T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MAKİNE TEORİSİ VE DİNAMİĞİ BİLİM DALI

KADEMELİ NANO KİRİŞ TİTREŞİMLERİNİN YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE TEORİSİNE GÖRE İNCELENMESİ

Mustafa Oğuz NALBANT

Danışman
Doç. Dr. Süleyman Murat BAĞDATLI

2. Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Ayla TEKİN

MANİSA–2022

MUSTAFA
OĞUZ
NALBANT

KADEMELİ NANO KİRİŞ TİTREŞİMLERİNİN YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE TEORİSİNE GÖRE İNCELENMESİ

2022

TEZ ONAYI

Mustafa Oğuz NALBANT tarafından hazırlanan **"Kademeli Nano Kiriş Titreşimlerinin Yerel Olmayan Elastisite Teorisine Göre İncelenmesi"** adlı tez çalışması 07/07/2022 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Makine Mühendisliği Anabilim Dalı**'nda **Doktora Tezi** olarak savunulmuş ve **oybirliği** ile başarılı olarak kabul edilmiştir.

Danışman	**Doç. Dr. Süleyman Murat BAĞDATLI** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Saim KURAL** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Serkan ÇAŞKA** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Levent AYDIN** İzmir Kâtip Çelebi Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Aysun BALTACI** Ege Üniversitesi	.....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Mustafa Oğuz NALBANT

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ	V
TABLOLAR	VII
TEŞEKKÜR	VIII
ÖZET	IX
ABSTRACT	XI
1. GİRİŞ	1
1.1. Genel Bilgiler	1
2. HAREKET DENKLEMLERİ	9
2.1. Eringen'in Yerel Olmayan Elastisite Teorisi	9
2.2. Matematiksel Model	11
2.3. Boyutsuzlaştırma	20
3. ANALİTİK ÇÖZÜM	23
3.1. Perturbasyon Analizi	23
3.2. Lineer Problemin Çözümü	30
3.3. Nonlineer Problemin Çözümü	34
3.3.1.Baskın Rezonans Durumu	36
3.4. Numerik Çözüm	47
3.4.1. Serbest Titreşim Durumu	47
3.4.2. Zorlamalı ve Sönümlü Titreşim Durumu	48
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMALAR	50
4.1. Kademeli Nano Kirişe ait Lineer Titreşim Durumu için Sayısal Çözümler	50
4.2. Kademeli Nano Kirişe ait Nonlineer Titreşim Durumu için Sayısal Çözümler	55
5. SONUÇLAR VE YORUMLAR	82
KAYNAKLAR	86
ÖZGEÇMİŞ	91

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A	Kademeli Kirişin Kesit Alanı
a	Genlik
d	Kademeli Kirişin Kesit Yarıçapı
d_x	Diferansiyel Boyuttaki Elemana Ait Uzunluk
d_s	Diferansiyel Boyuttaki Elemana Ait Kesit Alanı
D_0, D_1	Hızlı ve Yavaş Zaman Ölçekleri İçin Türev İfadeleri
E	Elastisite Modülü
e_0	Malzemeye Ait Fiziksel Sabit
f	Zorlama Kuvveti Katsayısı
F	Zorlama Genliği
I	Kademeli Nano Kirişin Nötr Eksene Göre Kesit Alan Momenti
L	Kademeli Kirişin Boyu
N	Eksenel Kuvvet
$O(1)$	1 Mertebesi
$O(\varepsilon)$	ε Mertebesi
R	Kademeli Kirişin Atalet Yarıçapı
t	Zaman Değişkeni
T	Kinetik Enerji
T_0	Hızlı Zaman Ölçeği
T_1	Yavaş Zaman Ölçeği
u	Kirişin Eksenel Yer Değiştirmesi
V	Potansiyel Enerji
w	Kirişin Enine Deplasmanı
W	Yer Değiştirme Fonksiyonuna Ait Seküler Olmayan Terimleri İfade Eden Fonksiyon
x	Yer Değişkeni
x_s	Kademenin Başlangıç Noktasına Uzaklığı

