right)$ eğrisi



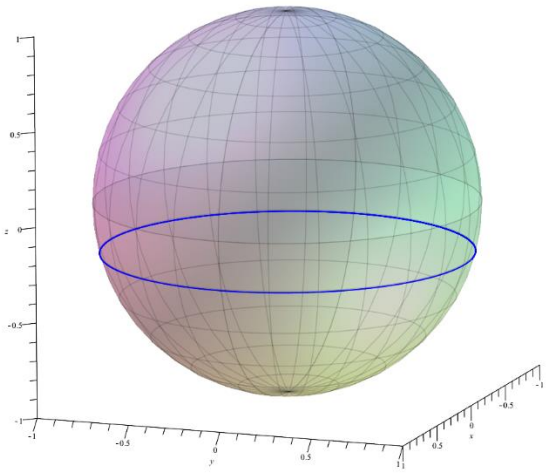
Şekil 3.2.3.6: α eğrisin D_o küresel gösterge eğrisi

$$\alpha_{D_o} = \frac{1}{\sqrt{65}}\left(\begin{array}{l} -\frac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)-\left(\sqrt{30}-\sqrt{6}\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), \\ -\frac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}}\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right)+\left(\sqrt{30}-\sqrt{6}\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), -\frac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}} \end{array}\right)$$



Şekil 3.2.3.7: α eğrisinin U küresel gösterge eğrisi

$$\alpha_U = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), \cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{s}{5}\right), -1\right)$$



Şekil 3.2.3.8: α eğrisinin Y_o küresel gösterge eğrisi

$$\alpha_{D_n}(s) = \vec{D}_n(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin\sqrt{2}s, -\cos\sqrt{2}s, \sqrt{2}\right)$$

4. YÜZEY ÜZERİNDE Y_r – DARBOUX SLANT HELİSLER VE REKTİFİYAN DARBOUX ÇATISINA GÖRE KÜRESEL GÖSTERGE EĞRİLERİ

Bu bölümde, E^3 uzayında bir M yüzeyi üzerinde kalan yeni yüzey eğrileri Y_r – Darboux slant helis kavramı tanımlanacak ve bu yeni özel eğriler için karakterizasyonlar verilecektir. Ayrıca RD – çatısına göre küresel gösterge eğrileri tanımlanıp, bu eğrilerin Frenet çatı elemanlarının RD – çatısına göre eşitlikleri verilecektir. Burada RD – çatısının eğrilikleri $\delta_r \neq 0, \mu_r \neq 0$ biçimindedir.

4.1: Yüzey Üzerinde Rektifiyan Darboux Çatısına Göre Y_r – Darboux Slant Helisler

Tanım 4.1.1: M bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin $\vec{Y}_r$ vektör alanı birim, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisi M yüzeyi üzerinde Y_r – Darboux slant helis olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.2: M bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde, RD – çatısı $\left\{\vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r\right\}$ ve eğrilikleri δ_r, μ_r olan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Y_r – Darboux slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_{Y_r}(s) = \frac{\delta_r^2}{\left(\delta_r^2 + \mu_r^2\right)^{3/2}} \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)'(s) \tag{4.1.1}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

İspat: α birim hızlı, RD – çatısı $\left\{\vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r\right\}$ ve eğrilikleri δ_r, μ_r olan Y_r – Darboux slant helis olsun. O halde Tanım 4.1.1 gereği α eğrisinin $\vec{Y}_r$ vektör alanı, sabit doğrultulu bir birim $\vec{d}_{Y_r}$ vektör ile sabit bir ω açısı yapar. Dolayısıyla $\left\langle \vec{Y}_r, \vec{d}_{Y_r} \right\rangle = \cos\omega$ yazılabilir. Bu ifadenin her iki tarafının türevi alınırsa $\left\langle \vec{Y}_r', \vec{d}_{Y_r} \right\rangle + \left\langle \vec{Y}_r, \vec{d}_{Y_r}' \right\rangle = 0$ elde edilir. $\vec{d}_{Y_r}$ vektörü sabit olduğundan $\left\langle \vec{Y}_r', \vec{d}_{Y_r} \right\rangle = 0$ bulunur. Bulunan bu eşitlikte RD – çatısının türev formülleri yerine yazılarak

$$\left\langle \delta_r \vec{D}_r - \mu_r \vec{V}, \vec{d}_{Y_r} \right\rangle = 0,$$

$$\delta_r \left\langle \vec{D}_r, \vec{d}_{Y_r} \right\rangle - \mu_r \left\langle \vec{V}, \vec{d}_{Y_r} \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \vec{D}_r, \vec{d}_{Y_r} \right\rangle = \frac{\mu_r}{\delta_r} \left\langle \vec{V}, \vec{d}_{Y_r} \right\rangle$$

eşitliği elde edilir. Bulunan bu eşitlikte $\left\langle \vec{V}, \vec{d}_{Y_r} \right\rangle = z$ alınıp, yerine yazılırsa $\left\langle \vec{D}_r, \vec{d}_{Y_r} \right\rangle = \frac{\mu_r}{\delta_r} z$ elde edilir. $\vec{d}_{Y_r}$ vektörü, $\left\{ \vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r \right\}$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak

$$\vec{d}_{Y_r} = c_1 \vec{D}_r + c_2 \vec{V} + c_3 \vec{Y}_r \tag{4.1.2}$$

yazılabilir. (4.1.2) eşitliğindeki $\vec{d}_{Y_r}$ vektörüne sırasıyla $\vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r$ vektörleri ile iç çarpım uygulanırsa,

$$\left\langle \vec{D}_r, \vec{d}_{Y_r} \right\rangle = c_1 = \frac{\mu_r}{\delta_r} z, \left\langle \vec{V}, \vec{d}_{Y_r} \right\rangle = c_2 = z \text{ ve } \left\langle \vec{Y}_r, \vec{d}_{Y_r} \right\rangle = c_3 = \cos\omega$$

eşitlikleri elde edilir. Bulunan bu ifadeler (4.1.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\vec{d}_{Y_r} = \frac{\mu_r}{\delta_r} z\vec{D}_r + z\vec{V} + \cos\omega \vec{Y}_r \tag{4.1.3}$$

vektörü bulunur. $\vec{d}_{Y_r}$ vektörü birim vektör olduğundan $\left\| \vec{d}_{Y_r} \right\| = 1$ dir. (4.1.3) eşitliğinin normu alındığında,

$$\left\| \vec{d}_{Y_r} \right\| = \sqrt{\left(\frac{\mu_r}{\delta_r} z \right)^2 + z^2 + \cos^2 \omega},$$

$$1 = z^2 \left(\frac{{\mu_r}^2}{{\delta_r}^2} + 1 \right) + \cos^2 \omega$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikten

$$1-\cos^2\omega = z^2\left(\frac{{\mu_r}^2+{\delta_r}^2}{{\delta_r}^2}\right),$$

$$z^2 = \frac{{\delta_r}^2\sin^2\omega}{{\mu_r}^2+{\delta_r}^2},$$

$$z = \mp\frac{\delta_r\sin\omega}{\sqrt{{\mu_r}^2+{\delta_r}^2}}$$

eşitliği bulunur. (Burada $z = \frac{\delta_r\sin\omega}{\sqrt{{\mu_r}^2+{\delta_r}^2}}$ alınacaktır.) Elde edilen bu ifade (4.1.3) eşitliğindeki $\vec{d}_{Y_r}$ vektöründe yerine yazılırsa

$$\vec{d}_{Y_r} = \frac{\mu_r\sin\omega}{\sqrt{{\mu_r}^2+{\delta_r}^2}}\vec{D}_r + \frac{\delta_r\sin\omega}{\sqrt{{\mu_r}^2+{\delta_r}^2}}\vec{V} + \cos\omega\vec{Y}_r \qquad (4.1.4)$$

elde edilir. $\vec{d}_{Y_r}$ vektörü sabit vektör olduğundan $\vec{d}_{Y_r}{}' = \vec{0}$ dır. (4.1.4) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\vec{0} = \left(\frac{\mu_r\sin\omega}{\sqrt{{\mu_r}^2+{\delta_r}^2}}\right)'\sin\omega\vec{D}_r + \frac{\mu_r\sin\omega}{\sqrt{{\mu_r}^2+{\delta_r}^2}}\vec{D}_r{}' + \left(\frac{\delta_r}{\sqrt{{\mu_r}^2+{\delta_r}^2}}\right)'\sin\omega\vec{V} + \frac{\delta_r\sin\omega}{\sqrt{{\mu_r}^2+{\delta_r}^2}}\vec{V}' + \cos\omega\vec{Y}_r{}'$$

bulunur. Bu eşitlikte gerekli türev alma işlemleri yapılıp, $RD-$ çatısının türev formülleri yerine yazılarak

$$\vec{0} = \frac{\delta_r\sin\omega\left(\mu_r{}'\delta_r - \delta_r{}'\mu_r\right)}{\left({\mu_r}^2+{\delta_r}^2\right)^{3/2}}\vec{D}_r + \frac{\mu_r\sin\omega}{\sqrt{{\mu_r}^2+{\delta_r}^2}}\left(-\delta_r\vec{Y}_r\right) + \frac{\mu_r\sin\omega\left(\delta_r{}'\mu_r - \mu_r{}'\delta_r\right)}{\left({\mu_r}^2+{\delta_r}^2\right)^{3/2}}\vec{V} + \frac{\delta_r\sin\omega}{\sqrt{{\mu_r}^2+{\delta_r}^2}}\left(\mu_r\vec{Y}_r\right) + \cos\omega\left(\delta_r\vec{D}_r - \mu_r\vec{V}\right)$$

$$\vec{0} = \left(\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)'\frac{{\delta_r}^3}{\left({\mu_r}^2+{\delta_r}^2\right)^{3/2}}\sin\omega + \delta_r\cos\omega\right)\vec{D}_r + \left(-\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)'\frac{{\delta_r}^2\mu_r}{\left({\mu_r}^2+{\delta_r}^2\right)^{3/2}}\sin\omega - \mu_r\cos\omega\right)\vec{V}$$

eşitliği elde edilir. $\vec{D}_r$ ve $\vec{V}$ vektörleri birbirine dik vektörler olduğundan bu eşitliğin sağlanabilmesi için

$$\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,3}}{\left(\mu_r^{\,2}+\delta_r^{\,2}\right)^{3/2}} \sin\omega + \delta_r \cos\omega = 0 \text{ ve } -\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}\mu_r}{\left(\mu_r^{\,2}+\delta_r^{\,2}\right)^{3/2}} \sin\omega - \mu_r \cos\omega = 0$$

olması gerekir. Bu eşitliklerden

$$\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,3}}{\left(\mu_r^{\,2}+\delta_r^{\,2}\right)^{3/2}} \sin\omega = -\delta_r \cos\omega$$

$$\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}}{\left(\mu_r^{\,2}+\delta_r^{\,2}\right)^{3/2}} = -\cot\omega$$

bulunur. Burada ω açısı sabit olduğundan

$$\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}}{\left(\mu_r^{\,2}+\delta_r^{\,2}\right)^{3/2}} = -\cot\omega = sabit$$

elde edilir. Bu ifade $\sigma_{Y_r}(s) = \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}}{\left(\mu_r^{\,2}+\delta_r^{\,2}\right)^{3/2}}(s) = sabit$ biçiminde gösterilebilir.

Tersine $\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}}{\left(\mu_r^{\,2}+\delta_r^{\,2}\right)^{3/2}} = -\cot\omega = sabit$ olsun. Buradan

$$\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,3}}{\left(\mu_r^{\,2}+\delta_r^{\,2}\right)^{3/2}} \sin\omega = -\delta_r \cos\omega$$

yazılabilir. Şimdi ω sabit olmak üzere bir

$$\vec{d}_{Y_r} = \frac{\mu_r \sin\omega}{\sqrt{\mu_r^{\,2}+\delta_r^{\,2}}} \vec{D}_r + \frac{\delta_r \sin\omega}{\sqrt{\mu_r^{\,2}+\delta_r^{\,2}}} \vec{V} + \cos\omega \vec{Y}_r$$

vektörünü ele alalım. Alınan $\vec{d}_{Y_r}$ vektörüne, $\vec{Y}_r$ vektörü ile iç çarpım uygulanırsa $\left\langle \vec{Y}_r, \vec{d}_{Y_r} \right\rangle = \cos\omega = sabit$ elde edilir. $\vec{d}_{Y_r}$ vektörünün türevi alınırsa,

$$\vec{d}_{Y_r} = \frac{\delta_r \sin\omega\left(\mu_r'\delta_r - \delta_r'\mu_r\right)}{\left(\mu_r^{\,2} + \delta_r^{\,2}\right)^{3/2}}\vec{D}_r + \frac{\mu_r \sin\omega}{\sqrt{\mu_r^{\,2} + \delta_r^{\,2}}}\left(-\delta_r\vec{Y}_r\right) + \frac{\mu_r \sin\omega\left(\delta_r'\mu_r - \mu_r'\delta_r\right)}{\left(\mu_r^{\,2} + \delta_r^{\,2}\right)^{3/2}}\vec{V}$$
$$+ \frac{\delta_r \sin\omega}{\sqrt{\mu_r^{\,2} + \delta_r^{\,2}}}\left(\mu_r\vec{Y}_r\right) + \cos\omega\left(\delta_r\vec{D}_r - \mu_r\vec{V}\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli türev alma işlemleri yapılır ve $RD-$ çatısının türev formülleri yerine yazılırsa,

$$\vec{d}_{Y_r} = \left(\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,3}}{\left(\mu_r^{\,2} + \delta_r^{\,2}\right)^{3/2}}\sin\omega + \delta_r\cos\omega\right)\vec{D}_r$$
$$+ \left(-\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}\mu_r}{\left(\mu_r^{\,2} + \delta_r^{\,2}\right)^{3/2}}\sin\omega - \mu_r\cos\omega\right)\vec{V}$$

bulunur. Bulunan bu eşitlikte $\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}}{\left(\mu_r^{\,2} + \delta_r^{\,2}\right)^{3/2}} = -\cot\omega$ ifadesi yerine yazılırsa $\vec{d}_{Y_r}' = \vec{0}$ elde edilir. O halde $\vec{d}_{Y_r}$ vektörü sabittir. α eğrisinin $RD-$ çatısının $\vec{Y}_r$ vektörü, sabit $\vec{d}_{Y_r}$ vektörü ile sabit açı yaptığından Tanım (4.1.1) gereği α eğrisi Y_r- Darboux slant helistir.

Sonuç 4.1.3: α eğrisinin $RD-$ çatısına göre Y_r-Darboux slant helis ekseni

$$\vec{d}_{Y_r} = \frac{\mu_r \sin\omega}{\sqrt{\mu_r^{\,2} + \delta_r^{\,2}}}\vec{D}_r + \frac{\delta_r \sin\omega}{\sqrt{\mu_r^{\,2} + \delta_r^{\,2}}}\vec{V} + \cos\omega\vec{Y}_r$$

biçimindedir.

Sonuç 4.1.4: α eğrisi $\sigma_{Y_r}(s) = 0$ olacak biçimde bir Y_r-Darboux slant helis ise α eğrisi D_r-Darboux slant helistir.

İspat: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, $\sigma_{Y_r}(s) = 0$ olacak biçimde bir Y_r – Darboux slant helis olsun. Bu durumda (4.1.1) eşitliğinden $\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{{\delta_r}^2}{\left({\mu_r}^2 + {\delta_r}^2\right)^{3/2}}(s) = 0$ bulunur. $\delta_r \neq 0$ ve $\mu_r \neq 0$ olduğundan bu eşitliğin sağlanabilmesi için $\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' = 0$ olması gerekir. O halde $\frac{\mu_r}{\delta_r} = sabit$ elde edilir. Elde edilen bu ifade Teorem 2.4.4 gereği, α eğrisinin D_r – Darboux slant helis olduğunu gösterir.

Sonuç 4.1.5: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve Darboux çatısının eğrilikleri k_n, k_g ve τ_g olsun. α eğrisinin Y_r – Darboux slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_{Y_r}(s) = \frac{\left(\frac{{k_g}^2}{{k_g}^2 + {\tau_g}^2}\left(\frac{\tau_g}{k_g}\right)' - k_n\right)^2}{\left(\left(\frac{{k_g}^2}{{k_g}^2 + {\tau_g}^2}\left(\frac{\tau_g}{k_g}\right)' - k_n\right)^2 + {k_g}^2 + {\tau_g}^2\right)^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{{k_g}^2 + {\tau_g}^2}}{\frac{{k_g}^2}{{k_g}^2 + {\tau_g}^2}\left(\frac{\tau_g}{k_g}\right)' - k_n}\right)'(s)$$

(4.1.5)

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

İspat: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, Y_r – Darboux slant helis olsun. (4.1.1) denkleminde $\delta_r = \left(\frac{{k_g}^2}{{k_g}^2 + {\tau_g}^2}\right)\left(\frac{\tau_g}{k_g}\right)' - k_n$ ve $\mu_r = \sqrt{{k_g}^2 + {\tau_g}^2}$ eşitlikleri yerine yazılırsa yukarıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.6: α eğrisinin Y_r – Darboux slant helis ekseninin Darboux çatı elemanları cinsinden eşiti

$$\vec{d}_{Y_r}=\left(\frac{\tau_g \sin\omega}{\sqrt{\left(\frac{{k_g}^2}{{k_g}^2+{\tau_g}^2}\left(\frac{\tau_g}{k_g}\right)'-k_n\right)^2+{k_g}^2+{\tau_g}^2}}-\frac{k_g\cos\omega}{\sqrt{\tau_g^2+k_g^2}}\right)\vec{T}$$

$$+\left(\frac{\frac{{k_g}^2}{{k_g}^2+{\tau_g}^2}\left(\frac{\tau_g}{k_g}\right)'-k_n}{\sqrt{\left(\frac{{k_g}^2}{{k_g}^2+{\tau_g}^2}\left(\frac{\tau_g}{k_g}\right)'-k_n\right)^2+{k_g}^2+{\tau_g}^2}}\sin\omega\right)\vec{V}$$

$$+\left(\frac{k_g \sin\omega}{\sqrt{\left(\frac{{k_g}^2}{{k_g}^2+{\tau_g}^2}\left(\frac{\tau_g}{k_g}\right)'-k_n\right)^2+{k_g}^2+{\tau_g}^2}}+\frac{\tau_g\cos\omega}{\sqrt{\tau_g^2+k_g^2}}\right)\vec{U} \qquad (4.1.6)$$

biçimindedir.

İspat: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I\subset IR\to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir Y_r- Darboux slant helis eğri olsun. $\vec{D}_r$ vektörünün Darboux vektörlerine bağlı

$\vec{D}_r=\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2+k_g^2}}\vec{T}+\frac{k_g}{\sqrt{\tau_g^2+k_g^2}}\vec{U}$ eşitliği $\vec{Y}_r=\vec{D}_r\times\vec{V}$ eşitliğinde kullanılırsa

$$\vec{Y}_r=\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2+k_g^2}}\overbrace{\left(\vec{T}\times\vec{V}\right)}^{\vec{U}}+\frac{k_g}{\sqrt{\tau_g^2+k_g^2}}\overbrace{\left(\vec{U}\times\vec{V}\right)}^{-\vec{T}},$$

$$\vec{Y}_r=-\frac{k_g}{\sqrt{\tau_g^2+k_g^2}}\vec{T}+\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2+k_g^2}}\vec{U}$$

vektörü elde edilir. $\vec{D}_r$ vektörü ve elde edilen $\vec{Y}_r$ vektörü (4.1.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\vec{d}_{Y_r} = \frac{\mu_r \sin\omega}{\sqrt{\mu_r{}^2 + \delta_r{}^2}}\left(\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_g^2}}\vec{T} + \frac{k_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_g^2}}\vec{U}\right) + \frac{\delta_r \sin\omega}{\sqrt{\mu_r{}^2 + \delta_r{}^2}}\vec{V}$$
$$+ \cos\omega\left(-\frac{k_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_g^2}}\vec{T} + \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_g^2}}\vec{U}\right)$$

$$\vec{d}_{Y_r} = \left(\frac{\mu_r \sin\omega}{\sqrt{\mu_r{}^2 + \delta_r{}^2}}\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_g^2}} - \frac{k_g \cos\omega}{\sqrt{\tau_g^2 + k_g^2}}\right)\vec{T} + \frac{\delta_r \sin\omega}{\sqrt{\mu_r{}^2 + \delta_r{}^2}}\vec{V}$$
$$+ \left(\frac{\mu_r \sin\omega}{\sqrt{\mu_r{}^2 + \delta_r{}^2}}\frac{k_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_g^2}} + \frac{\tau_g \cos\omega}{\sqrt{\tau_g^2 + k_g^2}}\right)\vec{U}$$

elde edilir. Bulunan bu denklemde $\delta_r = \left(\frac{k_g{}^2}{k_g{}^2 + \tau_g{}^2}\right)\left(\frac{\tau_g}{k_g}\right)' - k_n$ ve $\mu_r = \sqrt{k_g{}^2 + \tau_g{}^2}$ eşitlikleri yerine yazılırsa (4.1.6) denklemindeki Darboux çatı elamanlarına bağlı Y_r – Darboux slant helisin ekseni elde edilir.

Sonuç 4.1.7: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, RD – çatısı $\left\{\vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r\right\}$ ve eğrilikleri δ_r, μ_r olan birim hızlı bir Y_r – Darboux slant helis eğri olsun. Bu durumda,

i) α, M yüzeyi üzerinde $k_n \neq 0$ olan bir geodezik eğri ise α eğrisi

$$\vec{d}_{Y_r} = \frac{\tau \sin\omega}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\vec{T} + \cos\omega\vec{N} + \frac{\kappa \sin\omega}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\vec{B}$$

eksenli bir slant helis eğrisidir.

ii) α, M yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi ise α eğrisi

$\vec{d}_{Y_r} = (-\cos\omega)\vec{T} + (\sin\omega\sin 2\phi)\vec{N} + (\sin\omega\cos 2\phi)\vec{B}$ eksenli bir helis eğrisidir.

İspat: i) α, Y_r- Darboux slant helis ve geodezik bir eğri olsun. O halde Teorem 2.2.12 gereği $k_g=0$ dır. $k_n\neq 0$ eşitliği dikkate alınırsa (2.1) eşitliklerinden, $k_n=\mp\kappa$ ve $\tau_g=\tau$ elde edilir. α bir Y_r- Darboux slant helis olduğundan elde edilen bu eşitlikler (4.1.5) de yerine yazılırsa $\sigma_{Y_r}(s)=\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\frac{\tau^2}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}}=sabit$ bulunur. Buradan bu ifadeye denk olan $\sigma_{Y_r}(s)=-\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\frac{\kappa^2}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}}(s)=sabit$ elde edilir. O halde Teorem 2.1.20 gereğince α slant helistir. (2.1) deki eşitlikler ve bulunan $k_n=\mp\kappa$, $\tau_g=\tau$ değerleri (4.1.6) da kullanılırsa, Y_r- Darboux slant helisin Frenet çatısının vektörleri cinsinden ekseni

$$\vec{d}_{Y_r}=\frac{\tau\sin\omega}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{T}-\frac{\kappa\sin\omega}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{V}+\cos\omega\vec{U}$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikte Tanım 2.2.18 deki Darboux çatısı ile Frenet çatısı arasındaki ilişkiler kullanılırsa

$$\vec{d}_{Y_r}=\frac{\tau\sin\omega}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{T}-\frac{\kappa\sin\omega}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(\cos\phi\,\vec{N}-\sin\phi\,\vec{B}\right)+\cos\omega\left(\sin\phi\,\vec{N}+\cos\phi\,\vec{B}\right)$$

$$\vec{d}_{Y_r}=\frac{\tau\sin\omega}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{T}+\left(-\frac{\kappa\sin\omega}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\frac{k_g}{\kappa}+\cos\omega\frac{k_n}{\kappa}\right)\vec{N}+\left(\frac{\kappa\sin\omega}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\frac{k_n}{\kappa}+\cos\omega\frac{k_g}{\kappa}\right)\vec{B}$$

$$\vec{d}_{Y_r}=\frac{\tau\sin\omega}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{T}+\cos\omega\vec{N}+\frac{\kappa\sin\omega}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{B}$$

biçiminde Y_r- Darboux slant helisin Frenet çatısının vektörleri cinsinden ekseni elde edilir.

İspat: ii) α, Y_r- Darboux slant helis ve bir eğrilik çizgisi olsun. Bu durumda Teorem 2.2.12 gereği $\tau_g=0$ dır. Bu eşitlik (4.1.5) de kullanılırsa

$$\sigma_{Y_r}(s) = -\left(\frac{k_g}{k_n}\right)' \frac{{k_n}^2}{\left({k_n}^2 + {k_g}^2\right)^{3/2}}(s) = sabit \tag{4.1.7}$$

elde edilir. Diğer yandan $\tau_g = 0$ eşitliği dikkate alındığında (2.1) eşitliklerinden $\tau = \phi'$, $\frac{k_n}{k_g} = \tan\phi$ ve ${k_n}^2 + {k_g}^2 = \kappa^2$ ifadeleri bulunur. Elde edilen bu ifadeler (4.1.7) de yerine yazılırsa

$$\sigma_{Y_r}(s) = -(\cot\phi)' \frac{\kappa^2 \sin^2\phi}{\left(\kappa^2 \sin^2\phi + \kappa^2 \cos^2\phi\right)^{3/2}}(s) = sabit$$

bulunur. Buradan

$$\sigma_{Y_r}(s) = \frac{\phi'}{\kappa}(s) = sabit$$

elde edilir. Bu eşitlikte $\tau = \phi'$ yerine yazılırsa

$$\sigma_{Y_r}(s) = \frac{\tau}{\kappa}(s) = sabit$$

bulunur. Teorem 2.2.18 gereği α eğrisi bir helis eğrisidir. Ayrıca $\tau_g = 0$ eşitliği (4.1.6) da kullanılırsa, Y_r – Darboux slant helisin ekseni

$$\vec{d}_{Y_r} = (-\cos\omega)\vec{T} + (\sin\omega\sin\phi)\vec{V} + (\sin\omega\cos\phi)\vec{U} \tag{4.1.8}$$

biçiminde elde edilir. Tanım 2.2.18 de verilen Darboux çatısı ile Frenet çatısı arasındaki ilişkiler (4.1.8) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\vec{d}_{Y_r} &= (-\cos\omega)\vec{T} + (\sin\omega\sin\phi)\left(\cos\phi\,\vec{N} - \sin\phi\,\vec{B}\right) \\ &\quad + (\sin\omega\cos\phi)\left(\sin\phi\,\vec{N} + \cos\phi\,\vec{B}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{d}_{Y_r} &= (-\cos\omega)\vec{T} + (2\sin\omega\sin\phi\cos\phi)\vec{N} \\ &\quad + \left(-\sin\omega\sin^2\phi + \sin\omega\cos^2\phi\right)\vec{B},\end{aligned}$$

$$\vec{d}_{Y_r} = -\cos\omega\vec{T} + (\sin\omega\sin 2\phi)\vec{N} + (\sin\omega\cos 2\phi)\vec{B}$$

biçiminde $Y_r -$ Darboux slant helisin Frenet çatısının vektörleri cinsinden ekseni elde edilir.

Örnek 4.1.8: M yüzeyi $X(u,v)=(u,\cos v,\sin v)$ parametrizasyonu ile verilsin. $u=\frac{2}{\sqrt{5}}s, v=\frac{s}{\sqrt{5}}$ alınırsa M yüzeyi üzerinde $\gamma(s)=\left(\frac{2s}{\sqrt{5}},\cos\frac{s}{\sqrt{5}},\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)$ eğrisi elde edilir. $\left\|\gamma(s)'\right\|=1$ olduğundan γ eğrisi birim hızlıdır. γ eğrisinin Darboux çatısı vektör alanları

$$\vec{T}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right),$$

$$\vec{V}=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right),$$

$$\vec{U}_\gamma=\left(0,-\cos\frac{s}{\sqrt{5}},-\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right)$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\gamma''=\left(0,-\frac{1}{5}\cos\frac{s}{\sqrt{5}},-\frac{1}{5}\sin\frac{s}{\sqrt{5}}\right) \text{ ve } \vec{U}_\gamma{}'=\left(0,\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\frac{s}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\right)$$

eşitliklerinden

$$k_n=\left\langle\gamma'',\vec{U}_\gamma\right\rangle=\frac{1}{5},$$

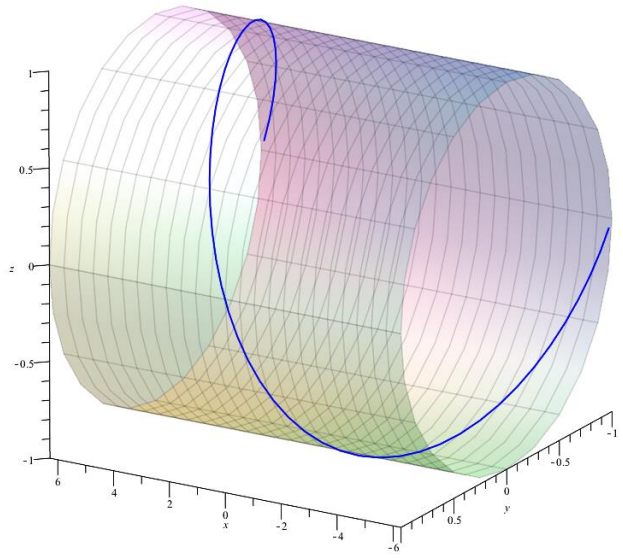
$$k_g=\left\langle\gamma'',\vec{V}\right\rangle=0,$$

$$\tau_g=-\left\langle\vec{U}_\gamma{}',\vec{V}\right\rangle=\frac{2}{5}$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikler kullanılarak $RD-$ çatısının eğrilikleri

$$\delta_r=-\frac{1}{5},\mu_r=\frac{2}{5}$$

bulunur. Bulunan bu değerler (4.1.1) de yazıldığında $\sigma_r = 0 = sabit$ olur. Dolayısıyla γ eğrisi M yüzeyi üzerinde Y_r – Darboux slant helistir. Ayrıca Sonuç 4.1.4 gereği γ eğrisi D_r – Darboux slant helistir. Grafiği Şekil 4.1.8 de gösterilmiştir.



Şekil 4.1.8: $X(u,v) = (u, \cos v, \sin v)$ yüzeyi üzerinde

$$\gamma(s) = \left(\frac{2s}{\sqrt{5}}, \cos\frac{s}{\sqrt{5}}, \sin\frac{s}{\sqrt{5}} \right) \text{ eğrisi}$$

4.2: Yüzey Üzerinde Rektifiyan Darboux Çatısına Göre Küresel Gösterge Eğrileri

Bu bölümde RD – çatısının D_r, T, Y_r vektör alanlarının küresel gösterge eğrileri tanımlanıp, tanımlanan küresel gösterge eğrilerin Frenet çatı elemanlarının RD – çatısına göre eşitlikleri verilecektir. Burada RD – çatısının eğrilikleri $\delta_r \neq 0, \mu_r \neq 0$ biçimindedir.

4.2.1: D_r Küresel Gösterge Eğrisi

Tanım 4.2.1.1: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, $RD-$ çatısı $\left\{\vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r\right\}$ ve eğrilikleri δ_r, μ_r olan bir eğri olsun. α eğrisi çizilirken tüm $\vec{D}_r$ vektörleri orijine taşınırsa, birim küre yüzeyi üzerinde meydana gelen eğriye α eğrisinin D_r küresel gösterge eğrisi denir. α eğrisinin D_r küresel gösterge eğrisinin denklemi $\alpha_{D_r} = \vec{D}_r$ dir. D_r küresel gösterge eğrisinin yay parametresi s_r olmak üzere $s_r \neq s$ ve yay parametresi $ds_r = \left\|\vec{D}_r'\right\| ds$ dir. Burada türev alma işlemlerinde s parametresine göre türev "$'$" ve s_r parametresine göre türev "$\square$" sembolü ile gösterilecektir.

Teorem 4.2.1.2: M, E^3 de bir yüzey, $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve $\alpha_{D_r} = \vec{D}_r$, D_r küresel gösterge eğrisi olsun. α eğrisinin $RD-$ çatı elemanları $\left\{\vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r, \delta_r, \mu_r\right\}$ ve D_r küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanları $\left\{\vec{T}_{D_r}, \vec{N}_{D_r}, \vec{B}_{D_r}, \kappa_{D_r}, \tau_{D_r}\right\}$ olmak üzere D_r küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanlarının $RD-$ çatı elemanları cinsinden eşiti aşağıdaki biçimdedir.

$$\vec{T}_{D_r} = -\vec{Y}_r,$$

$$\vec{N}_{D_r} = -\frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}\vec{D}_r + \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}\vec{V},$$

$$\vec{B}_{D_r} = \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}\vec{D}_r + \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}\vec{V},$$

$$\kappa_{D_r} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)^2}, \quad \tau_{D_r} = \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r}{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}.$$

İspat: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve α eğrisinin D_r Küresel gösterge eğrisi α_{D_r} olsun. O halde Tanım 4.2.1.1 gereği

$$\alpha_{D_r}(s_r) = \vec{D}_r(s)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanının s_r parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha_{D_r}}{ds_r} = \frac{d\vec{D}_r}{ds_r}$$

elde edilir. Bu eşitlikte zincir kuralı uygulanıp, $RD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa,

$$\frac{d\alpha_{D_r}}{ds_r} = \frac{d\vec{D}_r}{ds}\frac{ds}{ds_r},$$

$$\vec{T}_{D_r} = \vec{D}_r{}'\frac{ds}{ds_r},$$

$$\vec{T}_{D_r} = \left(-\delta_r \vec{Y}_r\right)\frac{ds}{ds_r} \tag{4.2.1}$$

bulunur. $\vec{T}_{D_r}$ birim vektör olduğundan $\left\|\vec{T}_{D_r}\right\| = 1$ dir. (4.2.1) eşitliğinin her iki tarafının normu alındığında $1 = |\delta_r|\frac{ds}{ds_r}$ bulunur. Bu eşitlikten $\frac{ds}{ds_r} = \frac{1}{|\delta_r|}$ elde edilir. Bulunan bu eşitlik (4.2.1) de yerine yazılırsa $\vec{T}_{D_r} = \mp\vec{Y}_r$ elde edilir. Burada

$$\vec{T}_{D_r} = -\vec{Y}_r \tag{4.2.2}$$

seçilerek işlemlere devam edilecektir. α eğrisinin D_r küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının birinci eğriliği $\kappa_{D_r} = \left\|\dot{\vec{T}}_{D_r}\right\|$ yazılabilir. (4.2.2) eşitliğinin her iki tarafının s_r parametresine göre türevi alındığında $\frac{d\vec{T}_{D_r}}{ds_r} = -\frac{d\vec{Y}_r}{ds_r}$ eşitliği elde edilir. Bulunan bu eşitlikte zincir kuralı uygulanıp, $RD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{T}}_{D_r} = -\frac{d\vec{Y}_r}{ds}\frac{ds}{ds_r},$$

$$= -\vec{Y}_r' \frac{ds}{ds_r} = -\left(\delta_r \vec{D}_r - \mu_r \vec{V}\right)\frac{1}{|\delta_r|},$$

$$= \mp \vec{D}_r + \frac{\mu_r}{|\delta_r|}\vec{V} \tag{4.2.3}$$

elde edilir. Elde edilen (4.2.3) eşitliğinin normu alındığında

$$\kappa_{D_r} = \left\|\dot{\vec{T}}_{D_r}\right\| = \sqrt{1+\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)^2} = \frac{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}{|\delta_r|} \tag{4.2.4}$$

bulunur. Benzer şekilde α eğrisinin D_r küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının asli normal vektörü

$$\vec{N}_{D_r} = \frac{1}{\kappa_{D_r}}\dot{\vec{T}}_{D_r}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte (4.2.3) ve (4.2.4) de bulunan ifadeler yerine yazılırsa

$$\vec{N}_{D_r} = \frac{|\delta_r|}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\left(\mp \vec{D}_r + \frac{\mu_r}{|\delta_r|}\vec{V}\right)$$

$$= \mp \frac{|\delta_r|}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\vec{D}_r + \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\vec{V}$$

elde edilir. Burada seçimi

$$= -\frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\vec{D}_r + \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\vec{V} \tag{4.2.5}$$

şeklinde yapabiliriz. Son olarak Frenet çatısının binormal vektör alanı eşitliğinden $\vec{B}_{D_r} = \vec{T}_{D_r} \times \vec{N}_{D_r}$ yazılabilir. (4.2.5) ve (4.2.2) deki ifadeler bu eşitlikte yerine yazılırsa

$$\vec{B}_{D_r} = -\vec{Y}_r \times \left(-\frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\vec{D}_r + \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\vec{V}\right),$$

$$\vec{B}_{D_r} = \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}} \overbrace{\left(\vec{Y}_r \times \vec{D}_r\right)}^{\vec{V}} - \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}} \overbrace{\left(\vec{Y}_r \times \vec{V}\right)}^{-\vec{D}_r},$$

$$\vec{B}_{D_r} = \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}} \vec{D}_r + \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}} \vec{V} \tag{4.2.6}$$

şekilde α eğrisinin D_r küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının binormal vektör alanı elde edilir. Şimdi α eğrisinin D_r küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısına bağlı burulmasını $\tau_{D_r} = -\left\langle \dot{\vec{B}}_{D_r}, \vec{N}_{D_r} \right\rangle$ eşitliğinden bulalım. $\vec{B}_{D_r}$ vektörünün s_r parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\vec{B}_{D_r}}{ds_r} = \frac{d\vec{B}_{D_r}}{ds} \frac{ds}{ds_r},$$

$$\dot{\vec{B}}_{D_r} = \vec{B}_{D_r}{}' \frac{1}{|\delta_r|},$$

$$\dot{\vec{B}}_{D_r} = \left(\frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}} \vec{D}_r + \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}} \vec{V} \right)' \frac{1}{|\delta_r|}$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli türev alma işlemleri yapılıp, $RD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{B}}_{D_r} = \left(\begin{array}{l} \dfrac{\mu_r' \sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}} - \dfrac{2\delta_r\delta_r' + 2\mu_r\mu_r'}{2\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}} \mu_r}{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}} \vec{D}_r + \dfrac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}} \left(-\delta_r \vec{Y}_r\right) \\ + \dfrac{\delta_r' \sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}} - \dfrac{2\delta_r\delta_r' + 2\mu_r\mu_r'}{2\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}} \delta_r}{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}} \vec{V} + \dfrac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}} \left(\mu_r \vec{Y}_r\right) \end{array} \right) \frac{1}{|\delta_r|},$$

$$\dot{\vec{B}}_{D_r} = \left(\frac{\mu_r' \delta_r^{\,2} - \delta_r \delta_r' \mu_r}{\left(\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}\right)^{3/2}} \vec{D}_r + \frac{\delta_r' \mu_r^{\,2} - \delta_r \mu_r \mu_r'}{\left(\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}\right)^{3/2}} \vec{V} \right) \frac{1}{|\delta_r|},$$

$$\dot{\vec{B}}_{D_r} = \left(\left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' \frac{\delta_r^{\,3}}{\left(\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2} \right)^{3/2}} \vec{D}_r - \left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' \frac{\mu_r \delta_r^{\,2}}{\left(\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2} \right)^{3/2}} \vec{V} \right) \frac{1}{|\delta_r|},$$

$$\dot{\vec{B}}_{D_r} = \left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' \frac{|\delta_r|}{\left(\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2} \right)^{3/2}} \left(\delta_r \vec{D}_r - \mu_r \vec{V} \right) \tag{4.2.7}$$

elde edilir. Bulunan $\dot{\vec{B}}_{D_r}$ vektörü ile $\vec{N}_{D_r}$ vektörü iç çarpım uygulanırsa

$$\left\langle \dot{\vec{B}}_{D_r}, \vec{N}_{D_r} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' \frac{|\delta_r|}{\left(\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2} \right)^{3/2}} \left(\delta_r \vec{D}_r - \mu_r \vec{V} \right), \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}} \left(-\vec{D}_r + \frac{\mu_r}{\delta_r} \vec{V} \right) \right\rangle,$$

$$\left\langle \dot{\vec{B}}_{D_r}, \vec{N}_{D_r} \right\rangle = \left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' \frac{|\delta_r| \delta_r}{\left(\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2} \right)^2} \left(\frac{-\delta_r^{\,2} - \mu_r^{\,2}}{\delta_r} \right),$$

$$\left\langle \dot{\vec{B}}_{D_r}, \vec{N}_{D_r} \right\rangle = -\left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' \frac{|\delta_r|}{\left(\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2} \right)}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik $\tau_{D_r} = -\left\langle \dot{\vec{B}}_{D_r}, \vec{N}_{D_r} \right\rangle$ eşitliğinde yazıldığında α eğrisinin D_r Küresel gösterge eğrisinin burulması

$$\tau_{D_r} = \left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' \frac{|\delta_r|}{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}} \tag{4.2.8}$$

biçiminde elde edilir. Böylece α eğrisinin D_r küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanlarının $RD-$ çatı elemanları cinsinden eşitlikleri elde edilmiş olur.

Sonuç 4.2.1.3: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir D_r-Darboux slant helis ise $\alpha_{D_r} = \vec{D}_r$, D_r küresel gösterge eğrisi çember ya da çember parçasıdır.

İspat: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir D_r-Darboux slant helis olsun. Bu durumda Teorem 2.4.4 gereği $\frac{\mu_r}{\delta_r} =$ sabittir. Bu eşitlik (4.2.4) ve (4.2.8) de dikkate alınırsa

$$\tau_{D_r} = \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{|\delta_r|}{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}} = 0,\ \kappa_{D_r} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)^2} = sabit$$

elde edilir. Böylece D_r küresel gösterge eğrisinin bir çember ya da çember parçası olduğu söylenebilir.

Sonuç 4.2.1.4: $\alpha_{D_r} = \vec{D}_r$, D_r küresel gösterge eğrisi bir helis eğrisi ise α eğrisi bir $Y_r -$ Darboux slant helistir.

İspat: $\alpha_{D_r} = \vec{D}_r$, D_r küresel gösterge eğrisi bir helis eğri olsun. Bu durumda teorem 2.2.18 den $\frac{\tau_{D_r}}{\kappa_{D_r}} = sabit$ olur. (4.2.4) ve (4.2.8) eşitliğindeki değerler yerine yazılırsa

$$\frac{\tau_{D_r}}{\kappa_{D_r}} = \frac{\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{|\delta_r|}{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)^2}}$$

$$= \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}}{\left(\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}\right)^{3/2}} = sabit$$

elde edilir. O halde Teorem 4.1.2 gereği α eğrisi bir $Y_r -$ Darboux slant helistir.

4.2.2: V Küresel Gösterge Eğrisi

Tanım 4.2.2.1: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, $RD-$ çatısı $\left\{\vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r\right\}$ ve eğrilikleri δ_r, μ_r olan bir eğri olsun. α eğrisi çizilirken tüm $\vec{V}$ vektörleri orijine taşınırsa, birim küre yüzeyi üzerinde meydana gelen eğriye α eğrisinin V küresel gösterge eğrisi denir. α eğrisinin V küresel gösterge eğrisinin denklemi $\alpha_V = \vec{V}$ olur. V küresel gösterge eğrisinin yay parametresi s_v

olmak üzere $s_v \neq s$ ve yay parametresi $ds_v = \left\| \vec{V}' \right\| ds$ dir. $RD-$ çatısının eğrilikleri $\delta_r \neq 0,\ \mu_r \neq 0$ dır.