Y	Mekâna Bağlı Yer Değiştirme
σ	Zorlama Frekansı Ayar Parametresi
ρ	Kademeli Kirişin Yoğunluğu
ϕ	Yer Değiştirme Fonksiyonuna Ait Seküler Terimleri İfade Eden Fonksiyon
Γ_1	Kademe Öncesi Hareket Denklemi Katsayı Kısaltması
Γ_2	Kademe Sonrası Hareket Denklemi Katsayı Kısaltması
α	Kademelerin Yarıçapları Oranını Gösteren Boyutsuz Parametre
$\pounds$	Lagrangian
δ	Varyasyon Türevi
λ	Nonlineer Terimlerden Gelen Düzeltme Parametresi
γ	Boyutsuz Yerel Olmayan Küçük Ölçek Parametresi
η	Kademe Yerinin Başlangıç Noktasına Olan Uzaklığını Gösteren Boyutsuz Parametre
μ	Sönümleme Katsayısı
ε	Küçük Boyutsuz Parametre (Perturbasyon Parametresi)
Ω	Zorlama Frekansı
ω	Tabii Frekans
ω_{nl}	Nonlineer Frekans
θ	Polar Formdaki Kompleks Genliğin Faz Farkı
ψ	Faz Parametresi
$( )'$	Konuma Göre 1. Mertebe Türevi
$( )''$	Konuma Göre 2. Mertebe Türevi
$( )'''$	Konuma Göre 3. Mertebe Türevi
$( )^{iv}$	Konuma Göre 4. Mertebe Türevi

K.E.	Kompleks Eşlenik
S.O.T.	Seküler Olmayan Terimler
S.T.D.	Eşitliğin Sağ Tarafında Kalan Denklemler

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1.1.1. Taramalı Elektron Mikroskobu ile Taranmış Kademeli Nano Kirişi Örnekleri..... 4
Şekil 2.2.1. Kademeli Nano Kirişin Şematik Gösterimi……. 11
Şekil 2.2.2. Kademeli Nano Kiris İçin Uzama Etkisi Kaynaklı Deplasmanlar... 12
Şekil 2.2.3. Diferansiyel Elemanın Uzamasına Karşılık Gelen Dik Üçgen..... 12
Şekil 4.2.1. Farklı Yerel Olmayan Parametre değerlerine karşılık Frekans- Tepki Eğrisi ($\alpha = 0.5,\ \eta = 0.4$)……... 58
Şekil 4.2.2. Farklı Yerel Olmayan Parametre Değerleri İçin Nonlineer Frekans – Genlik Eğrileri ($\alpha = 0.5\ ,\ \eta = 0.4$)……... 59
Şekil 4.2.3. Farklı Yerel Olmayan Parametre Değerlerine Karşılık Gelen Frekans-Tepki Eğrisi ($\alpha = 0.8,\ \eta = 0.4$)……... 60
Şekil 4.2.4. Farklı Yerel Olmayan Parametre Değerlerine Karşılık Gelen Nonlineer Frekans – Genlik Eğrileri ($\alpha = 0.8\ ,\ \eta = 0.4$)…… 61
Şekil 4.2.5. Farklı Yerel Olmayan Parametre Değerlerine Karşılık Gelen Frekans-Tepki Eğrisi ($\alpha = 2\ ,\ \eta = 0.4$)……..... 62
Şekil 4.2.6. Farklı Yerel Olmayan Parametre Değerlerine Karşılık Gelen Nonlineer Frekans – Genlik Eğrileri ($\alpha = 2\ ,\ \eta = 0.4$)……..... 63
Şekil 4.2.7. Farklı Kademe Yerleri İçin Frekans- Tepki Eğrisi ($\alpha = 0.5,\ \gamma = 0.2$)…… 64
Şekil 4.2.8. Farklı Kademe Yerlerine Karşılık Gelen Nonlineer Frekans – Genlik Eğrileri ($\alpha = 0.5,\ \gamma = 0.2$)……... 65
Şekil 4.2.9. Farklı Kademe Yerleri İçin Frekans- Tepki Eğrisi ($\alpha = 0.8,\ \gamma = 0.2$)…… 66
Şekil 4.2.10. Farklı Kademe Yerlerine Karşılık Gelen Nonlineer Frekans – Genlik Eğrileri ($\alpha = 0.8,\ \gamma = 0.2$)……... 67
Şekil 4.2.11. Farklı Kademe Oranları İçin Frekans- Tepki Eğrisi ($\eta = 0.8,\ \gamma = 0.2$)…… 68
Şekil 4.2.12. Farklı Kademe Oranlarına Karşılık Gelen Nonlineer Frekans – Genlik Eğrileri ($\eta = 0.8,\ \gamma = 0.2$)…… 69
Şekil 4.2.13. Farklı Kademe Oranları İçin Frekans- Tepki Eğrisi ($\eta = 0.6,\ \gamma = 0.2$)…….. 70
Şekil 4.2.14. Farklı Kademe Oranlarına Karşılık Gelen Nonlineer Frekans – Genlik Eğrileri ($\eta = 0.6,\ \gamma = 0.2$)……... 71
Şekil 4.2.15. Farklı Yerel Olmayan Parametre Değerlerine Karşılık Gelen Frekans – Tepki Eğrisi ($\alpha = 0.5,\ \eta = 0.2$)…… 72
Şekil 4.2.16. Farklı Yerel Olmayan Parametre Değerlerine Karşılık Gelen Nonlineer Frekans – Genlik Eğrileri ($\alpha = 0.5\ ,\ \eta = 0.2$)……. 73
Şekil 4.2.17. Farklı Yerel Olmayan Parametre Değerlerine Karşılık Gelen Frekans-Tepki Eğrisi ($\alpha = 0.5,\ \eta = 0.6$)……... 74
Şekil 4.2.18. Farklı Yerel Olmayan Parametre Değerlerine Karşılık Gelen Nonlineer Frekans – Genlik Eğrileri ($\alpha = 0.5\ ,\ \eta = 0.6$)…… 75