Teorem 4.2.2.2: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve $\alpha_V = \vec{V}$, V küresel gösterge eğrisi olsun. α eğrisinin $RD-$çatı elemanları $\left\{ \vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r, \delta_r, \mu_r \right\}$ ve V küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanları $\left\{ \vec{T}_V, \vec{N}_V, \vec{B}_V, \kappa_V, \tau_V \right\}$ olmak üzere V küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanlarının $RD-$ çatı elemanları cinsinden eşiti aşağıdaki biçimdedir.

$$\vec{T}_V = \vec{Y}_r,$$

$$\vec{N}_V = \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}} \vec{D}_r - \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}} \vec{V},$$

$$\vec{B}_V = \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}} \vec{D}_r + \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}} \vec{V},$$

$$\kappa_V = \sqrt{1 + \left(\frac{\delta_r}{\mu_r} \right)^2}, \quad \tau_V = -\left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' \frac{\delta_r^{\,2}}{\mu_r \left(\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2} \right)}.$$

Burada türev alma işlemlerinde s parametresine göre türev "$'$" ve s_v parametresine göre türev "$\dot{}$" sembolü ile gösterilecektir.

İspat: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve α eğrisinin V küresel gösterge eğrisi α_V olsun. O halde Tanım 4.2.2.1 gereği

$$\alpha_V (s_v) = \vec{V}(s)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanının s_v parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha_V}{ds_v} = \frac{d\vec{V}}{ds_v}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte zincir kuralı uygulanıp $RD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\frac{d\alpha_V}{ds_v}=\frac{d\vec{V}}{ds}\frac{ds}{ds_v},$$

$$\vec{T}_V=\vec{V}'\frac{ds}{ds_v},$$

$$\vec{T}_V=\left(\mu_r\vec{Y}_r\right)\frac{ds}{ds_v} \tag{4.2.9}$$

bulunur. $\vec{T}_V$ birim vektör olduğundan $\left\|\vec{T}_V\right\|=1$ dir. (4.2.9) eşitliğinin her iki tarafının normu alındığında $1=\left|\mu_r\right|\frac{ds}{ds_v}$ bulunur. Bu eşitlikten $\frac{ds}{ds_v}=\frac{1}{\left|\mu_r\right|}$ elde edilir. Bulunan eşitlik (4.2.9) da yerine yazılırsa

$$\vec{T}_V=\vec{Y}_r \tag{4.2.10}$$

elde edilir. α eğrisinin V küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının birinci eğriliği $\kappa_V=\left\|\dot{\vec{T}}_V\right\|$ yazılabilir. (4.2.10) eşitliğinin her iki tarafının s_v parametresine göre türevi alındığında $\frac{d\vec{T}_V}{ds_v}=\frac{d\vec{Y}_r}{ds_v}$ eşitliği elde edilir. Bulunan bu eşitlikte zincir kuralı uygulanıp, $RD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{T}}_V=\frac{d\vec{Y}_r}{ds}\frac{ds}{ds_v},$$

$$=\vec{Y}_r'\frac{ds}{ds_v}=\left(\delta_r\vec{D}_r-\mu_r\vec{V}\right)\frac{1}{\left|\mu_r\right|},$$

$$=\frac{\delta_r}{\left|\mu_r\right|}\vec{D}_r\mp\vec{V} \tag{4.2.11}$$

elde edilir. Burada (4.2.11) eşitliğinin normu alındığında

$$\kappa_V = \sqrt{1+\left(\frac{\delta_r}{\mu_r}\right)^2} = \frac{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}{|\mu_r|} \tag{4.2.12}$$

bulunur. Benzer şekilde α eğrisinin V küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının asli normal vektörü $\vec{N} = \frac{1}{\kappa}\vec{T}'$ eşitliğinden

$$\vec{N}_V = \frac{1}{\kappa_V}\dot{\vec{T}}_V$$

yazılabilir. (4.2.12) ve (4.2.11) de bulunan ifadeler bu eşitlikte yerine yazılırsa

$$\vec{N}_V = \frac{|\mu_r|}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\left(\frac{\delta_r}{|\mu_r|}\vec{D}_r \mp \vec{V}\right),$$

$$= \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\vec{D}_r \mp \frac{|\mu_r|}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\vec{V}$$

elde edilir. Burada

$$\vec{N}_V = \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\vec{D}_r - \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\vec{V} \tag{4.2.13}$$

seçimi yapılarak işlemlere devam edilecektir. V küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının binormal vektör $\vec{B}_V = \vec{T}_V \times \vec{N}_V$ yazılabilir. O halde (4.2.10) ve (4.2.13) eşitlikleri bu ifadede yerine yazılırsa

$$\vec{B}_V = \vec{Y}_r \times \left(\frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\vec{D}_r - \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\vec{V}\right),$$

$$= \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\overbrace{\left(\vec{Y}_r \times \vec{D}_r\right)}^{\vec{V}} - \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\overbrace{\left(\vec{Y}_r \times \vec{V}\right)}^{-\vec{D}_r}$$

$$= \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\vec{D}_r + \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\vec{V} \tag{4.2.14}$$

şeklinde α eğrisinin V küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının binormal vektör alanı elde edilir. Şimdi α eğrisinin V küresel gösterge eğrisinin burulma $\tau_V = -\left\langle \dot{\vec{B}}_V, \vec{N}_V \right\rangle$ eşitliğinde bulunabilir. $\vec{B}_V$ vektörünün s_v parametresine göre türevini alınırsa

$$\frac{d\vec{B}_V}{ds_v} = \frac{d\vec{B}_V}{ds}\frac{ds}{ds_v},$$

$$\dot{\vec{B}}_V = \vec{B}_V{}' \frac{1}{\mu_r},$$

$$\dot{\vec{B}}_V = \left(\frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r{}^2 + \mu_r{}^2}} \vec{D}_r + \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r{}^2 + \mu_r{}^2}} \vec{V} \right)' \frac{1}{|\mu_r|}$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli türev alma işlemleri yapılıp, $RD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{B}}_V = \left(\frac{\mu_r' \sqrt{\delta_r{}^2 + \mu_r{}^2} - \frac{2\delta_r\delta_r' + 2\mu_r\mu_r'}{2\sqrt{\delta_r{}^2 + \mu_r{}^2}} \mu_r}{\delta_r{}^2 + \mu_r{}^2} \vec{D}_r + \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r{}^2 + \mu_r{}^2}} \left(-\delta_r \vec{Y}_r \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_r' \sqrt{\delta_r{}^2 + \mu_r{}^2} - \frac{2\delta_r\delta_r' + 2\mu_r\mu_r'}{2\sqrt{\delta_r{}^2 + \mu_r{}^2}} \delta_r}{\delta_r{}^2 + \mu_r{}^2} \vec{V} + \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r{}^2 + \mu_r{}^2}} \left(\mu_r \vec{Y}_r \right) \right) \frac{1}{|\mu_r|},$$

$$\dot{\vec{B}}_V = \left(\frac{\mu_r'\delta_r{}^2 - \delta_r\delta_r'\mu_r}{\left(\delta_r{}^2 + \mu_r{}^2\right)^{3/2}} \vec{D}_r + \frac{\delta_r'\mu_r{}^2 - \delta_r\mu_r\mu_r'}{\left(\delta_r{}^2 + \mu_r{}^2\right)^{3/2}} \vec{V} \right) \frac{1}{|\mu_r|},$$

$$\dot{\vec{B}}_V = \left(\left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' \frac{\delta_r{}^3}{\left(\delta_r{}^2 + \mu_r{}^2\right)^{3/2}} \vec{D}_r - \left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' \frac{\mu_r\delta_r{}^2}{\left(\delta_r{}^2 + \mu_r{}^2\right)^{3/2}} \vec{V} \right) \frac{1}{|\mu_r|},$$

bulunur. Burada

$$\dot{\vec{B}}_V = \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}}{\left(\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}\right)^{3/2}} \left(\frac{\delta_r}{\mu_r}\vec{D}_r - \vec{V}\right) \tag{4.2.15}$$

tercihi yapılabilir. Bulunan $\dot{\vec{B}}_V$ vektörü ile $\vec{N}_V$ vektörü iç çarpım uygulanırsa

$$\left\langle \dot{\vec{B}}_V, \vec{N}_V \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}}{\left(\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}\right)^{3/2}} \left(\frac{\delta_r}{\mu_r}\vec{D}_r - \vec{V}\right), \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\vec{D}_r - \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}\vec{V} \right\rangle,$$

$$\left\langle \dot{\vec{B}}_V, \vec{N}_V \right\rangle = \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}}{\left(\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}\right)^{2}} \left(\frac{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}{\mu_r}\right),$$

$$= \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}}{\mu_r\left(\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}\right)}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik $\tau_V = -\left\langle \dot{\vec{B}}_V, \vec{N}_V \right\rangle$ eşitliğinde yazıldığında α eğrisinin $\alpha_V = \vec{V}$, V küresel gösterge eğrisinin burulması

$$\tau_V = -\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}}{\mu_r\left(\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}\right)} \tag{4.2.16}$$

şeklinde elde edilir. Böylece α eğrisinin V küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanlarının $RD-$ çatı elemanları cinsinden eşitlikleri elde edilmiş olur.

Sonuç 4.2.2.3: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir D_r-Darboux slant helis eğrisi ise $\alpha_V = \vec{V}$, V küresel gösterge eğrisi bir çember ya da çember parçasıdır.

İspat: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir D_r-Darboux slant helis eğrisi olsun. Bu durumda Teorem 2.4.4 gereği $\frac{\mu_r}{\delta_r} = sabittir$. O halde V küresel gösterge eğrisinin (4.2.12) ve (4.2.16) eşitliklerinde elde edilen birinci eğriliği ve burulması,

$$\kappa_V = \sqrt{1+\left(\frac{\delta_r}{\mu_r}\right)^2} = sabit,\ \ \tau_V = -\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}}{\mu_r\left(\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}\right)} = 0$$

biçimindedir. Buradan α_V, V küresel gösterge eğrisinin bir çember ya da çember parçası olduğu görülür.

Sonuç 4.2.2.4: α_V, V küresel gösterge eğrisi helis bir eğrisi ise α eğrisi bir Y_r- Darboux slant helistir.

İspat: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri ve α_V, V küresel gösterge eğrisi bir helis eğrisi olsun. Teorem 2.1.18 gereği

$$\frac{\tau_V}{\kappa_V} = \frac{-\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}}{\mu_r\left(\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}\right)}}{\frac{\sqrt{\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}}}{\mu_r}},$$

$$= -\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}}{\left(\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}\right)^{3/2}} = sabit$$

elde edilir. Teorem 4.1.2 gereği α eğrisi Y_r- Darboux slant helistir.

4.2.3: Y_r Küresel Gösterge Eğrisi

Tanım 4.2.3.1: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, $RD-$ çatısı $\left\{\vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r\right\}$ ve eğrilikleri δ_r, μ_r olan bir eğri olsun. α eğrisi çizilirken tüm $\vec{Y}_r$ vektörleri orijine taşınırsa, birim küre yüzeyi üzerinde meydana gelen eğriye α eğrisinin Y_r küresel gösterge eğrisi denir. α eğrisinin Y_r küresel gösterge eğrisinin denklemi $\alpha_{Y_r} = \vec{Y}_r$ olur. Y_r küresel gösterge eğrisinin yay parametresi s_{Y_r} olmak üzere $s_{Y_r} \neq s$ ve yay parametresi $ds_{Y_r} = \left\|\vec{Y}_r'\right\| ds$ dir. $RD-$ çatısının eğrilikleri $\delta_r \neq 0,\ \mu_r \neq 0$ dır.

Teorem 4.2.3.2: M, E^3 de bir yüzey, $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve $\alpha_{Y_r} = \vec{Y}_r$, Y_r küresel gösterge eğrisi olsun. α eğrisinin $RD-$ çatı

elemanları $\left\{\vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r, \delta_r, \mu_r\right\}$ ve Y_r küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanları $\left\{\vec{T}_{Y_r}, \vec{N}_{Y_r}, \vec{B}_{Y_r}, \kappa_{Y_r}, \tau_{Y_r}\right\}$ olmak üzere Y_r küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanlarının $RD-$ çatı elemanları cinsinden eşiti aşağıdaki biçimdedir.

$$\vec{T}_{Y_r} = \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}\vec{D}_r - \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}\vec{V},$$

$$\vec{N}_{Y_r} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left(-\frac{mn}{\sqrt{1+n^2}}\vec{D}_r - \frac{m}{\sqrt{1+n^2}}\vec{V} - \vec{Y}_r\right),$$

$$\vec{B}_{Y_r} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left(\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}\vec{D}_r + \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\vec{V} - m\vec{Y}_r\right),$$

$$\kappa_{Y_r} = \sqrt{1+m^2}\ ,\ \tau_{Y_r} = -\frac{m'}{\delta_r\sqrt{1+n^2}\left(1+m^2\right)}$$

Burada türev alma işlemlerinde s parametresine göre türev "$'$" ve s_{Y_r} parametresine göre türev "$\dot{}$" sembolü ile gösterilecektir. Ayrıca $\frac{\mu_r}{\delta_r} = n, \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}}{\left(\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}\right)^{3/2}} = m$ kısaltmaları kullanılmıştır.

İspat: M, E^3 de bir yüzey, $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve $\alpha_{Y_r} = \vec{Y}_r$, V küresel gösterge eğrisi olsun. Tanım 4.2.3.1 gereği

$$\alpha_{Y_r}\left(s_{Y_r}\right) = \vec{Y}_r\left(s\right)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanının s_{Y_r} parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha_{Y_r}}{ds_{Y_r}} = \frac{d\vec{Y}_r}{ds_{Y_r}}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte zincir kuralı uygulanıp, $RD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa,

$$\frac{d\alpha_{Y_r}}{ds_{Y_r}} = \frac{d\vec{Y}_r}{ds}\frac{ds}{ds_{Y_r}},$$

$$\vec{T}_{Y_r} = \vec{Y}_r'\frac{ds}{ds_{Y_r}},$$

$$\vec{T}_{Y_r} = \left(\delta_r\vec{D}_r - \mu_r\vec{V}\right)\frac{ds}{ds_{Y_r}} \tag{4.2.17}$$

bulunur. $\vec{T}_{Y_r}$ birim vektör olduğundan $\left\|\vec{T}_{Y_r}\right\| = 1$ dir. (4.2.17) eşitliğinin her iki tarafının normu alındığında $1 = \sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}\,\frac{ds}{ds_{Y_r}}$ bulunur. Bu eşitlikten $\frac{ds}{ds_{Y_r}} = \frac{1}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}$ elde edilir. Bulunan eşitlik (4.2.17) de yerine yazılırsa

$$\vec{T}_{Y_r} = \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}\vec{D}_r - \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}\vec{V} \tag{4.2.18}$$

vektörü elde edilir. α eğrisinin Y_r küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının birinci eğriliği $\kappa_{Y_r} = \left\|\dot{\vec{T}}_{Y_r}\right\|$ yazılabilir. (4.2.18) eşitliğinin her iki tarafının s_{Y_r} parametresine göre türevi alındığında $\dot{\vec{T}}_{Y_r} = \frac{d\vec{T}_{Y_r}}{ds_{Y_r}} = \frac{d\vec{T}_{Y_r}}{ds}\frac{ds}{ds_{Y_r}}$ eşitliği elde edilir. Bulunan bu eşitlikte gerekli türev alma işlemleri yapılıp, $RD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{T}}_{Y_r} = \left(\frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}\vec{D}_r - \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}\vec{V}\right)'\frac{ds}{ds_{Y_r}},$$

$$= \left(\left(\frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}\right)'\vec{D}_r + \frac{\delta_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}\left(-\mu_r\vec{Y}_r\right) - \left(\frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}\right)'\vec{V}\right.$$
$$\left. - \frac{\mu_r}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}\left(\mu_r\vec{Y}_r\right)\right)\frac{1}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}},$$

$$= \left(\frac{\delta_r'\mu_r^{\,2} - \mu_r'\mu_r\delta_r}{\left(\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}\right)^{3/2}}\vec{D}_r - \frac{\mu_r'\delta_r^{\,2} - \delta_r'\delta_r\mu_r}{\left(\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}\right)^{3/2}}\vec{V} - \sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}\vec{Y}_r\right)\frac{1}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}},$$

$$= -\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\mu_r \delta_r^{\,2}}{\left(\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}\right)^2}\vec{D}_r - \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,3}}{\left(\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}\right)^2}\vec{V} - \vec{Y}_r \tag{4.2.19}$$

elde edilir. Elde edilen (4.2.19) eşitliğinin normu alındığında

$$\kappa_{Y_r} = \left\|\dot{\vec{T}}_{Y_r}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)'^2 \frac{\mu_r^{\,2}\delta_r^{\,4}+\delta_r^{\,6}}{\left(\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}\right)^4}+1},$$

$$\dot{\vec{B}}_{Y_r} = \left(\left(\frac{-mm'n}{\left(1+m^2\right)^{3/2}\sqrt{1+n^2}}\right)\vec{D}_r + \left(\frac{-mm'}{\left(1+m^2\right)^{3/2}\sqrt{1+n^2}}\right)\vec{V} + \left(\frac{-m'}{\left(1+m^2\right)^{3/2}}\right)\vec{Y}_r\right)\frac{1}{\delta_r\sqrt{1+n^2}}$$

eşitliği elde edilir. Bundan sonraki işlemlerde kolaylık olması için $\frac{\mu_r}{\delta_r} = n, \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{\delta_r^{\,2}}{\left(\delta_r^{\,2}+\mu_r^{\,2}\right)^{3/2}} = m$ kısaltmaları kullanılırsa

$$\kappa_{Y_r} = \sqrt{1+m^2} \tag{4.2.20}$$

bulunur. Ayrıca bu kısaltmalar (4.2.19) eşitliğinde de kullanılırsa

$$\dot{\vec{T}}_{Y_r} = -\frac{mn}{\sqrt{1+n^2}}\vec{D}_r - \frac{m}{\sqrt{1+n^2}}\vec{V} - \vec{Y}_r \tag{4.2.21}$$

yazılabilir. α eğrisinin Y_r küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının asli normal vektörü $\vec{N}_{Y_r} = \frac{1}{\kappa_{Y_r}}\dot{\vec{T}}_{Y_r}$ yazılabilir. (4.2.20) ve (4.2.21) de bulunan ifadeler bu eşitlikte yerine yazılırsa

$$\vec{N}_{Y_r} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left(-\frac{mn}{\sqrt{1+n^2}}\vec{D}_r - \frac{m}{\sqrt{1+n^2}}\vec{V} - \vec{Y}_r\right) \tag{4.2.22}$$

elde edilir. α eğrisinin Y_r küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının binormal vektör alanı $\vec{B}_{Y_r} = \vec{T}_{Y_r} \times \vec{N}_{Y_r}$ yazılabilir. $\frac{\mu_r}{\delta_r} = n, \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{{\delta_r}^2}{\left({\delta_r}^2 + {\mu_r}^2\right)^{3/2}} = m$ kısaltmaları (4.2.18) deki eşitlikte de kullanılırsa

$$\vec{T}_{Y_r} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \vec{D}_r - \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \vec{V} \tag{4.2.23}$$

bulunur. O halde (4.2.22) ve (4.2.23) eşitliklerinden

$$\vec{B}_{Y_r} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \vec{D}_r - \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \vec{V}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(-\frac{mn}{\sqrt{1+n^2}} \vec{D}_r - \frac{m}{\sqrt{1+n^2}} \vec{V} - \vec{Y}_r\right)\right),$$

$$= \left(\left(-\frac{m}{\sqrt{1+n^2}} \overbrace{\left(\vec{D}_r \times \vec{V}\right)}^{\vec{Y}_r} - \overbrace{\left(\vec{D}_r \times \vec{Y}_r\right)}^{-\vec{V}} + \left(\frac{mn^2}{\sqrt{1+n^2}} \overbrace{\left(\vec{V} \times \vec{D}_r\right)}^{-\vec{Y}_r}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + n \overbrace{\left(\vec{V} \times \vec{Y}_r\right)}^{\vec{D}_r}\right) \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}},\right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \vec{D}_r + \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \vec{V} - m\vec{Y}_r\right) \tag{4.2.24}$$

biçiminde α eğrisinin Y_r küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının binormal vektör alanı elde edilir. Son olarak, α eğrisinin Y_r küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının burulmasını $\tau_{Y_r} = -\left\langle \dot{\vec{B}}_{Y_r}, \vec{N}_{Y_r} \right\rangle$ eşitliğinden elde edelim. $\vec{B}_{Y_r}$ vektörünün s_{Y_r} parametresine göre türevini alınırsa

$$\frac{d\vec{B}_{Y_r}}{ds_{Y_r}} = \frac{d\vec{B}_{Yr}}{ds} \frac{ds}{ds_{Y_r}},$$

$$\dot{\vec{B}}_{Y_r} = \vec{B}_{Y_r}{}' \frac{ds}{ds_{Y_r}}$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikte $\frac{ds}{ds_{Y_r}} = \frac{1}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}$ ve (4.2.24) eşitliği yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{B}}_{Y_r} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \vec{D}_r + \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \vec{V} - m\vec{Y}_r \right) \right)' \frac{1}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}$$

bulunur. Burada $\frac{\mu_r}{\delta_r} = n$ eşitliğinden, $\frac{1}{\sqrt{\delta_r^{\,2} + \mu_r^{\,2}}}$ yerine $\frac{1}{\delta_r\sqrt{1+n^2}}$ yazılabilir. Ayrıca gerekli türev alma işlemleri yapılıp, $RD-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{B}}_{Y_r} = \frac{1}{\delta_r\sqrt{1+n^2}} \left(\frac{-mm'}{\left(1+m^2\right)^{3/2}} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \overbrace{\frac{n'}{\left(1+n^2\right)^{3/2}}}^{m\delta_r} - \frac{m\delta_r}{\sqrt{1+m^2}} \right) \vec{D}_r$$

$$+ \frac{1}{\delta_r\sqrt{1+n^2}} \left(\frac{-mm'}{\left(1+m^2\right)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \overbrace{\frac{nn'}{\left(1+n^2\right)^{3/2}}}^{m\mu_r} + \frac{m\mu_r}{\sqrt{1+m^2}} \right) \vec{V}$$

$$+ \frac{1}{\delta_r\sqrt{1+n^2}} \left(\frac{m^2m'}{\left(1+m^2\right)^{3/2}} - \frac{\overbrace{n\delta_r}^{\mu_r}}{\sqrt{1+m^2}\sqrt{1+n^2}} + \frac{\mu_r}{\sqrt{1+m^2}\sqrt{1+n^2}} - \frac{m'}{\sqrt{1+m^2}} \right) \vec{Y}_r$$

$$\dot{\vec{B}}_{Y_r} = \left(\left(\frac{-mm'n}{\left(1+m^2\right)^{3/2}\sqrt{1+n^2}} \right) \vec{D}_r + \left(\frac{-mm'}{\left(1+m^2\right)^{3/2}\sqrt{1+n^2}} \right) \vec{V} + \left(\frac{-m'}{\left(1+m^2\right)^{3/2}} \right) \vec{Y}_r \right) \frac{1}{\delta_r\sqrt{1+n^2}} \tag{4.2.25}$$

elde edilir. $\tau_{Y_r} = -\left\langle \dot{\vec{B}}_{Y_r}, \vec{N}_{Y_r} \right\rangle$ eşitliğinde bulunan (4.2.25) ve (4.2.22) eşitlikleri yerine yazıldığında

$$\tau_{Y_r} = -\left\langle \frac{1}{\delta_r\sqrt{1+n^2}\left(1+m^2\right)^{3/2}}\left(-\frac{mm'n}{\sqrt{1+n^2}}\vec{D}_r - \frac{mm'}{\sqrt{1+n^2}}\vec{V} - m'\vec{Y}_r\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left(-\frac{mn}{\sqrt{1+n^2}}\vec{D}_r - \frac{m}{\sqrt{1+n^2}}\vec{V} - \vec{Y}_r\right)\right\rangle,$$

bulunur. Bulunan eşitlikte iç çarpım işlemi tamamlandığında

$$\tau_{Y_r} = -\frac{1}{\delta_r\sqrt{1+n^2}\left(1+m^2\right)^2}\left(\frac{m^2m'n^2}{1+n^2} + \frac{m^2m'}{1+n^2} + m'\right)$$

$$\tau_{Y_r} = -\frac{m'}{\delta_r\sqrt{1+n^2}\left(1+m^2\right)} \tag{4.2.26}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.3.3: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir D_r – Darboux slant helis ise Y_r küresel gösterge eğrisi büyük çember ya da büyük çember parçasıdır.