Şekil 4.2.19. Farklı Yerel Olmayan Parametre Değerlerine Karşılık Gelen Frekans-Tepki Eğrisi ($\alpha = 0.5,\ \eta = 0.8$)……... 76
Şekil 4.2.20. Farklı Yerel Olmayan Parametre Değerlerine Karşılık Gelen Nonlineer Frekans –Genlik Eğrileri ($\alpha = 0.5\ ,\ \eta = 0.8$)…… 77
Şekil 4.2.21. Farklı Kademe Yerleri İçin Frekans- Tepki Eğrisi ($\alpha = 0.8,\ \gamma = 0.4$)…… 78
Şekil 4.2.22. Farklı Kademe Yerlerine Karşılık Gelen Nonlineer Frekans – Genlik Eğrileri ($\alpha = 0.8,\ \gamma = 0.4$)…….. 79
Şekil 4.2.23. $\alpha = 1$ Olan Kademeli Nano Kirişe (Sol) Ve Kademesiz Nano Kirişe Ait (Sağ) Farklı Yerel Olmayan Parametre Değerlerine Karşılık Gelen Frekans- Tepki Eğrileri…….. 80
Şekil 4.2.24. $\alpha = 1$ Olan Kademeli Nano Kirişe (Sol) Ve Kademesiz Nano Kirişe Ait (Sağ) Farklı Yerel Olmayan Parametre Değerlerine Karşılık Gelen Nonlineer Frekans – Genlik Eğrileri……... 80

TABLOLAR

Sayfa

Tablo 3.3.1.1. Kademeli Nano Kirişin Boyutsuz Sınır Şartları……. 43
Tablo 4.1.1. Farklı Yerel Olmayan Parametrelere Göre İlk Üç Temel Frekansın Karşılaştırılması 49
Tablo 4.1.2. $\gamma = 0.2$ İçin Farklı Kademe Yer ve Oranlarına Karşılık Gelen İlk Üç Temel Frekans Değerleri……. 50
Tablo 4.1.3. $\eta = 0.4$ Kademe Konumunda Farklı Yerel Olmayan Parametre Değerleri Ve Kademe Oranlarına Karşılık Gelen İlk Üç Temel Frekans Değerleri…… 51
Tablo 4.1.4. $\alpha = 0.5$ Kademe Oranında Farklı Yerel Olmayan Parametre Değerleri Ve Kademe Yerlerine Karşılık Gelen İlk Üç Temel Frekans Değerleri…… 52
Tablo 4.1.5. $\alpha = 0.8$ Kademe Oranında Farklı Yerel Olmayan Parametre Değerleri Ve Kademe Yerlerine Karşılık Gelen İlk Üç Temel Frekans Değerleri…… 53
Tablo 4.2.1. Kademeli Nano Kiriş İçin Farklı Değerlere Karşılık Gelen İlk Üç Mod Temel Frekans Değeri ve Nonlineer Terimlerin Doğal Frekansa Katkıları... 54
Tablo 4.2.2. Kademeli Nano Kiriş İçin Farklı Değerlere Karşılık Gelen İlk Üç Mod Temel Frekans Değeri ve Nonlineer Terimlerin Doğal Frekansa Katkıları... 55
Tablo 4.2.3. Kademeli Nano Kiriş İçin Farklı Değerlere Karşılık Gelen İlk Üç Mod Temel Frekans Değeri ve Nonlineer Terimlerin Doğal Frekansa Katkıları... 56
Tablo 4.2.4. Kademeli Nano Kiriş İçin Farklı Değerlere Karşılık Gelen İlk Üç Mod Temel Frekans Değerler ve Nonlineer Terimlerin Doğal Frekansa Katkıları... 57

TEŞEKKÜR

"Yapacağı işi ehli ile istişare edene, o işin en güzeli nasip olur" düsturunda sözü geçen ehil kişi olduğundan zerre şüphe etmediğim danışman hocam Sayın Doç. Dr. Süleyman Murat BAĞDATLI' ya, bu tez çalışması süresince vermiş olduğu destek, paylaşmış olduğu bilgi ve deneyimler için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmanın sağlıklı bir şekilde ilerlemesinde büyük yardımları olan, bilgi ve tecrübesi ile iş hayatım ve lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aşamalarında maddi manevi her yönden yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum ikinci danışman hocam ve kurum müdürüm Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ayla TEKİN'e en içten duygularımla teşekker ederim.

Çalışmanın yürütülmesi sürecinde görüş ve fikirleriyle yolumuzu andınlatan tez komite üyesi hocalarım Sayın Doç. Dr. Levent AYDIN ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Saim KURAL'a teşekkürlerimi borç bilirim.

Akademik dünyayı bana tanıtan, bu yolun benim de yolum olabileceğini bana inandıran hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Murat BALCI'ya ve akademik hayatımda karşılaştığım her ikilemde fikrini almam gerektiğine inandığım, tecrübeleriyle beni aydınlatan yüksek lisans danışmanım Sayın Doç. Dr. Semih SEZER'e teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca gölgesinin serinliğini hissettiğim, bana dünyayı ve dünyada doğru insan olmayı öğreten, yaşam mimarım canım annem Leman NALBANT'a üzerimdeki tüm emekleri için teşekkür ederim.

Akademik eğitim sürecim sırasında hayatıma giren, çalışmanın her anına şahit olan, sabrını, desteğini ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen en kıymetlim sevgili eşim Öğretmen Feyzanur NALBANT'a, kalben teşekkür ederim.

İsmini yazamadığım fakat eğitim hayatım boyunca desteklerini her daim yanımda hissettiğim aile fertlerime, hocalarıma ve iş arkadaşlarıma da sonsuz teşekkür ederim.

Yazar bu çalışmasını erken yaşında kaybettiği ve izinden gitmekten gurur duyduğu merhum babası Öğretmen Hayati NALBANT'a adamaktadır.

Mustafa Oğuz NALBANT
Manisa, 2022

ÖZET

Doktora Tezi

Kademeli Nano Kiriş Titreşimlerinin Yerel Olmayan Elastisite Teorisine Göre İncelenmesi

Mustafa Oğuz NALBANT

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Süleyman Murat BAĞDATLI

2. Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ayla TEKİN

Bu çalışmada kademeli nano kirişlere ait titreşimlerin Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisine göre incelenmesi ele alınmıştır. Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi, nano ölçekli etkiyi yakalamak için kullanılmıştır. Çalışma kapsamında seçilen kademeli nano yapı Euler Bernoulli kiriş teorisi sınırlarına tabiidir.