İspat: α, M yüzeyi üzerinde bir birim hızlı D_r – Darboux slant helis olsun. Bu durumda Teorem 2.3.4gereği $\frac{\mu_r}{\delta_r} = sabittir.$ $m = \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{{\delta_r}^2}{\left({\delta_r}^2 + {\mu_r}^2\right)^{3/2}}$ eşitliği

$m = \left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)' \frac{1}{\delta_r\left(1+\left(\frac{\mu_r}{\delta_r}\right)^2\right)^{3/2}}$ biçiminde yazılabilir. Buradan $m = 0$ elde edilir. Bu eşitlikten Y_r küresel gösterge eğrisinin (4.2.20) ve (4.2.26) eşitliklerinde elde edilen birinci eğriliği ve burulması,

$$\kappa_{Y_r} = \sqrt{1+m^2} = 1 \quad \text{ve} \quad \tau_{Y_r} = -\frac{m'}{\delta_r\sqrt{1+n^2}\left(1+m^2\right)} = 0$$

biçimindedir. Buradan $\alpha_{Y_r} = \vec{Y}_r$, Y_r küresel gösterge eğrisinin büyük çember ya da büyük çember parçası olduğunu söyleyebiliriz.

Sonuç 4.2.3.4: α eğrisi bir Y_r-Darboux slant helis ise $\alpha_{Y_r}=\vec{Y}_r$, Y_r küresel gösterge eğrisi bir çember ya da çember parçasıdır.

İspat: α eğrisi bir Y_r-Darboux slant helis olsun. Bu durumda Teorem 4.1.2 gereği $\sigma_{Y_r}(s)=\dfrac{\delta_r^2}{\left(\delta_r^2+\mu_r^2\right)^{3/2}}\left(\dfrac{\mu_r}{\delta_r}\right)'(s)$ fonksiyonu sabittir. Bu ifade aynı zamanda $m=\left(\dfrac{\mu_r}{\delta_r}\right)'\dfrac{{\delta_r}^2}{\left({\delta_r}^2+{\mu_r}^2\right)^{3/2}}$ ifadesiyle aynıdır. Yani $m=sabit$ olur. O halde Y_r küresel gösterge eğrisinin birinci eğriliği ve burulması $\kappa_{Y_r}=\sqrt{1+m^2}=sabit$ ve $\tau_{Y_r}=-\dfrac{m'}{\delta_r\sqrt{1+n^2}\left(1+m^2\right)}=0$ olur. Bu eşitliklere dayanarak Y_r küresel gösterge eğrisinin bir çember ya da çember parçası olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek 4.2.3.5: M yüzeyi $X(u,v)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos u,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin u,\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u-2v\right)$ parametrizasyonu ile verilsin. $u=s,v=0$ alındığında M yüzeyi üzerinde $\beta(s)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos s,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin s,\dfrac{\sqrt{2}s}{\sqrt{3}}\right)$ eğrisi elde edilir. $\|\beta'\|=1$ olduğundan β eğrisi birim hızlı eğridir. β eğrisinin Darboux çatısını vektör alanları

$$\vec{T}=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin s,\frac{1}{\sqrt{3}}\cos s,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\vec{U}_\beta=\left(-\cos s,-\sin s,0\right),$$

$$\vec{V}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin s,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos s,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

olarak bulunur. Ayrıca $\beta''=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos s,-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin s,0\right)$ ve $\vec{U}_\beta{}'=\left(\sin s,-\cos s,0\right)$ eşitliklerinden β eğrisinin Darboux çatısının eğrilikleri

$$k_n = \left\langle \beta'', \vec{U}_\beta \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$k_g = \left\langle \beta'', \vec{V} \right\rangle = 0,$$

$$\tau_g = \left\langle \vec{U}_\beta{}', \vec{V} \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikler kullanılarak $RD-$ çatı elemanları

$$\vec{D}_r = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin s, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos s, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right),$$

$$\vec{V} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin s, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos s, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$\vec{Y}_r = \left(-\cos s, -\sin s, 0 \right)$$

$$\delta_r = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \mu_r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

olarak bulunur. Bulunan bu eşitlikler yardımıyla, β eğrisinin D_r küresel gösterge eğrisi

$$\alpha_{D_r} = \vec{D}_r = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin s, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos s, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$$

elde edilir. Ayrıca β eğrisinin D_r küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanları

$$\vec{T}_{D_r} = \left(\cos s, \sin s, 0 \right),$$

$$\vec{N}_{D_r} = \left(-\sin s, \cos s, 0 \right),$$

$$\vec{B}_{D_r} = \left(0,0,1 \right),\ \kappa_{D_r} = \sqrt{3}, \tau_{D_r} = 0$$

şeklinde elde edilir. β eğrisinin V küresel gösterge eğrisi

$$\alpha_V = \vec{V} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin s, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos s, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

olarak bulunur ve β eğrisinin V küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanları

$$\vec{T}_V = (-\cos s, -\sin s, 0),$$

$$\vec{N}_V = (\sin s, -\cos s, 0),$$

$$\vec{B}_V = (0,0,1), \quad \kappa_V = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \tau_V = 0$$

olarak bulunur. Son olarak β eğrisinin Y_r küresel gösterge eğrisi

$$\beta_{Y_r} = \vec{Y}_r = (-\cos s, -\sin s, 0)$$

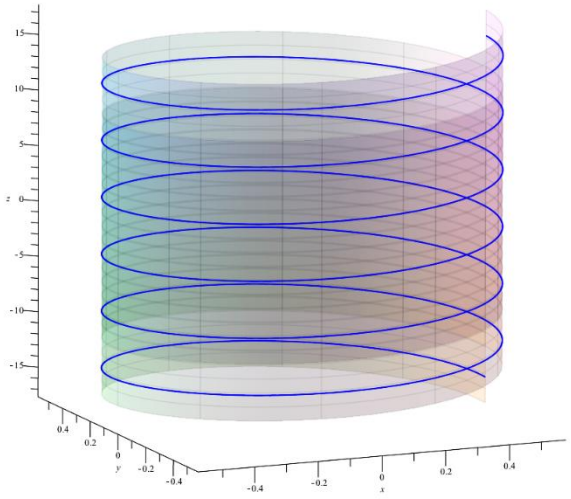
bulunur ve β eğrisinin Y_r küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanları

$$\vec{T}_{Y_r} = (\sin s, -\cos s, 0),$$

$$\vec{N}_{Y_r} = (\cos s, \sin s, 0),$$

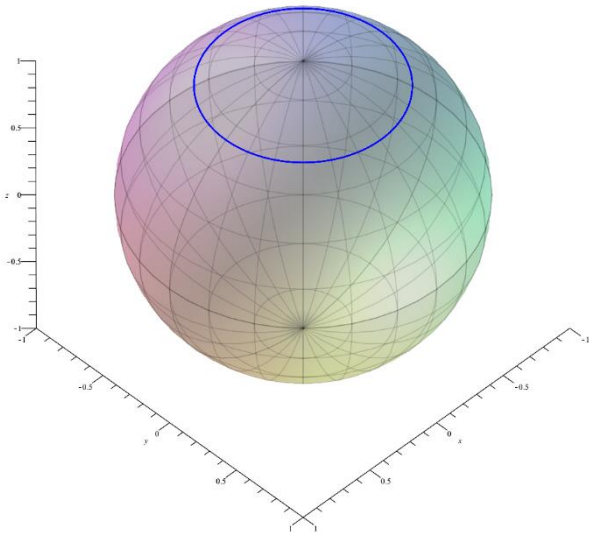
$$\vec{B}_{Y_r} = (0,0,1), \ \kappa_{Y_r} = 1, \tau_{Y_r} = 0$$

olarak elde edilir. M yüzeyi ve β eğrisi ile küresel gösterge eğrilerinin grafikleri aşağıda verilmiştir.

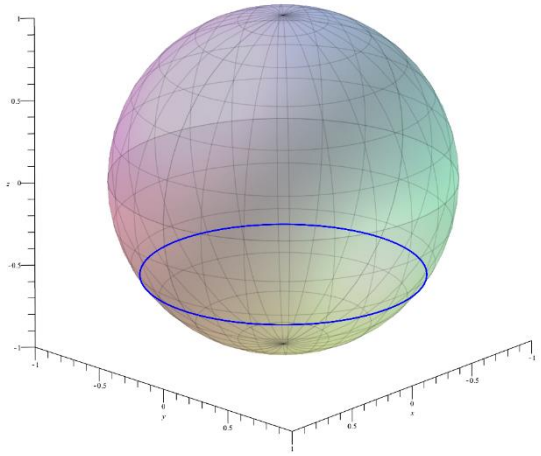


Şekil 4.2.3.5: $X(u,v)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos u,\frac{1}{\sqrt{3}}\sin u,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u-2v\right)$ yüzeyi üzerinde

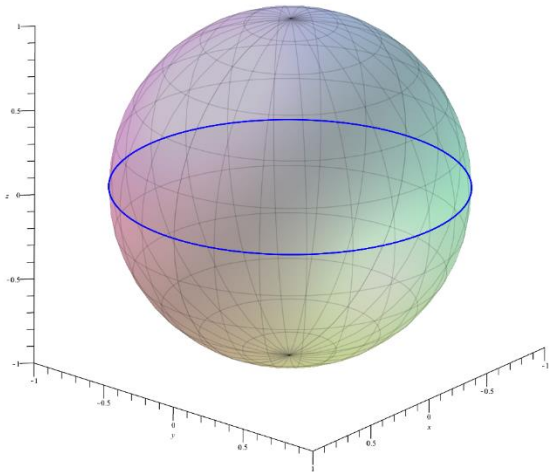
$$\beta(s)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos s,\frac{1}{\sqrt{3}}\sin s,\frac{\sqrt{2}s}{\sqrt{3}}\right)$$ eğrisi



Şekil 4.2.3.6: $\beta_{D_r} = \overset{\mathrm{r}}{D}_r = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin s, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos s, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$, D_r küresel gösterge eğrisi



Şekil 4.2.3.7: $\beta_V = \overset{\mathrm{r}}{V} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin s, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos s, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$, V küresel gösterge eğrisi



Şekil 4.2.3.8: $\alpha_{Y_r} = \vec{Y}_r = \left(-\cos s, -\sin s, 0\right), Y_r$ küresel gösterge eğrisi

5. YÜZEY ÜZERİNDE Y_n- DARBOUX SLANT HELİSLER VE NORMAL DARBOUX ÇATISINA GÖRE KÜRESEL GÖSTERGE EĞRİLERİ

Bu bölümde, E^3 uzayında bir M yüzeyi üzerinde kalan yeni yüzey eğrileri Y_n- Darboux slant helis kavramı tanımlanacak ve yüzey üzerinde kalan eğrinin, Y_n- Darboux slant helis olma şartı verilecektir. Ayrıca $ND-$ çatısına göre küresel gösterge eğrileri tanımlanıp, bu eğrilerin Frenet çatı elemanlarının $ND-$ çatısına göre eşitleri verilecektir. Burada $ND-$ çatısının eğrilikleri $\delta_n \neq 0, \mu_n \neq 0$ biçimindedir.

5.1: Yüzey Üzerinde Normal Darboux Çatısına Göre Y_n- Darboux Slant Helisler

Tanım 5.1.1: M bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin $\vec{Y}_n$ vektör alanı, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisi M yüzeyi üzerinde Y_n- Darboux slant helis olarak adlandırılır.

Teorem 5.1.2: M bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde, $ND-$ çatısı $\left\{\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n\right\}$ ve eğrilikleri δ_n, μ_n olan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Y_n- Darboux slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_{Y_n}(s) = \frac{\delta_n^2}{\left(\delta_n^2 + \mu_n^2\right)^{3/2}} \left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'(s) \tag{5.1.1}$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

İspat: α birim hızlı, $ND-$ çatısı $\left\{\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n\right\}$ ve eğrilikleri δ_n, μ_n olan Y_n- Darboux slant helis olsun. O halde Tanım 5.1.1 gereği α eğrisinin $\vec{Y}_n$ vektör alanı, sabit doğrultulu bir birim $\vec{d}_{Y_n}$ vektörü ile sabit bir β açısı yapar. Dolayısıyla $\left\langle \vec{Y}_n, \vec{d}_{Y_n} \right\rangle = \cos\beta$ yazılabilir. Elde edilen bu ifadenin her iki tarafının türevi alınırsa $\left\langle \vec{Y}_n', \vec{d}_{Y_n} \right\rangle + \left\langle \vec{Y}_n, \vec{d}_{Y_n}' \right\rangle = 0$ eşitliği bulunur. $\vec{d}_{Y_n}$ vektörü sabit olduğundan

$$\left\langle \vec{Y}_n', \vec{d}_{Y_n} \right\rangle = 0$$

olduğu görülür. Bu eşitlikte $ND-$ çatısının türev formülleri yerine yazılarak

$$\left\langle \delta_n \vec{D}_n - \mu_n \vec{T}, \vec{d}_{Y_n} \right\rangle = 0,$$

$$\delta_n \left\langle \vec{D}_n, \vec{d}_{Y_n} \right\rangle - \mu_n \left\langle \vec{T}, \vec{d}_{Y_n} \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \vec{D}_n, \vec{d}_{Y_n} \right\rangle = \frac{\mu_n}{\delta_n} \left\langle \vec{T}, \vec{d}_{Y_n} \right\rangle$$

eşitliği elde edilir. Bulunan bu eşitlikte $\left\langle \vec{T}, \vec{d}_{Y_n} \right\rangle = q$ alınıp, yerine yazılırsa $\left\langle \vec{D}_n, \vec{d}_{Y_n} \right\rangle = \frac{\mu_n}{\delta_n} q$ elde edilir. $\vec{d}_{Y_n}$ vektörü $\left\{ \vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n \right\}$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak

$$\vec{d}_{Y_n} = b_1 \vec{D}_n + b_2 \vec{T} + b_3 \vec{Y}_n \tag{5.1.2}$$

yazılabilir. (5.1.2) eşitliğindeki $\vec{d}_{Y_n}$ vektörüne sırasıyla $\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n$ vektörleri ile iç çarpım uygulanırsa

$$\left\langle \vec{D}_n, \vec{d}_{Y_n} \right\rangle = b_1 = \frac{\mu_n}{\delta_n} q,$$

$$\left\langle \vec{T}, \vec{d}_{Y_n} \right\rangle = b_2 = q,$$

$$\left\langle \vec{Y}_n, \vec{d}_{Y_n} \right\rangle = b_3 = \cos\beta$$

eşitlikleri elde edilir. Bulunan bu ifadeler (5.1.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\vec{d}_{Y_n} = \frac{\mu_n}{\delta_n} q \vec{D}_n + q \vec{T} + \cos\beta \vec{Y}_n \tag{5.1.3}$$

vektörü bulunur. $\vec{d}_{Y_n}$ vektörü birim vektör olduğundan $\left\| \vec{d}_{Y_n} \right\| = 1$ dir. (5.1.3) eşitliğinin normu alındığında

$$\left\|\vec{d}_{Y_n}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\, p\right)^2 + q^2 + \cos^2\beta}\,,$$

$$1 = q^2\left(\frac{{\mu_n}^2}{{\delta_n}^2} + 1\right) + \cos^2\beta$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikte bazı düzenlemeler yapılarak,

$$1 - \cos^2\beta = q^2\left(\frac{{\mu_n}^2 + {\delta_n}^2}{{\delta_n}^2}\right),$$

$$q^2 = \frac{{\delta_n}^2 \sin^2\beta}{{\mu_n}^2 + {\delta_n}^2}\,,$$

$$q = \pm\frac{\delta_n}{\sqrt{{\mu_n}^2 + {\delta_n}^2}}\sin\beta$$

ifadesi elde edilir. Burada $q = \pm\frac{\delta_n}{\sqrt{{\mu_n}^2 + {\delta_n}^2}}\sin\beta$ alınacaktır. Elde edilen bu eşitlik (5.1.3) eşitliğindeki $\vec{d}_{Y_n}$ vektöründe yerine yazılırsa

$$\vec{d}_{Y_n} = \frac{\mu_n}{\sqrt{{\mu_n}^2 + {\delta_n}^2}}\sin\beta\vec{D}_n + \frac{\delta_n}{\sqrt{{\mu_n}^2 + {\delta_n}^2}}\sin\beta\vec{T} + \cos\beta\vec{Y}_n \qquad (5.1.4)$$

elde edilir. $\vec{d}_{Y_n}$ vektörü sabit vektör olduğundan $\vec{d}_{Y_n}{}' = \vec{0}$ dır. (5.1.4) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\vec{0} = \left(\frac{\mu_n}{\sqrt{{\mu_n}^2 + {\delta_n}^2}}\right)'\sin\beta\vec{D}_n + \frac{\mu_n}{\sqrt{{\mu_n}^2 + {\delta_n}^2}}\sin\beta\vec{D}_n{}' + \left(\frac{\delta_n}{\sqrt{{\mu_n}^2 + {\delta_n}^2}}\right)'\sin\beta\vec{T}$$
$$+ \frac{\delta_n}{\sqrt{{\mu_n}^2 + {\delta_n}^2}}\sin\beta\vec{T}' + \cos\beta\vec{Y}_n{}'$$

bulunur. Bu eşitlikte gerekli türev alma işlemleri yapılıp, $ND-$ çatısının türev formülleri yerine yazılarak

$$\vec{0}=\frac{\delta_n \sin\beta\left(\mu_n'\delta_n-\delta_n'\mu_n\right)}{\left(\mu_n^{\,2}+\delta_n^{\,2}\right)^{3/2}}\vec{D}_n+\frac{\mu_n}{\sqrt{\mu_n^{\,2}+\delta_n^{\,2}}}\sin\beta\left(-\delta_n\vec{Y}_n\right)+\frac{\mu_n \sin\beta\left(\delta_n'\mu_n-\mu_n'\delta_n\right)}{\left(\mu_n^{\,2}+\delta_n^{\,2}\right)^{3/2}}\vec{T}$$
$$+\frac{\delta_n}{\sqrt{\mu_n^{\,2}+\delta_n^{\,2}}}\sin\beta\left(\mu_n\vec{Y}_n\right)+\cos\beta\left(\delta_n\vec{D}_n-\mu_n\vec{T}\right)$$

$$\vec{0}=\left(\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'\frac{\delta_n^{\,3}}{\left(\mu_n^{\,2}+\delta_n^{\,2}\right)^{3/2}}\sin\beta+\delta_n\cos\beta\right)\vec{D}_n+\left(-\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'\frac{\delta_n^{\,2}\mu_n}{\left(\mu_n^{\,2}+\delta_n^{\,2}\right)^{3/2}}\sin\beta-\mu_n\cos\beta\right)\vec{T}$$

eşitliği elde edilir. $\vec{D}_n$ ve $\vec{T}$ vektörleri birbirine dik vektörler olduğundan

$$\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'\frac{\delta_n^{\,3}}{\left(\mu_n^{\,2}+\delta_n^{\,2}\right)^{3/2}}\sin\beta+\delta_n\cos\beta=0,\ -\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'\frac{\delta_n^{\,2}\mu_n}{\left(\mu_n^{\,2}+\delta_n^{\,2}\right)^{3/2}}\sin\beta-\mu_n\cos\beta=0$$

eşitliklerinin sağlanması gerekir. Bu eşitliklerden

$$\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'\frac{\delta_n^{\,3}}{\left(\mu_n^{\,2}+\delta_n^{\,2}\right)^{3/2}}\sin\beta=-\delta_n\cos\beta,$$

$$\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'\frac{\delta_n^{\,2}}{\left(\mu_n^{\,2}+\delta_n^{\,2}\right)^{3/2}}=-\cot\beta$$

bulunur. Burada β açısı sabit olduğundan

$$\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'\frac{\delta_n^{\,2}}{\left(\mu_n^{\,2}+\delta_n^{\,2}\right)^{3/2}}=-\cot\beta=sabit$$

elde edilir. Bu ifade

$$\sigma_{Y_n}(s)=\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'\frac{\delta_n^{\,2}}{\left(\mu_n^{\,2}+\delta_n^{\,2}\right)^{3/2}}(s)=sabit,$$

biçiminde gösterilebilir.