Kademeli nano kirişin kademe öncesi ve sonrasına ait integro diferansiyel durum denklemleri enerji metotlarından biri olan hamilton prensibi kullanılarak bulunmuştur. Ayrıca durum denklemlerine sönüm ve zorlama terimleri de eklenerek sistemin zorlama altındaki titreşim hareketlerinin de incelenmesi hedeflenmiştir. Daha sonra elde edilen denklemler malzemenin fiziksel yapısından ve boyutlarından bağımsızlaştırmak için boyutsuzlaştırma işlemine tabi tutulmuştur.

Boyutsuz durum denklemlerini çözmek için perturbasyon metotlarından biri olan çok zaman ölçekli metot uygulanmıştır. Çözüm iki aşamada ele alınmıştır.

İlk aşamada perturbasyon açılımından elde edilen ilk mertebe terimleri lineer problemi oluşturmuştur. Lineer problem çözülmesiyle tabii frekans denklemleri elde edilmiş ve farklı şartlar için ilk üç mod değerleri bulunarak tablolar halinde sunulmuştur.

İkinci aşamada ise perturbasyon açılımının ikinci mertebesinin çözümü yapılmış ve bu çözümden lineer problemin düzeltmeleri olarak nonlineer terimler ortaya çıkmıştır. Nonlineer terimlerin doğal frekanslara etkileri farklı şartlar için hesaplanmıştır. Zorlama frekansının sistemin doğal frekansına yakın olduğu baskın rezonans durumu ele alınmış ve kararlılık analizi yapılmıştır.

Çalışmada temel olarak kirişin nano boyutta ve kademeli olması durumlarının incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda araştırmanın bulguları elde edilirken nano ölçekli etkiyi yakalamak için çeşitli yerel olmayan parametre değerleri ve kademe etkisini yakalamak için ise farklı kademe yarıçap oranları ve kademe yerleri için kirişe ait 1. Mod değerlerine karşılık gelen frekans-tepki ve nonlineer frekans-genlik eğrileri elde edilmiştir.

Titreşim analizi sonucu elde edilen verilerin doğruluğunu güçlendirmek amacıyla, literatürde bulunan Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi ile yapılan nano kiriş ve diğer klasik kiriş teorileri ile yapılan çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Nano Yapı, Kademeli Kiriş, Titreşim, Yerel Olmayan Elastisite, Perturbasyon Metodu

2022, 92 sayfa

ABSTRACT

PhD Thesis

Investigation of Stepped Nano Beam Vibrations According to Nonlocal Elasticity Theory

Mustafa Oğuz NALBANT

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mechanical Engineering

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Süleyman Murat BAĞDATLI

Co-Supervisor: Assist. Prof. Dr. Ayla TEKİN

In this study, vibrations of stepped nanobeams were investigated according to Eringen's nonlocal elasticity theory. Eringen's nonlocal elasticity theory was used to capture the nanoscale effect. The stepped nanostructure chosen within the scope of the study is subject to the limits of Euler Bernoulli beam theory.

The integro differential equations of state of the stepped nanobeam before and after the step were found using the Hamilton principle, which is one of the energy methods. In addition, by adding damping and forcing terms to the state equations, it is aimed to examine the vibration movements of the system under stress. Then, the obtained equations were subjected to nondimensionalization process to make them independent from the physical structure and dimensions of the material.

Multi-time scale method, which is one of the perturbation methods, has been applied to solve dimensionless state equations. The solution is considered in two stages.

In the first stage, the first order terms obtained from the perturbation expansion formed the linear problem. By solving the linear problem, the natural frequency equations were obtained and the first three mode values for different conditions were found and presented in tables.

In the second stage, the solution of the second order of the perturbation expansion was made and nonlinear terms emerged as corrections of the linear problem from this solution. The effects of nonlinear terms on natural frequencies are calculated for different conditions.

The main aim of the study is to examine the nano-sized and stepped beams. For this purpose, while the findings of the research were obtained, various non-local parameter values were obtained to capture the nano-scale effect, and frequency-response and nonlinear frequency-amplitude curves corresponding to the 1st Mode values of the beam for different step radius ratios and step locations were obtained to capture the step effect.