Tersine $\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{{\delta_n}^2}{\left({\mu_n}^2+{\delta_n}^2\right)^{3/2}}(s) = -\cot\beta = sabit$ olsun. Buradan

$$\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{{\delta_n}^2}{\left({\mu_n}^2+{\delta_n}^2\right)^{3/2}} \sin\beta = -\cos\beta$$

yazılabilir. Şimdi β sabit bir açı olmak üzere bir $\vec{d}_{Y_n}$ vektörünü

$$\vec{d}_{Y_n} = \frac{\mu_n}{\sqrt{{\mu_n}^2+{\delta_n}^2}} \sin\beta\vec{D}_n + \frac{\delta_n}{\sqrt{{\mu_n}^2+{\delta_n}^2}} \sin\beta\vec{T} + \cos\beta\vec{Y}_n$$

biçiminde ele alalım. Alınan $\vec{d}_{Y_n}$ vektörüne, $\vec{Y}_n$ vektörü ile iç çarpım uygulanırsa $\left\langle \vec{Y}_n, \vec{d}_{Y_n} \right\rangle = \cos\beta = sabit,$ elde edilir. Bulunan $\vec{d}_{Y_n}$ vektörünün türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\vec{d}_{Y_n}{}' = &\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{{\mu_n}^2+{\delta_n}^2}}\right)' \sin\beta\vec{D}_n + \frac{\mu_n}{\sqrt{{\mu_n}^2+{\delta_n}^2}} \sin\beta\vec{D}_n{}' \\ &+ \left(\frac{\delta_n}{\sqrt{{\mu_n}^2+{\delta_n}^2}}\right)' \sin\beta\vec{T} + \frac{\delta_n}{\sqrt{{\mu_n}^2+{\delta_n}^2}} \sin\beta\vec{T}' + \cos\beta\vec{Y}_n{}'\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli türev alma işlemleri yapılıp, $ND-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\vec{d}_{Y_n}{}' = &\left(\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{{\delta_n}^3}{\left({\mu_n}^2+{\delta_n}^2\right)^{3/2}} \sin\beta + \delta_n\cos\beta\right)\vec{D}_n \\ &+ \left(-\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{{\delta_n}^2\mu_n}{\left({\mu_n}^2+{\delta_n}^2\right)^{3/2}} \sin\beta - \mu_n\cos\beta\right)\vec{T}\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu eşitlikte $\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{{\delta_n}^2}{\left({\mu_n}^2+{\delta_n}^2\right)^{3/2}} \sin\beta = -\cos\beta$ ifadesi yerine yazılırsa $\vec{d}_{Y_n}{}' = \vec{0}$ elde edilir. Bu eşitlikten $\vec{d}_{Y_n}$ vektörünün sabit olduğu görülür. α

eğrisinin $ND-$ çatısının $\vec{Y}_n$ vektörü sabit $\vec{d}_{Y_n}$ vektörü ile sabit açı yaptığından Tanım (5.1.1) gereği α eğrisi Y_n- Darboux slant helistir.

Sonuç 5.1.3: α eğrisinin $ND-$ çatısına göre Y_n-Darboux slant helis ekseni

$$\vec{d}_{Y_n}=\frac{\mu_n}{\sqrt{\mu_n{}^2+\delta_n{}^2}}\sin\beta\vec{D}_n+\frac{\delta_n}{\sqrt{\mu_n{}^2+\delta_n{}^2}}\sin\beta\vec{T}+\cos\beta\vec{Y}_n$$

biçimindedir.

Sonuç 5.1.4: α eğrisi $\sigma_{Y_n}(s)=0$ olacak biçimde bir Y_n-Darboux slant helis ise α eğrisi D_n-Darboux slant helistir.

İspat: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha:I\subset IR\to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, $\sigma_{Y_n}(s)=0$ olacak biçimde bir Y_n-Darboux slant helis olsun. Bu durumda (5.1.1) eşitliğinden $\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'\frac{\delta_n{}^2}{\left(\mu_n{}^2+\delta_n{}^2\right)^{3/2}}=0$ bulunur. $\delta_n\neq 0$ ve $\mu_n\neq 0$ olduğundan bu eşitliğin sağlanabilmesi için $\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'=0$ olması gerekir. Bu eşitlikten $\frac{\mu_n}{\delta_n}=sabit$ elde edilir. O halde Teorem 2.5.4 gereğince α eğrisi D_n-Darboux slant helistir.

Sonuç 5.1.5: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha:I\subset IR\to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve Darboux çatısının eğrilikleri k_n,k_g ve τ_g olsun. α eğrisinin Y_n- Darboux slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s\in I$ için

$$\sigma_{Y_n}(s)=\frac{\left(\frac{k_g{}^2}{k_n{}^2+k_g{}^2}\left(\frac{k_n}{k_g}\right)'+\tau_g\right)^2}{\left(\left(\frac{k_g{}^2}{k_n{}^2+k_g{}^2}\left(\frac{k_n}{k_g}\right)'+\tau_g\right)^2+k_n{}^2+k_g{}^2\right)^{3/2}}\left(\frac{\sqrt{k_n{}^2+k_g{}^2}}{\frac{k_g{}^2}{k_n{}^2+k_g{}^2}\left(\frac{k_n}{k_g}\right)'+\tau_g}\right)'(s) \quad (5.1.5)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

İspat: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, $Y_n -$ Darboux slant helis olsun. $\delta_n = \dfrac{k_g{}^2}{k_n{}^2 + k_g{}^2}\left(\dfrac{k_n}{k_g}\right)' + \tau_g$ ve $\mu_n = \sqrt{k_n{}^2 + k_g{}^2}$ eşitlikleri (5.1.1) denkleminde yerine yazılırsa yukarıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1.6: α eğrisinin $Y_n -$ Darboux slant helis ekseninin Darboux çatı elemanları cinsinden eşiti

$$\vec{d}_{Y_n} = \frac{\dfrac{k_g{}^2}{k_n{}^2 + k_g{}^2}\left(\dfrac{k_n}{k_g}\right)' + \tau_g}{\sqrt{\left(\dfrac{k_g{}^2}{k_n{}^2 + k_g{}^2}\left(\dfrac{k_n}{k_g}\right)' + \tau_g\right)^2 + k_n{}^2 + k_g{}^2}} \sin\beta\vec{T}$$

$$- \left(\frac{k_n \sin\beta}{\sqrt{\left(\dfrac{k_g{}^2}{k_n{}^2 + k_g{}^2}\left(\dfrac{k_n}{k_g}\right)' + \tau_g\right)^2 + k_n{}^2 + k_g{}^2}} + \frac{k_g \cos\beta}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \right) \vec{V}$$

$$+ \left(\frac{k_g \sin\beta}{\sqrt{\left(\dfrac{k_g{}^2}{k_n{}^2 + k_g{}^2}\left(\dfrac{k_n}{k_g}\right)' + \tau_g\right)^2 + k_n{}^2 + k_g{}^2}} + \frac{k_n \cos\beta}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \right) \vec{U} \qquad (5.1.6)$$

biçimindedir.

İspat: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. $\vec{D}_n = \dfrac{-k_n}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}}\vec{V} + \dfrac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}}\vec{U}$ ve $\vec{Y}_n = \vec{D}_n \times \vec{T}$ eşitliklerinden

$$\vec{Y}_n = \left(\frac{-k_n}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \vec{V} + \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \vec{U} \right) \times \vec{T},$$

$$\vec{Y}_n = \frac{-k_n}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \overbrace{\left(\vec{V} \times \vec{T} \right)}^{-\vec{U}} + \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \overbrace{\left(\vec{U} \times \vec{T} \right)}^{\vec{V}},$$

$$\vec{Y}_n = \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \vec{V} + \frac{k_n}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \vec{U}$$

yazılabilir. $\vec{D}_n$ ve $\vec{Y}_n$ vektörleri (5.1.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\vec{d}_{Y_n} = \frac{\mu_n}{\sqrt{\mu_n{}^2 + \delta_n{}^2}} \sin\beta \left(\frac{-k_n}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \vec{V} + \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \vec{U} \right)$$
$$+ \frac{\delta_n}{\sqrt{\mu_n{}^2 + \delta_n{}^2}} \sin\beta \vec{T} + \cos\beta \left(\frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \vec{V} + \frac{k_n}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \vec{U} \right),$$

$$\vec{d}_{Y_n} = \frac{\delta_n}{\sqrt{\mu_n{}^2 + \delta_n{}^2}} \sin\beta \vec{T} + \left(-\frac{\mu_n \sin\beta}{\sqrt{\mu_n{}^2 + \delta_n{}^2}} \frac{k_n}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} + \frac{k_g \cos\beta}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \right) \vec{V}$$
$$+ \left(\frac{\mu_n \sin\beta}{\sqrt{\mu_n{}^2 + \delta_n{}^2}} \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} + \frac{k_n \cos\beta}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}} \right) \vec{U}$$

elde edilir. Bulunan bu ifadede $\mu_n = \sqrt{k_n{}^2 + k_g{}^2}$ ve $\delta_n = \frac{k_g{}^2}{k_n{}^2 + k_g{}^2} \left(\frac{k_n}{k_g} \right)' + \tau_g$ eşitlikleri yerine yazılırsa (5.1.6) eşitliği biçiminde Darboux çatı elamanlarına bağlı Y_n – Darboux slant helisin ekseni elde edilir.

Sonuç 5.1.7: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, ND – çatısı $\left\{ \vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n \right\}$ ve eğrilikleri δ_n, μ_n olan bir Y_n – Darboux slant helis olsun. Bu durumda,

i) α, M yüzeyi üzerinde $k_n \neq 0$ olan bir geodezik eğri ise α eğrisi $\vec{d}_{Y_n} = \frac{\tau \sin\beta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{T} + \cos\beta\vec{N} + \frac{\kappa \sin\beta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{B}$ eksenli bir slant helis eğrisidir.

ii) α, M yüzeyi üzerinde $k_g \neq 0$ olan bir asimptotik eğri ise α eğrisi $\vec{d}_{Y_n} = \frac{\tau \sin\beta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{T} - \cos\beta\vec{N} + \frac{\kappa \sin\beta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{B}$ eksenli bir slant helistir.

iii) α, M yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi ise α eğrisi

$$\vec{d}_{Y_n} = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\sin\beta\vec{T} + \cos\beta\vec{N} + \frac{\kappa \sin\beta}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\vec{B}$$ eksenli bir slant helistir.

İspat: i) α, $Y_n -$ Darboux slant helis ve geodezik bir eğri olsun. O halde Teorem 2.2.12 gereği $k_g = 0$ dır. $k_n \neq 0$ olduğundan (2.1) eşitlikleri kullanılarak $k_n = \mp\kappa$ ve $\tau_g = \tau$ elde edilir. α, $Y_n -$ Darboux slant helis olduğundan elde edilen bu eşitlikler (5.1.5) denkleminde yerine yazılırsa $\sigma_{Y_n}(s) = \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' \frac{\tau^2}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}} = sabit$ bulunur. Buradan bu ifadeye denk olan $\sigma_{Y_n}(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \frac{\kappa^2}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}} = sabit$ elde edilir. Teorem 2.1.20 gereğince α eğrisi bir slant helistir. Ayrıca Tanım 2.2.18 de verilen Darboux çatısı ile Frenet çatısı arasındaki ilişkiler, (2.1) deki eşitlikler, bulunan $k_n = \mp\kappa$ ve $\tau_g = \tau$ değerleri (5.1.6) da kullanılırsa, $Y_n -$ Darboux slant helisin Frenet çatısının vektörleri cinsinden ekseni

$$\vec{d}_{Y_n} = \frac{\tau \sin\beta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{T} + \frac{-\kappa \sin\beta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{V} + \cos\beta\vec{U},$$

$$\vec{d}_{Y_n} = \frac{\tau \sin\beta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{T} + \frac{-\kappa \sin\beta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(\cos\phi\vec{N} - \sin\phi\vec{B}\right) + \cos\beta\left(\sin\phi\vec{N} + \cos\phi\vec{B}\right),$$

$$\vec{d}_{Y_n} = \frac{\tau \sin\beta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{T} + \left(\frac{-\kappa \sin\beta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\frac{k_g}{\kappa} + \cos\beta\frac{k_n}{\kappa}\right)\vec{N} + \left(\frac{\kappa \sin\beta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\frac{k_n}{\kappa} + \cos\beta\frac{k_g}{\kappa}\right)\vec{B},$$

$$\vec{d}_{Y_n} = \frac{\tau \sin\beta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{T} + \cos\beta\vec{N} + \frac{\kappa\sin\beta}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\vec{B}$$

biçiminde elde edilir .

İspat: ii) İspatı yukarıdaki ispata benzer şekilde yapılır.

İspat: iii) α , Y_n – Darboux slant helis ve bir eğrilik çizgisi olsun. Bu durumda Teorem 2.2.12 gereğince $\tau_g = 0$ dır. Bu eşitlik (5.1.5) denkleminde kullanılırsa

$$\sigma_{Y_n}(s) = \frac{\left(\frac{k_g{}^2}{k_n{}^2+k_g{}^2}\left(\frac{k_n}{k_g}\right)'\right)^2}{\left(\left(\frac{k_g{}^2}{k_n{}^2+k_g{}^2}\left(\frac{k_n}{k_g}\right)'\right)^2 + k_n{}^2 + k_g{}^2\right)^{3/2}}\left(\frac{\sqrt{k_n{}^2+k_g{}^2}}{\frac{k_g{}^2}{k_n{}^2+k_g{}^2}\left(\frac{k_n}{k_g}\right)'}\right)'(s) = sabit \quad (5.1.7)$$

elde edilir. Ayrıca $\tau_g = 0$ eşitliği dikkate alındığında (2.1) eşitliklerinden $\vec{N}_T = \frac{|\mu_n|}{\sqrt{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2}}\left(\frac{\delta_n}{|\mu_n|}\vec{D}_n \mp \vec{T}\right)$, $\frac{k_n}{k_g} = \tan\phi$ ve $k_n{}^2 + k_g{}^2 = \kappa^2$ bulunur. Elde edilen bu ifadeler (5.1.7) de yerine yazıldığında

$$\sigma_{Y_n}(s) = \frac{\left(\tan\phi'\cos^2\phi\right)^2}{\left(\left(\tan\phi'\cos^2\phi\right)^2+\kappa^2\right)^{3/2}}\left(\frac{\kappa}{\tan\phi'\cos^2\phi}\right)'(s) = sabit$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$\sigma_{Y_n}(s) = \frac{\left(\phi'\left(1+\tan^2\phi\right)\cos^2\phi\right)^2}{\left(\left(\phi'\left(1+\tan^2\phi\right)\cos^2\phi\right)^2+\kappa^2\right)^{3/2}}\left(\frac{\kappa}{\phi'\left(1+\tan^2\phi\right)\cos^2\phi}\right)'(s) = sabit$$

$$\sigma_{Y_n}(s) = \frac{(\phi')^2}{\left((\phi')^2+\kappa^2\right)^{3/2}}\left(\frac{\kappa}{\phi'}\right)'(s) = sabit$$

elde edilir. Bu eşitlikte $\tau = \phi'$ yerine yazıldığında

$$\sigma_{Y_n}(s)=\frac{\tau^2}{\left(\tau^2+\kappa^2\right)^{3/2}}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'(s)=sabit$$

ya da buna denk olarak

$$\sigma_{Y_n}(s)=-\frac{\kappa^2}{\left(\tau^2+\kappa^2\right)^{3/2}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s)=sabit$$

bulunur. Teorem 2.2.20 gereği α eğrisi bir slant helis eğrisidir. Ayrıca $\tau_g=0$ eşitliği (5.1.6) da kullanılırsa, Y_n – Darboux slant helisin ekseni

$$\vec{d}_{Y_n}=\frac{\frac{k_g{}^2}{k_n{}^2+k_g{}^2}\left(\frac{k_n}{k_g}\right)'}{\sqrt{\left(\frac{k_g{}^2}{k_n{}^2+k_g{}^2}\left(\frac{k_n}{k_g}\right)'\right)^2+k_n{}^2+k_g{}^2}}\sin\beta\vec{T}$$

$$-\left(\frac{k_n\sin\beta}{\sqrt{\left(\frac{k_g{}^2}{k_n{}^2+k_g{}^2}\left(\frac{k_n}{k_g}\right)'\right)^2+k_n{}^2+k_g{}^2}}+\frac{k_g\cos\beta}{\sqrt{k_g^2+k_n^2}}\right)\vec{V}$$

$$+\left(\frac{k_g\sin\beta}{\sqrt{\left(\frac{k_g{}^2}{k_n{}^2+k_g{}^2}\left(\frac{k_n}{k_g}\right)'\right)^2+k_n{}^2+k_g{}^2}}+\frac{k_n\cos\beta}{\sqrt{k_g^2+k_n^2}}\right)\vec{U} \qquad (5.1.8)$$

biçiminde elde edilir. Bulunan bu eşitlikte (2.1) deki eşitlikler yerine yazıldığında

$$\vec{d}_{Y_n} = \frac{\phi'}{\sqrt{\phi'^2+\kappa^2}}\sin\beta\vec{T} + \left(-\frac{\kappa\sin\phi\sin\beta}{\sqrt{\phi'^2+\kappa^2}} + \cos\phi\cos\beta\right)\vec{V} + \left(\frac{\kappa\cos\phi\sin\beta}{\sqrt{\phi'^2+\kappa^2}} + \sin\phi\cos\beta\right)\vec{U}$$

$$\vec{d}_{Y_n} = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\sin\beta\vec{T} + \left(-\frac{\kappa\sin\phi\sin\beta}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}} + \cos\phi\cos\beta\right)\vec{V} + \left(\frac{\kappa\cos\phi\sin\beta}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}} + \sin\phi\cos\beta\right)\vec{U} \tag{5.1.9}$$

bulunur. Tanım 2.2.18 de verilen Darboux çatısı ile Frenet çatısı arasındaki ilişkiler (5.1.9) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\vec{d}_{Y_n} = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\sin\beta\vec{T} + \left(-\frac{\kappa\sin\phi\sin\beta}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}} + \cos\phi\cos\beta\right)\left(\cos\phi\vec{N} - \sin\phi\vec{B}\right)V + \left(\frac{\kappa\cos\phi\sin\beta}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}} + \sin\phi\cos\beta\right)\left(\sin\phi\vec{N} + \cos\phi\vec{B}\right)$$

$$\vec{d}_{Y_n} = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\sin\beta\vec{T} + \left(-\frac{\kappa\cos\phi\sin\phi\sin\beta}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}} + \frac{\kappa\cos\phi\sin\phi\sin\beta}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}} + \cos^2\phi\cos\beta + \sin^2\phi\cos\beta\right)\vec{N}$$

$$+\left(\frac{\kappa\sin^2\phi\sin\beta}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}} - \cos\phi\sin\phi\cos\beta + \frac{\kappa\cos^2\phi\sin\beta}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}} + \cos\phi\sin\phi\cos\beta\right)\vec{B}$$

$$\vec{d}_{Y_n} = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\sin\beta\vec{T} + \cos\beta\vec{N} + \frac{\kappa\sin\beta}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}\vec{B}$$

biçiminde $Y_n -$ Darboux slant helisin Frenet çatısının vektörleri cinsinden ekseni elde edilir.

Örnek 5.1.8: $X(u,v) = \left(\sqrt{2}v, \sin u, \cos u\right)$ parametrizasyonu ile silindir yüzeyi verilsin. $u = \frac{s}{\sqrt{3}}$ ve $v = \frac{s}{\sqrt{3}}$ alınarak bu yüzey üzerinde

$$\alpha(s)=\left(\frac{\sqrt{2}s}{\sqrt{3}},\sin\frac{s}{\sqrt{3}},\cos\frac{s}{\sqrt{3}}\right)$$

eğrisi elde edilir. $\alpha(s)'=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{s}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{s}{\sqrt{3}}\right)$ ve $\left\|\alpha(s)'\right\|=1$ olduğundan α eğrisi birim hızlıdır. Bu eğrinin Darboux çatı elemanlarını elde edelim. α eğrisi birim hızlı olduğundan

$$\vec{T}(s)=\alpha(s)'=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{s}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{s}{\sqrt{3}}\right)$$

şeklinde elde edilir. $\vec{X}_u=(0,\cos u,-\sin u)$, $\vec{X}_v=\left(\sqrt{2},0,0\right)$ eşitliklerinden

$$\vec{X}_u\times\vec{X}_v=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & \cos u & -\sin u \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}=\left(0,-\sqrt{2}\sin u,-\sqrt{2}\cos u\right)$$

elde edilir. Ayrıca $\left\|\vec{X}_u\times\vec{X}_v\right\|=\sqrt{2}$ bulunarak yüzeyin birim normal vektörü

$\vec{U}=\frac{\vec{X}_u\times\vec{X}_v}{\left\|\vec{X}_u\times\vec{X}_v\right\|}=(0,-\sin u,-\cos u)$ bulunur. Böylece normal vektör alanının α eğrisine kısıtlanmışı

$$\vec{U}_\alpha(s)=\left(0,-\sin\frac{s}{\sqrt{3}},-\cos\frac{s}{\sqrt{3}}\right)$$

şeklinde elde edilir. Bulunan $\vec{T}(s)$ ve $\vec{U}_\alpha(s)$ vektörleri $\vec{V}(s)=\vec{U}_\alpha(s)\times\vec{T}(s)$ eşitliğinde yerlerine yazılırlarsa

$$\vec{V}(s)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\frac{s}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin\frac{s}{\sqrt{3}}\right)$$

bulunur. Ayrıca $\alpha(s)''=\left(0,-\frac{1}{3}\sin\frac{s}{\sqrt{3}},-\frac{1}{3}\cos\frac{s}{\sqrt{3}}\right)$ ve

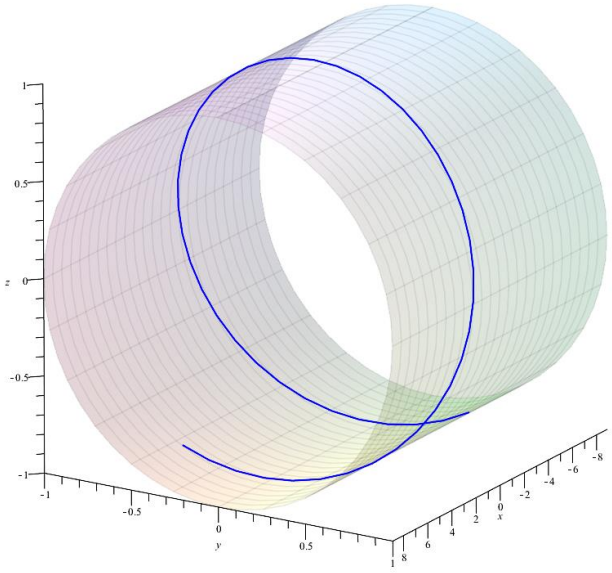
$\vec{U}_\alpha(s)' = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{s}{\sqrt{3}}\right)$ eşitlikleri kullanılarak Darboux çatısının eğrilikleri

$$k_n = \left\langle \alpha'', \vec{U}_\alpha \right\rangle = \frac{1}{3},$$

$$k_g = \left\langle \alpha'', \vec{V} \right\rangle = 0,$$

$$\tau_g = \left\langle \vec{U}_\alpha{}', \vec{V} \right\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

şeklinde elde edilir. Bulunan bu değerler Sonuç 5.1.5 de yazılırsa $\sigma_{Y_n}(s) = 0 = sabit$ olduğundan α eğrisi M yüzeyi üzerinde bir $Y_n -$ Darboux slant helistir. Grafiği Şekil 5.1.8 deki gibidir.