In order to strengthen the accuracy of the data obtained as a result of vibration analysis, the results of the study were compared with the results of the nano beam study with Eringen's non-local elasticity theory in the literature and with the results of the study with other classical beam theories.

Keywords: Nano structure, Stepped Beam, Vibration, Nonlocal Elasticity, Perturbation Method

2022, 92 pages

1. GİRİŞ

1.1.Genel Bilgiler

Günümüz teknolojisinde, çalışma disiplinlerinin sayıca artması ve genişlemesiyle birlikte üretilen teknolojiden beklentilerin de arttığı bir gerçektir. Ürünün gerek çalıştığı ortam şartlarının hassasiyetleri gerekse cihazdan beklenen üstün malzeme özellikleri gibi birçok yeni ürün güncellemelerinin talep edildiği çağda cihaz boyutlarının da hızla küçülmesi kaçınılmaz bir beklenti olmaktadır.

Malzeme bilimine göz atıldığında üretilen malzemenin boyutları küçüldükçe bilhassa nanometre mertebelerine gözlemlendiğinde, malzemelerin makro boyutta sahip oldukları mekanik özelliklerinden bambaşka ve mükemmel olarak atfedebileceğimiz yeni fiziksel özellikleri ortaya çıktığını tecrübe etmekteyiz. Malzemelerin kafes yapılarında uygulanan yeni tasarımlar ile olağanüstü özelliklerde yeni suni malzemeler imal edilebilmektedir. Bu yeni malzemelerden faydalanılarak nano boyutlarda imalatlar yapılıp teknolojik makineler ve sistemler üretilebilmektedir. Bahsettiğimiz bu modern teknolojiye nano teknoloji adı verilmektedir.

Dünya çapında nano teknolojik uygulamalara yapılan yatırımlar gün geçtikçe artmaktadır. Günümüzde nano teknoloji elektronik endüstrisi, uzay sanayi, tıbbi uygulamalar, ilaçlar, kozmetikler ve çevresel süreçler gibi birçok farklı alanlarda kullanılmaktadır. Nano yapılar, nano siviçler, nano aktüatörler, nano sensörler, nano-rezonatörler ve sıvı taşıma cihazları gibi mekanik bilimdeki birçok uygulama için önemli işlevlere sahip önemli unsurlar olarak kullanılmıştır [1-5].

Nano boyutta yapılan çalışmaların temel alanlarından birisi de kuşkusuz nano mekaniktir. Nano mekaniğin çalışma alanı, nano ölçekteki yapıların kuvvet ve deplasman ilişkilerini, titreşim ve frekans analizi ile işlevsel ve şekil değiştirme karakteristiklerinin incelenmesini kapsamaktadır. Özellikle, akıllı malzemeler teknolojisinin gündeme gelmesi ile bilim dünyasında karbon nano tüplerin keşfi [6,7], Mikro elektro mekanik sistemlerin (MEMS) [8-11] ve nano elektromekanik sistemlerin (NEMS) [12-15] araştırma konularına eklenmesi nano mekanik konularına

ilgiyi fazlasıyla arttırmıştır. Bu araştırmalar kapsamında yapılan tüm çalışmalarda çubuklar, kirişler ve plakalar gibi matematiksel modeller ele alınmaktadır. Özellikle çalışma kapsamında titreşim ve frekans analizlerinde kiriş modeline sık sık başvurulmaktadır. Bilim dünyasında gerek makro gerekse mikro ve nano boyutlarda sayısız kiriş modeli kullanılan çalışmaya rastlamak mümkündür. Bu çalışmada ele alınan nano kirişler için de bu durum daha az sayıda olmakla birlikte aynıdır. Bu çalışmaların bazılarını aşağıdakiler gibi özetleyebiliriz.

Eric W. Wong vd. nano kirişlerin mekaniği üzerine yaptıkları genel çalışmada, nano tüpler ve çubukların mukavimi, tokluğu ve esnekliği üzerine deneysel çalışmalar yapmış, çeşitli malzeme örneklerinin atomik kuvvet mikroskobu altında mekanik özelliklerini belirlemeye yoğunlaşmıştır. Çalışmanın sonuçları nano boyutta kirişlerin makro boyuttaki bir kirişle karşılaştırıldığında çok farklı mekanik özelliklere sahip olduğunu deneysel olarak göstermiştir [16].