Şekil 5.1.8: $X(u,v) = \left(\sqrt{2}v, \sin u, \cos u\right)$ yüzeyi üzerinde

$$\alpha(s) = \left(\frac{\sqrt{2}s}{\sqrt{3}}, \sin\frac{s}{\sqrt{3}}, \cos\frac{s}{\sqrt{3}}\right) \text{ eğrisi}$$

5.2: Yüzey Üzerinde Normal Darboux Çatısına Göre Küresel Gösterge Eğrileri

Bu bölümde $ND-$ çatısının $\vec{D}_n, \vec{T}$ ve $\vec{Y}_n$ birim vektör alanlarının küresel gösterge eğrileri tanımlanıp, tanımlanan bu eğrilerin Frenet çatı elemanlarının $ND-$ çatısı cinsinden eşitleri bulunacaktır. Burada $ND-$ çatısının eğrilikleri $\delta_n \neq 0, \mu_n \neq 0$ biçimindedir.

5.2.1: D_n Küresel Gösterge Eğrisi

Tanım 5.2.1.1: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, $ND-$çatısı $\left\{\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n\right\}$ ve eğrilikleri δ_n, μ_n olan bir eğri olsun. α eğrisi çizilirken tüm $\vec{D}_n$ vektörleri orijine taşınırsa, birim küre yüzeyi üzerinde meydana gelen eğriye α eğrisinin D_n küresel gösterge eğrisi denir. α eğrisinin D_n küresel gösterge eğrisinin denklemi $\alpha_{D_n} = \vec{D}_n$ olur. D_n küresel gösterge eğrisinin yay parametresi s_n olmak üzere $s_n \neq s$ ve yay parametresi $ds_n = \left\|\vec{D}_n'\right\| ds$ dir. Burada türev alma işlemlerinde s parametresine göre türev "$'$" ve s_n parametresine göre türev "$\square$"sembolü ile gösterilecektir.

Teorem 5.2.1.2: M, E^3 de bir yüzey, $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve $\alpha_{D_n} = \vec{D}_n$, D_n küresel gösterge eğrisi olsun. $ND-$çatı elemanları $\left\{\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n, \delta_n, \mu_n\right\}$ve α eğrisinin D_n küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanları $\left\{\vec{T}_{D_n}, \vec{N}_{D_n}, \vec{B}_{D_n}, \kappa_{D_n}, \tau_{D_n}\right\}$ olmak üzere D_n küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanlarının $ND-$ çatı elemanları cinsinden eşitleri

$$\vec{T}_{D_n} = -\vec{Y}_n,$$

$$\vec{N}_{D_n} = -\frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n^2 + \mu_n^2}} \vec{D}_n + \frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n^2 + \mu_n^2}} \vec{T},$$

$$\vec{B}_{D_n} = \frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}}\vec{D}_n + \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}}\vec{T},$$

$$\kappa_{D_n} = \sqrt{1+\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)^2}, \quad \tau_{D_n} = \left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{|\delta_n|}{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}$$

şeklindedir.

İspat: $M \quad E^3$ de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve α eğrisinin D_n küresel gösterge eğrisi α_{D_n} olsun. Tanım 5.2.1.1 gereği

$$\alpha_{D_n}(s_n) = \vec{D}_n(s)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanının s_n parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha_{D_n}}{ds_n} = \frac{d\vec{D}_n}{ds_n}$$

elde edilir. Bu eşitlikte zincir kuralı uygulanırsa

$$\frac{d\alpha_{D_n}}{ds_n} = \frac{d\vec{D}_n}{ds}\frac{ds}{ds_n}$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikte $ND-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\vec{T}_{D_n} = \vec{D}_n{}' \frac{ds}{ds_n},$$

$$\vec{T}_{D_n} = \left(-\delta_n \vec{Y}_n\right)\frac{ds}{ds_n} \tag{5.2.1}$$

bulunur. $\vec{T}_{D_n}$ birim vektör olduğundan $\left\|\vec{T}_{D_n}\right\| = 1$ dir. (5.2.1) eşitliğinin her iki tarafının normu alındığında $1 = |\delta_n|\frac{ds}{ds_n}$ bulunur. Bu eşitlikten $\frac{ds}{ds_n} = \frac{1}{|\delta_n|}$ elde edilir. Bulunan bu ifade (5.2.1) de yerine yazılırsa $\vec{T}_{D_n} = \mp\vec{Y}_n$ elde edilir. Burada

$$\vec{T}_{D_n} = -\vec{Y}_n \tag{5.2.2}$$

seçilerek devam edilecektir. α eğrisinin D_n küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının birinci eğriliği $\kappa_{D_n} = \left\| \dot{\vec{T}}_{D_n} \right\|$ yazılabilir. (5.2.2) eşitliğinin her iki tarafının s_n parametresine göre türevi alındığında $\dot{\vec{T}}_{D_n} = \dfrac{\vec{T}_{D_n}}{ds_n} = -\dfrac{d\vec{Y}_n}{ds_n}$ eşitliği elde edilir. Bulunan bu eşitlikte zincir kuralı uygulanıp, $ND-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{T}}_{D_n} = -\frac{d\vec{Y}_n}{ds}\frac{ds}{ds_n},$$

$$\dot{\vec{T}}_{D_n} = -\vec{Y}_n' \frac{ds}{ds_n},$$

$$\dot{\vec{T}}_{D_n} = -\left(\delta_n \vec{D}_n - \mu_n \vec{T}\right)\frac{1}{|\delta_n|},$$

$$\dot{\vec{T}}_{D_n} = \mp \vec{D}_n + \frac{\mu_n}{|\delta_n|}\vec{T} \tag{5.2.3}$$

elde edilir. Elde edilen (5.2.3) eşitliğinin normu alındığında

$$\kappa_{D_n} = \left\| \dot{\vec{T}}_{D_n} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)^2} = \frac{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}}{|\delta_n|} \tag{5.2.4}$$

bulunur. Benzer şekilde α eğrisinin D_n küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının asli normal vektörü $\vec{N}_{D_n} = \dfrac{1}{\kappa_{D_n}}\dot{\vec{T}}_{D_n}$ yazılabilir. Bu eşitlikte (5.2.3) ve (5.2.4) de bulunan ifadeler yerine yazılırsa

$$\vec{N}_{D_n} = \frac{|\delta_n|}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}}\left(\mp \vec{D}_n + \frac{\mu_n}{|\delta_n|}\vec{T}\right),$$

$$\vec{N}_{D_n} = \mp \frac{|\delta_n|}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}}\vec{D}_n + \frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}}\vec{T}$$

elde edilir. Burada

$$\vec{N}_{D_n} = -\frac{\delta_n}{\sqrt{{\delta_n}^2 + {\mu_n}^2}}\vec{D}_n + \frac{\mu_n}{\sqrt{{\delta_n}^2 + {\mu_n}^2}}\vec{T} \tag{5.2.5}$$

Seçilerek işlemlere devam edilecektir. α eğrisinin D_n küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının binormal vektörü $\vec{B}_{D_n} = \vec{T}_{D_n} \times \vec{N}_{D_n}$ yazılabilir. Bu eşitlikte (5.2.5) ve (5.2.2) deki ifadeler yerine yazılırsa

$$\vec{B}_{D_n} = -\vec{Y}_n \times \left(-\frac{\delta_n}{\sqrt{{\delta_n}^2 + {\mu_n}^2}}\vec{D}_n + \frac{\mu_n}{\sqrt{{\delta_n}^2 + {\mu_n}^2}}\vec{T} \right),$$

$$\vec{B}_{D_n} = \frac{\delta_n}{\sqrt{{\delta_n}^2 + {\mu_n}^2}}\overbrace{\left(\vec{Y}_n \times \vec{D}_n\right)}^{\vec{T}} - \frac{\mu_n}{\sqrt{{\delta_n}^2 + {\mu_n}^2}}\overbrace{\left(\vec{Y}_n \times \vec{T}\right)}^{-\vec{D}_n}$$

$$\vec{B}_{D_n} = \frac{\mu_n}{\sqrt{{\delta_n}^2 + {\mu_n}^2}}\vec{D}_n + \frac{\delta_n}{\sqrt{{\delta_n}^2 + {\mu_n}^2}}\vec{T} \tag{5.2.6}$$

biçiminde α eğrisinin D_n küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının binormal vektörü elde edilir. Şimdi α eğrisinin D_n küresel gösterge eğrisinin burulmasını $\tau_{D_n} = -\left\langle \dot{\vec{B}}_{D_n}, \vec{N}_{D_n} \right\rangle$ eşitliğinden bulabiliriz. $\vec{B}_{D_n}$ vektörünün s_n parametresine göre türevi alınıp, zincir kuralı uygulanırsa

$$\dot{\vec{B}}_{D_n} = \frac{d\vec{B}_{D_n}}{ds_n} = \frac{d\vec{B}_{D_n}}{ds}\frac{ds}{ds_n},$$

$$\dot{\vec{B}}_{D_n} = \vec{B}_{D_n}{}' \frac{1}{|\delta_n|},$$

elde edilir. (5.2.6) eşitliği bulunan bu denklemde yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{B}}_{D_n} = \left(\frac{\mu_n}{\sqrt{{\delta_n}^2 + {\mu_n}^2}}\vec{D}_n + \frac{\delta_n}{\sqrt{{\delta_n}^2 + {\mu_n}^2}}\vec{T} \right)' \frac{1}{|\delta_n|}$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli türev alma işlemleri yapılıp, $ND-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{B}}_{D_n} = \left(\frac{\mu_n' \sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2} - \frac{2\delta_n\delta_n' + 2\mu_n\mu_n'}{2\sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}}\mu_n}{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2} \vec{D}_n + \frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}}\left(-\delta_n \vec{Y}_n\right) \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_n' \sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2} - \frac{2\delta_n\delta_n' + 2\mu_n\mu_n'}{2\sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}}\delta_n}{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2} \vec{T} + \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}}\left(\mu_n \vec{Y}_n\right) \right) \frac{1}{|\delta_n|}$$

$$\dot{\vec{B}}_{D_n} = \left(\frac{\mu_n' \delta_n{}^2 - \delta_n\delta_n'\mu_n}{\left(\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2\right)^{3/2}} \vec{D}_n + \frac{\delta_n' \mu_n{}^2 - \delta_n\mu_n\mu_n'}{\left(\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2\right)^{3/2}} \vec{T} \right) \frac{1}{|\delta_n|},$$

$$\dot{\vec{B}}_{D_n} = \left(\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{\delta_n{}^3}{\left(\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2\right)^{3/2}} \vec{D}_n - \left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{\mu_n \delta_n{}^2}{\left(\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2\right)^{3/2}} \vec{T} \right) \frac{1}{|\delta_n|},$$

$$\dot{\vec{B}}_{D_n} = \left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{|\delta_n|}{\left(\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2\right)^{3/2}} \left(\delta_n \vec{D}_n - \mu_n \vec{T}\right) \qquad (5.2.7)$$

elde edilir. Bulunan $\dot{\vec{B}}_{D_n}$ vektörü ile $\vec{N}_{D_n}$ vektörü iç çarpım uygulanırsa

$$= \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}} \vec{D}_n - \frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}} \vec{T}$$

$$\left\langle \dot{\vec{B}}_{D_n}, \vec{N}_{D_n} \right\rangle = \left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{|\delta_n|}{\left(\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2\right)^2} \left(-\delta_n{}^2 - \mu_n{}^2\right),$$

$$\left\langle \dot{\vec{B}}_{D_n}, \vec{N}_{D_n} \right\rangle = -\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{|\delta_n|}{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik $\tau_{D_n} = -\left\langle \dot{\vec{B}}_{D_n}, \vec{N}_{D_n} \right\rangle$ eşitliğinde yazıldığında α eğrisinin D_n küresel gösterge eğrisinin burulması

$$\tau_{D_n} = \left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{|\delta_n|}{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2} \tag{5.2.8}$$

şeklinde elde edilir. Böylece α eğrisinin D_n küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanlarının $ND-$ çatı elemanları cinsinden eşitlikleri elde edilmiş olur.

Sonuç 5.2.1.3: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir D_n-Darboux slant helis ise $\alpha_{D_n}(s_n) = \vec{D}_n(s)$, D_n küresel gösterge eğrisi çember ya da çember parçasıdır.

İspat: α, M yüzeyi üzerinde bir birim hızlı D_n-Darboux slant helis olsun. Bu durumda Teorem 2.5.4 gereği $\frac{\mu_n}{\delta_n} = sabittir$. Bu eşitlik (5.2.4) ve (5.2.8) deki ifadelerde kullanılırsa

$$\tau_{D_n} = \left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{\delta_n}{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2} = 0 \quad \text{ve} \quad \kappa_{D_n} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)^2} = sabit$$

elde edilir. O halde D_n küresel gösterge eğrisi bir çember ya da çember parçasıdır.

Sonuç 5.2.1.3: $\alpha_{D_n}(s_n) = \vec{D}_n(s)$, D_n küresel gösterge eğrisi bir helis eğrisi ise α eğrisi bir Y_n-Darboux slant helistir.

İspat: $\alpha_{D_n}(s_n) = \vec{D}_n(s)$, D_n küresel gösterge eğrisi bir helis eğrisi olsun. Teorem 2.2.18 gereği $\frac{\tau_{D_n}}{\kappa_{D_n}} = sabit$ olur. Elde edilen bu eşitlikte (5.2.4) ve (5.2.8) deki ifadeler yerine yazılırsa

$$\frac{\tau_{D_n}}{\kappa_{D_n}} = \frac{\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{|\delta_n|}{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)^2}},$$

$$= \left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{\delta_n{}^2}{\left(\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2\right)^{3/2}} = sabit$$

elde edilir. Teorem 5.2.2 gereği α eğrisi bir Y_n – Darboux slant helistir.

5.2.2: T Küresel Gösterge Eğrisi

Tanım 5.2.2.1: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, $ND-$çatısı $\left\{\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n\right\}$ ve eğrilikleri δ_n, μ_n olan bir eğri olsun. α eğrisi çizilirken tüm $\vec{T}$ vektörleri orijine taşınırsa, birim küre yüzeyi üzerinde meydana gelen eğriye α eğrisinin T küresel gösterge eğrisi denir. α eğrisinin T küresel gösterge eğrisinin denklemi $\alpha_T = \vec{T}$ olur. T küresel gösterge eğrisinin yay parametresi s_t olmak üzere $s_t \neq s$ ve yay parametresi $ds_t = \left\|\vec{T}'\right\| ds$ dir.

Teorem 5.2.2.2: M, E^3 de bir yüzey, $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve $\alpha_T = \vec{T}$, T küresel gösterge eğrisi olsun. $ND-$çatı elemanları $\left\{\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n, \delta_n, \mu_n\right\}$ ve α eğrisinin T küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanları $\left\{\vec{T}_T, \vec{N}_T, \vec{B}_T, \kappa_T, \tau_T\right\}$ olmak üzere, T küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanlarının $ND-$ çatı elemanları cinsinden eşiti aşağıdaki biçimdedir.

$$\vec{T}_T = \vec{Y}_n,$$

$$\vec{N}_T = \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \vec{D}_n - \frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \vec{T},$$

$$\vec{B}_T = \frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \vec{D}_n + \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \vec{T},$$

$$\kappa_T = \sqrt{1 + \left(\frac{\delta_n}{\mu_n}\right)^2}, \quad \tau_T = -\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{\delta_n^{\,2}}{|\mu_n|\left(\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}\right)}$$

Burada türev alma işlemlerinde s parametresine göre türev "$'$" ve s_t parametresine göre türev "$\dot{}$"sembolü ile gösterilecektir.

İspat: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olmak üzere α eğrisinin T küresel gösterge eğrisi α_T olsun. Bu durumda tanım 5.2.2.1 gereği

$$\alpha_T(s_t) = \vec{T}(s)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanının s_t parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha_T}{ds_t} = \frac{d\vec{T}}{ds_t}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte zincir kuralı uygulanıp, $ND-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa,

$$\frac{d\alpha_T}{ds_t} = \frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{ds_t},$$

$$\vec{T}_T = \vec{T}'\frac{ds}{ds_t},$$

$$\vec{T}_T = \left(\mu_n \vec{Y}_n\right)\frac{ds}{ds_t} \tag{5.2.9}$$

bulunur. $\vec{T}_T$ birim vektör olduğundan $\left\|\vec{T}_T\right\| = 1$ dir. (5.2.9) eşitliğinin her iki tarafının normu alındığında $1 = |\mu_n|\frac{ds}{ds_t}$ bulunur. Bu eşitlikten $\frac{ds}{ds_t} = \frac{1}{|\mu_n|}$ elde edilir. Bulunan eşitlik (5.2.9) da yerine yazılırsa $\vec{T}_T = \mp\vec{Y}_n$ bulunur. Burada

$$\vec{T}_T = \vec{Y}_n \tag{5.2.10}$$

alınarak işlemlere devam edilecektir. α eğrisinin T küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının birinci eğriliği $\kappa_T = \left\|\dot{\vec{T}}_T\right\|$ yazılabilir. (5.2.10) eşitliğinin her iki tarafının s_t parametresine göre türevi alındığında $\frac{d\vec{T}_T}{ds_t} = \frac{d\vec{Y}_n}{ds_t}$ eşitliği elde edilir. Bulunan bu eşitlikte zincir kuralı uygulanıp, $ND-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{T}}_T = \frac{d\vec{Y}_n}{ds}\frac{ds}{ds_t},$$

$$= \vec{Y}_n{}' \frac{ds}{ds_t},$$

$$\dot{\vec{T}}_T = \left(\delta_n \vec{D}_n - \mu_n \vec{T}\right)\frac{1}{|\mu_n|},$$

$$\dot{\vec{T}}_T = \frac{\delta_n}{|\mu_n|}\vec{D}_n \mp \vec{T} \tag{5.2.11}$$

elde edilir. (5.2.11) eşitliğinin normu alındığında

$$\kappa_T = \left\|\dot{\vec{T}}_T\right\| = \sqrt{1+\left(\frac{\delta_n}{\mu_n}\right)^2} = \frac{\sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}}{|\mu_n|} \tag{5.2.12}$$

bulunur. Benzer şekilde α eğrisinin T küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının asli normal vektörü

$$\vec{N}_T = \frac{1}{\kappa_T}\dot{\vec{T}}_T$$

yazılabilir. (5.2.12) ve (5.2.11) de bulunan ifadeler bu eşitlikte yerine yazılırsa

$$\vec{N}_T = \frac{|\mu_n|}{\sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}}\left(\frac{\delta_n}{|\mu_n|}\vec{D}_n \mp \vec{T}\right),$$

$$= \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}}\vec{D}_n \mp \frac{|\mu_n|}{\sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}}\vec{T}$$

elde edilir. Burada $\vec{N}_T$ vektörünü

$$\vec{N}_T = \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}}\vec{D}_n - \frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}}\vec{T} \tag{5.2.13}$$

biçiminde seçebiliriz. α eğrisinin T küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının binormal vektörü $\vec{B}_T = \vec{T}_T \times \vec{N}_T$ eşitliğinden bulunabilir. (5.2.10) ve (5.2.13) deki ifadeler bu eşitlikte yerine yazılırsa

$$\vec{B}_T = \vec{Y}_n \times \left(\frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \vec{D}_n - \frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \vec{T} \right),$$

$$\vec{B}_T = \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \overbrace{\left(\vec{Y}_n \times \vec{D}_n \right)}^{\vec{T}} - \frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \overbrace{\left(\vec{Y}_n \times \vec{T} \right)}^{-\vec{D}_n},$$

$$= \frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \vec{D}_n + \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \vec{T} \qquad (5.2.14)$$

biçiminde bulunur. Şimdi α eğrisinin T küresel gösterge eğrisinin burulması $\tau_T = -\left\langle \dot{\vec{B}}_T, \vec{N}_T \right\rangle$ eşitliğini kullanılarak elde edilebilir. $\vec{B}_T$ vektörünün s_t parametresine göre türevi alınıp, zincir kuralı uygulanırsa

$$\frac{d\vec{B}_T}{ds_t} = \frac{d\vec{B}_T}{ds} \frac{ds}{ds_t},$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte (5.2.14) ifadesi yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{B}}_T = \left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \vec{D}_n + \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \vec{T} \right)' \frac{1}{|\mu_n|}$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli türev alma işlemleri yapılıp, $ND-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{B}}_T = \left(\frac{\mu_n' \sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}} - \dfrac{2\delta_n \delta_n' + 2\mu_n \mu_n'}{2\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \mu_n}{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}} \vec{D}_n + \frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \left(-\delta_n \vec{Y}_n \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_n' \sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}} - \dfrac{2\delta_n \delta_n' + 2\mu_n \mu_n'}{2\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \delta_n}{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}} \vec{T} + \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \left(\mu_n \vec{Y}_n \right) \right) \frac{1}{|\mu_n|},$$

$$= \left(\frac{\mu_n' \delta_n^{\,2} - \delta_n \delta_n' \mu_n}{\left(\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}\right)^{3/2}} \vec{D}_n + \frac{\delta_n' \mu_n^{\,2} - \delta_n \mu_n \mu_n'}{\left(\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}\right)^{3/2}} \vec{T} \right) \frac{1}{|\mu_n|},$$

$$= \left(\left(\frac{\mu_n}{\delta_n} \right)' \frac{\delta_n^{\,3}}{\left(\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}\right)^{3/2}} \vec{D}_n - \left(\frac{\mu_n}{\delta_n} \right)' \frac{\mu_n \delta_n^{\,2}}{\left(\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}\right)^{3/2}} \vec{T} \right) \frac{1}{|\mu_n|},$$

$$\dot{\vec{B}}_T = \left(\frac{\mu_n}{\delta_n} \right)' \frac{\delta_n^{\,2}}{\left(\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}\right)^{3/2}} \left(\frac{\delta_n}{|\mu_n|} \vec{D}_n \mp \vec{T} \right) \tag{5.2.15}$$

elde edilir. Bulunan $\dot{\vec{B}}_T$ vektörü ile $\vec{N}_T$ vektörü iç çarpım uygulanırsa

$$\left\langle \dot{\vec{B}}_T, \vec{N}_T \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\mu_n}{\delta_n} \right)' \frac{\delta_n^{\,2}}{\left(\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}\right)^{3/2}} \left(\frac{\delta_n}{|\mu_n|} \vec{D}_n \mp \vec{T} \right), \right.$$
$$\left. \frac{|\mu_n|}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \left(\frac{\delta_n}{|\mu_n|} \vec{D}_n \mp \vec{T} \right) \right\rangle$$

$$\left\langle \dot{\vec{B}}_T, \vec{N}_T \right\rangle = \left(\frac{\mu_n}{\delta_n} \right)' \frac{\delta_n^{\,2} |\mu_n|}{\left(\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}\right)^2} \left(\frac{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}{\mu_n^{\,2}} \right),$$

$$\left\langle \dot{\vec{B}}_T, \vec{N}_T \right\rangle = \left(\frac{\mu_n}{\delta_n} \right)' \frac{\delta_n^{\,2}}{|\mu_n| \left(\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}\right)}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikten α eğrisinin T küresel gösterge eğrisinin burulması

$$\tau_T = -\left(\frac{\mu_n}{\delta_n} \right)' \frac{\delta_n^{\,2}}{|\mu_n| \left(\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}\right)} \tag{5.2.16}$$

biçiminde elde edilir. Böylece α eğrisinin T küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanlarının $ND-$ çatı elemanları cinsinden eşitlikleri elde edilmiş olur.

Sonuç 5.2.2.3: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir $D_n -$ Darboux slant helis ise $\alpha_T(s_t) = \vec{T}(s)$, T küresel gösterge eğrisi bir çember ya da çember parçasıdır.

İspat: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir D_n – Darboux slant helis olsun. Bu durumda Teorem 2.5.4 gereği $\frac{\mu_n}{\delta_n} = sabit$ dir. O halde T küresel gösterge eğrisinin (5.2.12) ve (5.2.16) eşitliklerinde elde edilen birinci eğriliği ve burulması,

$$\kappa_T = \sqrt{1+\left(\frac{\delta_n}{\mu_n}\right)^2} = sabit \quad \text{ve} \quad \tau_T = -\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{{\delta_n}^2}{\mu_n\left({\delta_n}^2 + {\mu_n}^2\right)} = 0,$$

biçimindedir. Buradan α_T, T küresel gösterge eğrisinin bir çember ya da çember parçası olduğu görülür.

Sonuç 5.2.2.4: α_T, T küresel gösterge eğrisi bir helis eğrisi ise α eğrisi bir Y_n – Darboux slant helistir.

İspat: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri ve α_T, T küresel gösterge eğrisi bir helis eğrisi olsun. Teorem 2.1.18 gereği $\frac{\tau_T}{\kappa_T} = sabit$ yazılabilir. Bu eşitlikte (5.2.12) ve (5.2.16) daki ifadeler yerine yazılırsa

$$\frac{\tau_T}{\kappa_T} = \frac{-\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{{\delta_n}^2}{|\mu_n|\left({\delta_n}^2 + {\mu_n}^2\right)}}{\sqrt{1+\left(\frac{\delta_n}{\mu_n}\right)^2}},$$

$$= -\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{{\delta_n}^2}{\left({\delta_n}^2 + {\mu_n}^2\right)^{3/2}} = sabit$$

elde edilir. O halde Teorem 5.1.2 gereği α eğrisi Y_n – Darboux slant helistir.

5.2.3: Y_n Küresel Gösterge Eğrisi

Tanım 5.2.3.1: M, E^3 de bir yüzey ve $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, $ND-$ çatısı $\left\{\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n\right\}$ ve eğrilikleri δ_n, μ_n olan bir eğri olsun. α eğrisi çizilirken tüm $\vec{Y}_n$ vektörleri orijine taşınırsa, birim küre yüzeyi üzerinde meydana gelen eğriye α eğrisinin Y_n küresel gösterge eğrisi denir. α eğrisinin Y_n küresel gösterge eğrisinin denklemi $\alpha_{Y_n} = \vec{Y}_n$ olur. Y_n küresel gösterge eğrisinin yay parametresi s_{Y_n} olmak üzere $s_{Y_n} \neq s$ ve yay parametresi $ds_{Y_n} = \left\|\vec{Y}_n'\right\| ds$ dir.

Teorem 5.2.3.2: M, E^3 de bir yüzey, $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı ve $\alpha_{Y_n} = \vec{Y}_n$, Y_n küresel gösterge eğrisi olsun. α eğrisinin $ND-$ çatı elemanları $\left\{\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n, \delta_n, \mu_n\right\}$ ve α eğrisinin Y_n küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanları $\left\{\vec{T}_{Y_n}, \vec{N}_{Y_n}, \vec{B}_{Y_n}, \kappa_{Y_n}, \tau_{Y_n}\right\}$ olmak üzere, Y_n küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanlarının $ND-$ çatı elemanları cinsinden eşiti aşağıdaki biçimdedir.

$$\vec{T}_{Y_n} = \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \vec{D}_n - \frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}} \vec{T},$$

$$\vec{N}_{Y_n} = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \left(-\frac{hr}{\sqrt{1+h^2}} \vec{D}_n - \frac{r}{\sqrt{1+h^2}} \vec{T} - \vec{Y}_n \right),$$

$$\vec{B}_{Y_n} = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \left(\frac{h}{\sqrt{1+h^2}} \vec{D}_n + \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \vec{T} - r\vec{Y}_n \right),$$

$$\kappa_{Y_n} = \sqrt{1+r^2}, \quad \tau_{Y_n} = -\frac{r'}{\delta_n \sqrt{1+h^2}\left(1+r^2\right)}.$$

Burada $\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{\delta_n^{\,2}}{\left(\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}\right)^{3/2}} = r$ ve $\frac{\mu_n}{\delta_n} = h$ kısaltmaları kullanılmıştır. Ayrıca türev alma işlemlerinde s parametresine göre türev "$'$" ve s_{Y_n} parametresine göre türev "$\dot{}$"sembolü ile gösterilecektir.

İspat: M, E^3 de bir yüzey, $\alpha : I \subset IR \to M$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olmak üzere α eğrisinin Y_n küresel gösterge eğrisi α_{Y_n} olsun. Bu durumda Tanım 5.2.3.1 gereği

$$\alpha_{Y_n}\left(s_{Y_n}\right) = \vec{Y}_n\left(s\right)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanının s_{Y_n} parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha_{Y_n}}{ds_{Y_n}} = \frac{d\vec{Y}_n}{ds_{Y_n}}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte zincir kuralı uygulanıp, $ND-$çatısı türev formülleri yerine yazılırsa,

$$\frac{d\alpha_{Y_n}}{ds_{Y_n}} = \frac{d\vec{Y}_n}{ds}\frac{ds}{ds_{Y_n}},$$

$$\vec{T}_{Y_n} = \vec{Y}_n{}'\frac{ds}{ds_{Y_n}},$$

$$\vec{T}_{Y_n} = \left(\delta_n \vec{D}_n - \mu_n \vec{T}\right)\frac{ds}{ds_{Y_n}} \tag{5.2.17}$$

bulunur. $\vec{T}_{Y_n}$ birim vektör olduğundan $\left\|\vec{T}_{Y_n}\right\| = 1$ dir. (5.2.17) eşitliğinin her iki tarafının normu alındığında $1 = \sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}\,\frac{ds}{ds_{Y_n}}$ bulunur. Bu eşitlikten $\frac{ds}{ds_{Y_n}} = \frac{1}{\sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}}$ yazılabilir. Bulunan bu ifade (5.2.17) de yerine yazılırsa

$$\vec{T}_{Y_n} = \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}}\vec{D}_n - \frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n{}^2 + \mu_n{}^2}}\vec{T} \tag{5.2.18}$$

vektörü elde edilir. α eğrisinin Y_n küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının birinci eğriliği $\kappa_{Y_n} = \left\|\dot{\vec{T}}_{Y_n}\right\|$ yazılabilir. (5.2.18) eşitliğinin her iki tarafının s_{Y_n} parametresine

göre türevi alındığında $\dot{\vec{T}}_{Y_n} = \dfrac{d\vec{T}_{Y_n}}{ds_{Y_n}} = \dfrac{d\vec{T}_{Y_n}}{ds}\dfrac{ds}{ds_{Y_n}}$ eşitliği elde edilir. Bulunan bu eşitlikte gerekli türev alma işlemleri yapılıp, $ND-$ çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{T}}_{Y_n} = \left(\frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2}}\vec{D}_n - \frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2}}\vec{T}\right)'\frac{ds}{ds_{Y_n}},$$

$$= \left(\left(\frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2}}\right)'\vec{D}_n + \left(\frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2}}\right)\left(-\delta_n\vec{Y}_n\right)\right.$$

$$\left. -\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2}}\right)'\vec{T} - \left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2}}\right)\left(\mu_n\vec{Y}_n\right)\right)\frac{1}{\sqrt{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2}},$$

$$= \left(\frac{\delta_n'\sqrt{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2} - \dfrac{2\delta_n\delta_n{}'+2\mu_n\mu_n{}'}{2\sqrt{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2}}\delta_n}{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2}\vec{D}_n\right.$$

$$\left. -\frac{\mu_n'\sqrt{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2} - \dfrac{2\delta_n\delta_n{}'+2\mu_n\mu_n{}'}{2\sqrt{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2}}\mu_n}{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2}\vec{T} - \sqrt{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2}\vec{Y}_n\right)\frac{1}{\sqrt{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2}},$$

$$= \left(\frac{\delta_n'\mu_n{}^2-\delta_n\mu_n\mu_n'}{\left(\delta_n{}^2+\mu_n{}^2\right)^{3/2}}\vec{D}_n - \frac{\mu_n'\delta_n{}^2-\delta_n\delta_n{}'\mu_n}{\left(\delta_n{}^2+\mu_n{}^2\right)^{3/2}}\vec{T} - \sqrt{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2}\vec{Y}_n\right)\frac{1}{\sqrt{\delta_n{}^2+\mu_n{}^2}},$$

$$= -\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'\frac{\mu_n\delta_n{}^2}{\left(\delta_n{}^2+\mu_n{}^2\right)^2}\vec{D}_n - \left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'\frac{\delta_n{}^3}{\left(\delta_n{}^2+\mu_n{}^2\right)^2}\vec{T} - \vec{Y}_n \qquad (5.2.19)$$

elde edilir. Elde edilen (5.2.19) eşitliğinin normu alındığında

$$\kappa_{Y_n} = \left\|\dot{\vec{T}}_{Y_n}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'^2\frac{\mu_n{}^2\delta_n{}^4+\delta_n{}^6}{\left(\delta_n{}^2+\mu_n{}^2\right)^4}+1},$$

$$\kappa_{Y_n} = \sqrt{\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'^2 \frac{\delta_n^{\,4}}{\left(\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}\right)^3} + 1} \tag{5.2.20}$$

eşitliği elde edilir. Burada işlemlerde kolaylık sağlaması için $\frac{\mu_n}{\delta_n} = h$ ve $\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{\delta_n^{\,2}}{\left(\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}\right)^{3/2}} = r$ kısaltmaları kullanılacaktır. Böylece

$$\kappa_{Y_n} = \sqrt{1 + r^2} \tag{5.2.21}$$

bulunur. Ayrıca bu kısaltmalar (5.1.19) eşitliği de

$$\dot{\vec{T}}_{Y_n} = -\frac{hr}{\sqrt{1+h^2}} \vec{D}_n - \frac{r}{\sqrt{1+h^2}} \vec{T} - \vec{Y}_n \tag{5.2.22}$$

yazılabilir. α eğrisinin Y_n küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının asli normal vektörü $\vec{N}_{Y_n} = \frac{1}{\kappa_{Y_n}} \dot{\vec{T}}_{Y_n}$ yazılabilir. (5.2.21) ve (5.2.22) de bulunan ifadeler bu eşitlikte yerine yazılırsa

$$\vec{N}_{Y_n} = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \left(-\frac{hr}{\sqrt{1+h^2}} \vec{D}_n - \frac{r}{\sqrt{1+h^2}} \vec{T} - \vec{Y}_n \right) \tag{5.2.23}$$

elde edilir. α eğrisinin Y_n küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının binormal vektörü $\vec{B}_{Y_n} = \vec{T}_{Y_n} \times \vec{N}_{Y_n}$ yazılabilir. $\frac{\mu_n}{\delta_n} = h$ ve $\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{\delta_n^{\,2}}{\left(\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}\right)^{3/2}} = r$ kısaltmaları (5.2.18) deki eşitlikte kullanılırsa

$$\vec{T}_{Y_n} = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \vec{D}_n - \frac{h}{\sqrt{1+h^2}} \vec{T} \tag{5.2.24}$$

bulunur. Bu durumda (5.2.24) ve (5.2.23) eşitlikleri kullanılarak

$$\vec{B}_{Y_n} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \vec{D}_n - \frac{h}{\sqrt{1+h^2}} \vec{T} \right) \times \left(\left(-\frac{hr}{\sqrt{1+h^2}} \vec{D}_n - \frac{r}{\sqrt{1+h^2}} \vec{T} - \vec{Y}_n \right) \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \right),$$

$$= \left(-\frac{r}{\sqrt{1+h^2}} \overbrace{\left(\vec{D}_n \times \vec{T}\right)}^{\vec{Y}_n} - \overbrace{\left(\vec{D}_n \times \vec{Y}_n\right)}^{-\vec{T}} + \frac{h^2 r}{\sqrt{1+h^2}} \overbrace{\left(\vec{T} \times \vec{D}_n\right)}^{-\vec{Y}_n} + h \overbrace{\left(\vec{T} \times \vec{Y}_n\right)}^{\vec{D}_n} \right) \frac{1}{\sqrt{1+h^2}\sqrt{1+r^2}},$$

$$= \left(\frac{h}{\sqrt{1+h^2}} \vec{D}_n + \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \vec{T} - r\vec{Y}_n \right) \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \tag{5.2.25}$$

biçiminde α eğrisinin Y_n küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının binormal vektörü elde edilir. α eğrisinin Y_n küresel gösterge eğrisinin burulması $\tau_{Y_n} = -\left\langle \dot{\vec{B}}_{Y_n}, \vec{N}_{Y_n} \right\rangle$ eşitliğinden elde edilebilir. Öncelikle $\vec{B}_{Y_n}$ vektörünün s_{Y_n} parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\vec{B}_{Y_n}}{ds_{Y_n}} = \frac{d\vec{B}_{Y_n}}{ds} \frac{ds}{ds_{Y_n}}$$

elde edilir. $\frac{ds}{ds_{Y_n}} = \frac{1}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}}$ ve (5.2.25) eşitliği bulunan bu eşitlikte yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{B}}_{Y_n} = \vec{B}_{Y_n}{}' \frac{1}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}},$$

$$\dot{\vec{B}}_{Y_n} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \left(\frac{h}{\sqrt{1+h^2}} \vec{D}_n + \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \vec{T} - r\vec{Y}_n \right) \right)' \frac{1}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}}$$

bulunur. Burada $\frac{\mu_n}{\delta_n} = h$ eşitliğinden $\frac{1}{\sqrt{\delta_n^{\,2} + \mu_n^{\,2}}}$ yerine $\frac{1}{\delta_n\sqrt{1+h^2}}$ yazılabilir. Gerekli türev alma işlemleri yapılıp, $ND-$çatısı türev formülleri yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{B}}_{Y_n} = \left(\frac{-rr'}{\left(1+r^2\right)^{3/2}} \left(\frac{h}{\sqrt{1+h^2}} \vec{D}_n + \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \vec{T} - r\vec{Y}_n \right) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \left(\frac{h'}{\left(1+h^2\right)^{3/2}} \vec{D}_n + \frac{h}{\sqrt{1+h^2}} \left(-\delta_n \vec{Y}_n\right) \right) \right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\left(\frac{-hh'}{\left(1+h^2\right)^{3/2}}\vec{T}+\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\left(\mu_n\vec{Y}_n\right)\right)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\left(-r'\vec{Y}_n-r\left(\delta_n\vec{D}_n-\mu_n\vec{T}\right)\right)\frac{1}{\delta_n\sqrt{1+h^2}},$$

$$\dot{\vec{B}}_{Y_n}=\left(\left(\frac{-rr'}{\left(1+r^2\right)^{3/2}}\frac{h}{\sqrt{1+h^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\overbrace{\frac{h'}{\left(1+h^2\right)^{3/2}}}^{r\delta_n}-\frac{r\delta_n}{\sqrt{1+r^2}}\right)\vec{D}_n\right.$$

$$\left.+\left(\frac{-rr'}{\left(1+r^2\right)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\overbrace{\frac{hh'}{\left(1+h^2\right)^{3/2}}}^{r\mu_n}+\frac{r\mu_n}{\sqrt{1+r^2}}\right)\vec{T}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{r^2r'}{\left(1+r^2\right)^{3/2}}-\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\frac{h\delta_n}{\sqrt{1+h^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\frac{\mu_n}{\sqrt{1+h^2}}-\frac{r'}{\sqrt{1+r^2}}\right)\vec{Y}_n\right)\frac{1}{\delta_n\sqrt{1+h^2}}$$

$$\dot{\vec{B}}_{Y_n}=\left(\left(\frac{-rr'h}{\left(1+r^2\right)^{3/2}\sqrt{1+h^2}}\right)\vec{D}_n+\left(\frac{-rr'}{\left(1+r^2\right)^{3/2}\sqrt{1+h^2}}\right)\vec{T}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{-r'}{\left(1+r^2\right)^{3/2}}\right)\vec{Y}_n\right)\frac{1}{\delta_n\sqrt{1+h^2}} \qquad (5.2.26)$$

elde edilir. Bulunan (5.2.26) ve (5.2.23) eşitlikleri $\tau_{Y_n}=-\left\langle\dot{\vec{B}}_{Y_n},\vec{N}_{Y_n}\right\rangle$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\tau_{Y_n}=-\left\langle\frac{1}{\delta_n\sqrt{1+h^2}}\left(\left(\frac{-rr'h}{\left(1+r^2\right)^{3/2}\sqrt{1+h^2}}\right)\vec{D}_n+\left(\frac{-rr'}{\left(1+r^2\right)^{3/2}\sqrt{1+h^2}}\right)\vec{T}+\left(\frac{-r'}{\left(1+r^2\right)^{3/2}}\right)\vec{Y}_n\right),\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\left(-\frac{hr}{\sqrt{1+h^2}}\vec{D}_n-\frac{r}{\sqrt{1+h^2}}\vec{T}-\vec{Y}_n\right)\right\rangle,$$

$$\tau_{Y_n}=-\frac{1}{\delta_n\sqrt{1+h^2}\left(1+r^2\right)^2}\left(\frac{r'r^2h^2}{1+h^2}+\frac{r'r^2}{1+h^2}+r'\right),$$

$$\tau_{Y_n} = -\frac{r'}{\delta_n \sqrt{1+h^2}\left(1+r^2\right)} \tag{5.2.27}$$

elde edilir.

Sonuç 5.2.3.3: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir D_n – Darboux slant helis ise α_{Y_n}, Y_n küresel gösterge eğrisi büyük çember ya da büyük çember parçasıdır.

İspat: α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir D_n – Darboux slant helis olsun. Bu durumda Teorem 2.2.12 gereği $\frac{\mu_n}{\delta_n} = sabittir$. Ayrıca $r = \left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{{\delta_n}^2}{\left({\delta_n}^2 + {\mu_n}^2\right)^{3/2}}$ eşitliğinde $r = \left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{1}{\delta_n\left(1+\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)^2\right)^{3/2}}$ yazılabilir. Buradan $r = 0$ elde edilir. Bu eşitlikten Y_n küresel gösterge eğrisinin (5.2.21) ve (5.2.27) eşitliklerinde elde edilen birinci eğriliği ve burulması,

$$\tau_{Y_n} = -\frac{r'}{\delta_n \sqrt{1+h^2}\left(1+r^2\right)} = 0,\ \kappa_{Y_n} = \sqrt{1+r^2} = 1$$

biçimindedir. Buradan α_{Y_n}, Y_n küresel gösterge eğrisi büyük çember ya da büyük çember parçasıdır.

Sonuç 5.2.3.4: α eğrisi bir Y_n – Darboux slant helis ise Y_n küresel gösterge eğrisi çember ya da çember parçasıdır.

İspat: α eğrisi bir Y_n – Darboux slant helis olsun. Bu durumda Teorem 5.1.2 gereği $\sigma_{Y_n}(s) = \frac{\delta_n^2}{\left(\delta_n^2+\mu_n^2\right)^{3/2}}\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'(s)$ fonksiyonu sabittir. Bu ifade aynı zamanda $r = \left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{1}{\delta_n\left(1+\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)^2\right)^{3/2}}$ ifadesiyle aynıdır. Yani $r = sabit$ olur. O halde Y_n küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının birinci eğriliği ve burulması

$\kappa_{Y_n} = \sqrt{1+r^2} = sabit$ ve $\tau_{Y_n} = -\dfrac{r'}{\delta_n \sqrt{1+h^2}\left(1+r^2\right)} = 0$ olur. Bu eşitliklere dayanarak Y_n küresel gösterge eğrisinin çember ya da çember parçası olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek 5.2.3.5: M yüzeyi, $X(u,v) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos u + \sin v, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin u + \cos v, \dfrac{u}{\sqrt{6}} + 1\right)$ parametrizasyonu ile verilsin. $u = \sqrt{2}s, v = 0$ alınırsa M yüzeyi üzerinde

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\sqrt{2}s\right), \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{2}s\right) + 1, \frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)$$

eğrisi elde edilir. Elde edilen eğrinin s parametresine göre türevi alındığında, $\alpha(s)' = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{2}s\right), \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\left(\sqrt{2}s\right), \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ bulunur. $\left\|\alpha(s)'\right\| = 1$ olduğundan α eğrisi birim hızlı bir eğridir. Şimdi α eğrisinin Darboux çatı elemanlarını bulalım. α eğrisi birim hızlı bir eğri olduğundan

$$\vec{T}(s) = \alpha(s)' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\left(\sqrt{2}s\right), \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}s\right), \sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}s\right), 1\right)$$

elde edilir. $X_u(u,v) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin u, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos u, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ ve $X_v(u,v) = (\cos v, -\sin v, 0)$ eşitliklerinden yüzeyin birim normal vektör alanı $\vec{U} = \dfrac{X_u \times X_v}{\left\|X_u \times X_v\right\|}$ eşitliğinden

$$\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{1+2\cos^2(u+v)}}\left(\sin v, \cos v, -\sqrt{2}\cos(u+v)\right)$$

elde edilir. Böylece birim normal vektör alanının α eğrisine kısıtlanmışı

$$\vec{U}_\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{1+2\cos^2\left(\sqrt{2}s\right)}}\left(0, 1, -\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}s\right)\right)$$

bulunur. Bulunan $\vec{U}_\alpha(s)$ ve $\vec{T}(s)$ vektörleri $\vec{V}(s)=\vec{U}_\alpha(s)\times\vec{T}(s)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\vec{V}(s)=\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1+2\cos^2\left(\sqrt{2}s\right)}}\left(1+2\cos^2\left(\sqrt{2}s\right),2\sin\left(\sqrt{2}s\right)\cos\left(\sqrt{2}s\right),\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}s\right)\right)$$

elde edilir. Darboux çatısının eğriliklerini elde etmek için öncelikle $\alpha(s)''$ ve $\vec{U}_\alpha(s)'$ eşitlikleri

$$\alpha(s)''=\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\sqrt{2}s\right),-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{2}s\right),0\right)$$

$$\vec{U}_\alpha(s)'=\frac{1}{\left(1+2\cos^2\left(\sqrt{2}s\right)\right)^{3/2}}\left(0,2\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}s\right)\cos\left(\sqrt{2}s\right),2\sin\left(\sqrt{2}s\right)\right)$$

bulunur. Bulunan eşitlikler kullanılarak

$$k_n(s)=\left\langle\alpha(s)'',\vec{U}(s)\right\rangle=-\frac{2\sin\left(\sqrt{2}s\right)}{\sqrt{3}\sqrt{1+2\cos^2\left(\sqrt{2}s\right)}},$$

$$k_g(s)=\left\langle\alpha(s)'',\vec{V}(s)\right\rangle=-\frac{2\cos\left(\sqrt{2}s\right)}{\sqrt{1+2\cos^2\left(\sqrt{2}s\right)}},$$

$$\tau_g(s)=-\left\langle\vec{U}_\alpha(s)',\vec{V}(s)\right\rangle=-\frac{2\sqrt{2}\sin^2\left(\sqrt{2}s\right)}{1+2\cos^2\left(\sqrt{2}s\right)}$$

Darboux çatısının eğrilikleri elde edilir. O halde yukarıda bulunan Darboux çatı elemanları kullanılarak $ND-$çatısının eğrilikleri Teorem 2.5.2 gereği,

$$\mu_n=\sqrt{k_n^2+k_g^2}=\frac{2}{\sqrt{3}},\qquad \delta_n=\left(\frac{k_n}{k_g}\right)'\left(\frac{k_g^2}{k_n^2+k_g^2}\right)+\tau_g=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

şeklindedir. Ayrıca Tanım 2.5.1 gereği $ND-$çatısının vektör alanları,

$$\vec{D}_n(s) = -\frac{k_n(s)}{\sqrt{k_n^2(s)+k_g^2(s)}}\vec{V}(s) + \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_n^2(s)+k_g^2(s)}}\vec{U}(s) \text{ eşitliğinden}$$

$$\vec{D}_n(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin\sqrt{2}s, -\cos\sqrt{2}s, \sqrt{2}\right)$$

ve

$$\vec{Y}_n(s) = \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_n^2(s)+k_g^2(s)}}\vec{V}(s) + \frac{k_n(s)}{\sqrt{k_n^2(s)+k_g^2(s)}}\vec{U}(s) \quad \text{eşitliğinden}$$

$$\vec{Y}_n(s) = \left(-\cos\sqrt{2}s, -\sin\sqrt{2}s, 0\right) \text{ şeklinde bulunur.}$$

Şimdi α eğrisinin sırasıyla D_n, T, Y_n küresel gösterge eğrilerini bulup, bu küresel gösterge eğrilerinin Frenet çatı elemanlarını elde edelim. Tanım 5.2.1.1 gereği α eğrisinin D_n küresel gösterge eğrisi

$$\alpha_{D_n}(s_n) = \vec{D}_n(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin\sqrt{2}s, -\cos\sqrt{2}s, \sqrt{2}\right)$$

şeklindedir. Teorem 5.2.1.2 deki eşitlikler kullanılarak α eğrisinin D_n küresel gösterge eğrisi Frenet vektörleri

$$T_{D_n} = \left(\cos\sqrt{2}s, \sin\sqrt{2}s, 0\right),$$

$$\begin{aligned}\vec{N}_{D_n} &= -\frac{\delta_n}{\sqrt{{\delta_n}^2+{\mu_n}^2}}\vec{D}_n + \frac{\mu_n}{\sqrt{{\delta_n}^2+{\mu_n}^2}}\vec{T} \\ &= \left(-\sin\sqrt{2}s, \cos\sqrt{2}s, 0\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B}_{D_n} &= \frac{\mu_n}{\sqrt{{\delta_n}^2+{\mu_n}^2}}\vec{D}_n + \frac{\delta_n}{\sqrt{{\delta_n}^2+{\mu_n}^2}}\vec{T} \\ &= (0,0,1)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca D_n küresel gösterge eğrisinin eğrilik ve burulması,

$$\kappa_{D_n} = \sqrt{1+\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)^2} = \sqrt{3}, \tau_{D_n} = \left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' \frac{\delta_n}{{\delta_n}^2+{\mu_n}^2} = 0 \text{ dır.}$$

Tanım 5.2.2.1 gereği α eğrisinin T küresel gösterge eğrisi

$$\alpha_T(s)=\vec{T}(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}s,\sqrt{2}\cos\sqrt{2}s,1\right)$$

şeklindedir. α eğrisinin T küresel gösterge eğrisinin Frenet çatısının vektörleri Teorem 5.2.2.2 deki eşitliklerden

$$\vec{T}_T(s)=\vec{Y}_n(s)=\left(-\cos\sqrt{2}s,-\sin\sqrt{2}s,0\right),$$

$$\begin{aligned}\vec{N}_T(s)&=\frac{\delta_n}{\sqrt{{\delta_n}^2+{\mu_n}^2}}\vec{D}_n(s)-\frac{\mu_n}{\sqrt{{\delta_n}^2+{\mu_n}^2}}\vec{T}(s)\\&=\left(\sin\sqrt{2}s,-\cos\sqrt{2}s,0\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B}_T(s)&=\frac{\mu_n}{\sqrt{{\delta_n}^2+{\mu_n}^2}}\vec{D}_n(s)+\frac{\delta_n}{\sqrt{{\delta_n}^2+{\mu_n}^2}}\vec{T}(s)\\&=(0,0,1)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca α eğrisinin T küresel gösterge eğrisinin eğrilik ve burulması

$$\kappa_T=\sqrt{1+\left(\frac{\delta_n}{\mu_n}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ \text{ve}\ \tau_T=-\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'\frac{{\delta_n}^2}{\mu_n\left({\delta_n}^2+{\mu_n}^2\right)}=0\ \text{dır.}$$

Son olarak eğrisinin Y_n küresel gösterge eğrisini bulalım. Tanım 5.2.3.1 deki $\alpha_{Y_n}\left(s_{Y_n}\right)=\vec{Y}_n(s)$ eşitliğinden α eğrisinin Y_n küresel gösterge eğrisi

$$\alpha_{Y_n}\left(s_{Y_n}\right)=\left(-\cos\left(\sqrt{2}s\right),-\sin\left(\sqrt{2}s\right),0\right)$$

şeklinde bulunur. α eğrisinin Y_n küresel gösterge eğrisinin Frenet çatı elemanları Teorem 5.2.3.2 deki eşitliklerden

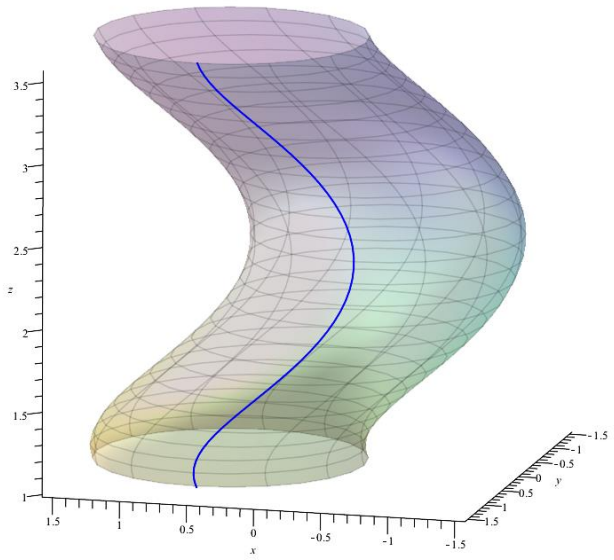
$$\vec{T}_{Y_n}(s)=\left(\sin\left(\sqrt{2}s\right),-\cos\left(\sqrt{2}s\right),0\right),$$

$$\vec{N}_{Y_n}(s)=\left(\cos\left(\sqrt{2}s\right),\sin\left(\sqrt{2}s\right),0\right),$$

$$\vec{B}_{Y_n}(s)=(0,0,1),$$

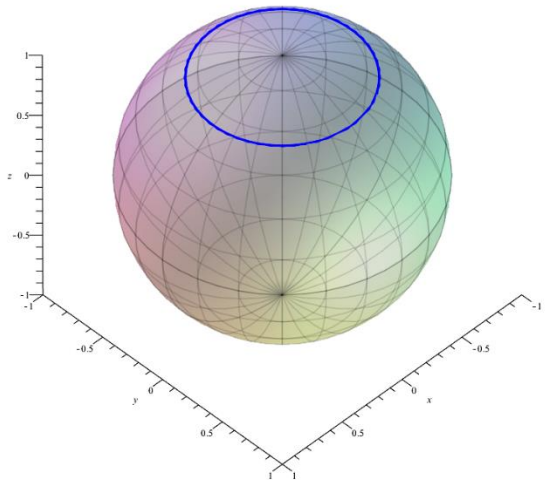
$\kappa_{Y_n}=1, \tau_{Y_n}=0$ bulunur.

Grafikleri aşağıda verilmiştir.



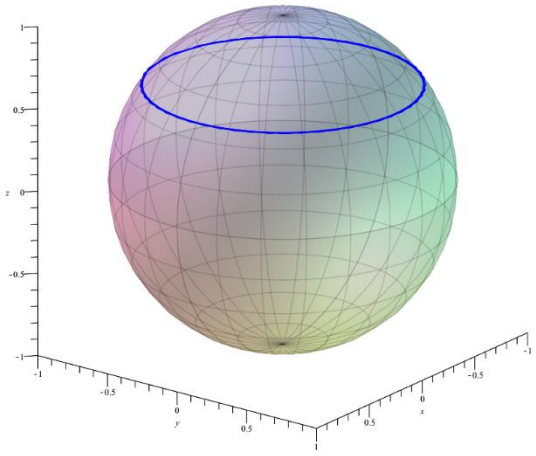
Şekil 5.2.5: $X(u,v)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos u+\sin v, \frac{1}{\sqrt{3}}\sin u+\cos v, \frac{u}{\sqrt{6}}+1\right)$ yüzeyi üzerinde

$$\alpha(s)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\sqrt{2}s\right), \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{2}s\right)+1, \frac{s}{\sqrt{3}}+1\right) \text{ eğrisi}$$



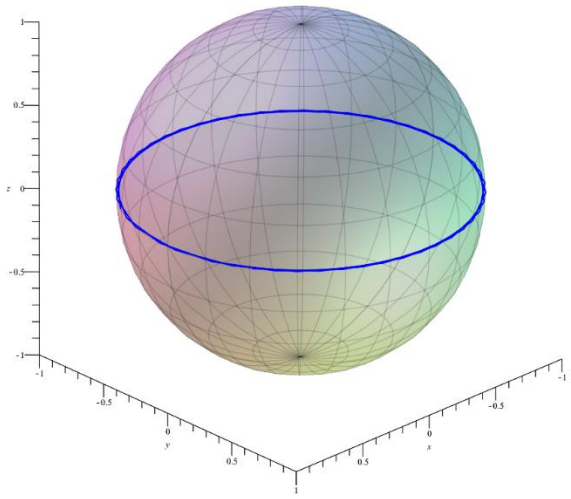
Şekil 5.2.3.6: $\alpha_{D_n}(s)=\vec{D}_n(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin\sqrt{2}s,-\cos\sqrt{2}s,\sqrt{2}\right),$

D_n küresel gösterge eğrisi



Şekil 5.2.3.7: $\alpha_T(s)=\vec{T}(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}s,\sqrt{2}\cos\sqrt{2}s,1\right),$

T küresel gösterge eğrisi



Şekil 5.2.3.8: $\alpha_{Y_n}(s) = \vec{Y}_n(s) = \left(-\cos\left(\sqrt{2}s\right), -\sin\left(\sqrt{2}s\right), 0\right),$

Y_n küresel gösterge eğrisi

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, daha önce [20] nolu referansta tanımları yapılan, oskülatör Darboux çatısı, normal Darboux çatısı ve rektifiyan Darboux çatısı kullanılarak Y_i- Darboux slant helisler ($i=o,n,r$) tanımlanmıştır. Daha sonra bu çatılar yardımıyla Y_i- Darboux slant helisleri karakterize eden denklemler elde edilmiştir. Y_i- Darboux slant helisleri karakterize eden denklemler, tanımlanan bu çatıların eğrilikleri ile Darboux çatısının eğrilikleri arasındaki ilişkilerden yararlanılarak Darboux çatısının eğrilikleri cinsinden verilmiştir.

Oskülatör, rektifiyan ve normal Darboux çatılarına göre küresel gösterge eğrileri tanımlanmış, tanımlanan küresel gösterge eğrilerinin Frenet elemanları bu çatıların vektör alanlarına ve eğriliklerine bağlı olarak verilmiştir. Bu sayede Darboux çatının vektör alanlarının küresel gösterge eğrileri elde edilmiştir. Ayrıca α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir D_o-Darboux slant helis ise D_o küresel gösterge eğrisi ve U küresel gösterge eğrisi çember ya da çember parçası, Y_o küresel gösterge eğrisi büyük çember ya da büyük çember parçasıdır. D_o küresel gösterge eğrisi, U küresel gösterge eğrisi bir helis eğrisi ise α eğrisi bir Y_o- Darboux slant helistir.

α, M yüzeyi üzerinde bir birim hızlı D_r-Darboux slant helis ise D_r küresel gösterge eğrisi ve V küresel gösterge eğrisi bir çember ya da çember parçası, Y_r küresel gösterge eğrisi büyük çember ya da büyük çember parçasıdır. D_r küresel gösterge eğrisi ve V küresel gösterge eğrisi bir helis eğrisi ise α eğrisi bir Y_r-Darboux slant helistir.

α, M yüzeyi üzerinde bir birim hızlı D_n-Darboux slant helis ise D_n küresel gösterge eğrisi ve T küresel gösterge eğrisi bir çember ya da çember parçası, Y_n küresel gösterge eğrisi büyük çember ya da büyük çember parçasıdır. D_n küresel gösterge eğrisi ve T küresel gösterge eğrisi bir helis eğrisi ise α eğrisi bir Y_n- Darboux slant helistir.

Bu yapılan çalışmalara ek olarak, tanımlanan üç yeni ortogonal çatı ile yüzey üzerinde bulunan eğriler incelenebilir. Öklid uzayında yüzey üzerindeki Y_i- Darboux

slant helisler ilk kez bu çalışmada incelendiğinden, burada elde edilen veriler ışığında bu yüzey eğrilerinin farklı özellikleri ve karakterizasyonları Öklid uzayında incelenmeye devam edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Barros, M. (1997). General helices and a theorem of Lancret. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *125*(5), 1503-1509.

[2] Izumiya, S., & Takeuchi, N. (2004). New special curves and developable surfaces. *Turkish Journal of Mathematics*, *28*(2), 153-164.

[3] Ziplar, E., Senol, A., & Yayli, Y. (2012). On Darboux helices in Euclidean 3-space. *Global Journal of Science Frontier Research Mathematics and Decision Sciences*, *12*(13), 73-80.

[4] Ali, A. T. (2011). Position vectors of general helices in Euclidean 3-space. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, *3*(2), 198-205.

[5] Ali, A. T. (2012). Position vectors of slant helices in Euclidean 3-space. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, *20*(1), 1-6.

[6] Beltran, J. V., & Monterde, J. (2007). A characterization of quintic helices. *Journal of computational and applied mathematics*, *206*(1), 116-121.

[7] Barros, M., Ferrandez, A., Lucas, P., & Merono, M. A. (2001). General helices in the three-dimensional Lorentzian space forms. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 373-388.

[8] Kula, L., & Yayli, Y. (2005). On slant helix and its spherical indicatrix. *Applied Mathematics and Computation*, *169*(1), 600-607.

[9] Kula, L., Ekmekci, N., Yaylı, Y., & İlarslan, K. (2010). Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space. *Turkish Journal of Mathematics*, *34*(2), 261-274.

[10] İlarslan, K., & Yıldırım, M. (2019). On Darboux helices in Euclidean 4-space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *42*(16), 5184-5189.

[11] Puig-Pey, J., Gálvez, A., & Iglesias, A. (2004). Helical curves on surfaces for computer-aided geometric design and manufacturing. In *Computational Science and Its Applications–ICCSA 2004: International Conference, Assisi, Italy, May 14-17, 2004, Proceedings, Part II 4* (pp. 771-778). Springer Berlin Heidelberg.

[12] Doğan, F. (2012). Isophote curves on timelike surfaces in Minkowski 3-space. *arXiv preprint arXiv:1203.4389*.

[13] Doğan, F., & Yaylı, Y. (2021). Isophote curves on spacelike surfaces in Lorentz–Minkowski space. *Asian-European Journal of Mathematics*, *14*(10), 2150180.

[14] Doğan, F., & Yaylı, Y. (2015). On isophote curves and their characterizations. *Turkish Journal of Mathematics*, *39*(5), 650-664.

[15] Nesibe, M., & Düldül, M. (2017). Relatively normal-slant helices lying on a surface and their characterizations. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, *46*(3), 397-408.

[16] Yadav, A., & Pal, B. (2021). On Relatively Normal-Slant Helices and Isophotic Curves. *arXiv preprint arXiv:2104.13220*.

[17] Nešović, E., Öztürk, U., & Koç, Ö. E. B. (2022). On non-null relatively normal-slant helices in Minkowski 3-space. *Filomat*, *36*(6), 2051-2062.

[18] Yadav, A., & Yadav, A. K. (2022). Relatively normal-slant helices in Minkowski 3-space. *arXiv preprint arXiv:2201.03933*.

[19] Hananoi, S., Ito, N., & Izumiya, S. (2015). Spherical Darboux images of curves on surfaces. *Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry*, *56*, 575-585.

[20] Önder, M. (2022). Helices associated to helical curves, relatively normal-slant helices and isophote curves. *arXiv preprint arXiv:2201.09684*.

[21] Alkan, A., 3-Boyutlu Öklid Uzayında Yüzey Üzerindeki D_o – Darboux Slant Helisler, D_r – Darboux Slant Helisler, D_n – Darboux Slant Helisler, Doktora Tezi, 2024.

[22] Choi, J. H., & Kim, Y.H. (2012). Associated curves of a Frenet curve and their applications. *Applied Mathematics and Computation*, 218(18), 9116-9124.

[23] Şahiner, B. (2019). Direction curves of tangent indicatrix of a curve. *Applied Mathematics and Computation*, 343, 273-284.

[24] Sabuncuoğlu, A. *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayınevi, Ankara, 2001.

[25] Hacısalihoğlu, H. H. *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak Yayınları, No. 2, 1980.

[26] O'neill, B. (2006). *Elementary differential geometry*. Elsevier.

[27] Struik, D. J. (1961). *Lectures on classical differential geometry*. Courier Corporation.

[28] Echabbi, N., & Ouazzani Chahdi, A. (2021). Direction Curves Associated with Darboux Vectors Fields and Their Characterizations. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *2021*, 1-11.

[29] Echabbi, N., & Ouazzani Chahdi, A. (2021, September). Some Special Ruled Surfaces Generated by a Direction Curve according to the Darboux Frame and their Characterizations. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2021, pp. 1-12). Hindawi Limited.

[30] Gürhan, N., Frenet Eğrisi ile Bağlantılı Eğriler ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, 2013.