Aydoğdu yapmış olduğu çalışmada, nano kirişlerin bükülmesini, burkulmasını ve serbest titreşimini incelemek için Eringen'in genelleştirilmiş yerel olmayan kiriş teorisinden faydalanmıştır. Çalışmada, Euler-Bernoulli, Timoshenko, Reddy ve Aydoğdu olmak üzere birçok farklı kiriş teorisi kullanmışlardır. Yerel olmayan parametre etkisi, kiriş boyu etkisi tüm farklı teorilerden üretilen modeller için ele alınmıştır. Sonuç kısmında verilerin nano tüplerin statik ve dinamik analizlerinde kullanılabileceğini önermiştir [17].

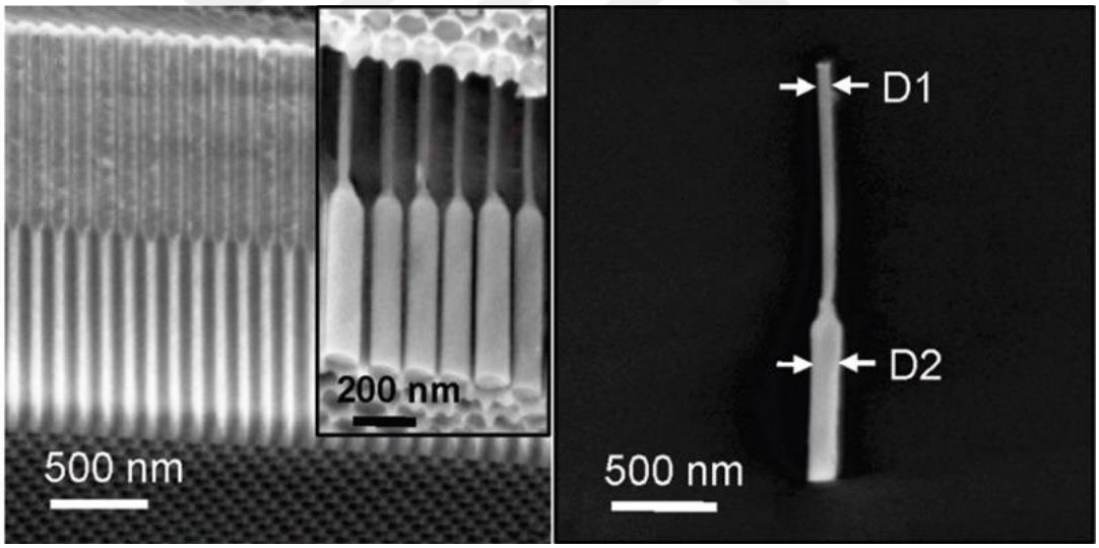
Simsek çalışmasında, fonksiyonel derecelendirilmiş nano kirişin nonlineer titreşimlerini yerel olmayan gerinim gradyanı ve hamilton yaklaşımlarından faydalanarak incelemiştir. Yapmış olduğu analiz sonuçlarından, boyutsuz yerel olmayan parametrenin sertlik yumuşatma etkisinden dolayı doğrusal olmayan frekans oranını azalttığı gözlemlemiştir. İkinci olarak ise iki boyutsuz ölçek parametresi birbirine eşit olduğunda klasik ve klasik olmayan sonuçlar aynı olduğu ve iki ölçekli boyutlu parametresi, nispeten daha düşük titreşim genliğinde fonksiyonel derecelendirilmiş nano kirişin doğrusal olmayan tepkilerinde daha etkili olduğunu vurgulamıştır. Gradyan indeksinin ise istenen titreşim yanıtları için optimum malzeme varyasyonunu elde etmek için kullanılabileceğini söylemiştir[18].

Bağdatlı ve ark. çalışmalarında nano elektromekanik sistemlerin yapısında sıklıkla rastlanan ortadan mesnetli nanokirişin lineer titreşimini analiz etmişlerdir. Nano ölçek etkisini analize dahil edebilmek için Eringen'e ait yerel olmayan elastisite teorisini kullanmışlardır. Ortadan mesnetli nano kirişe ait durum denklemi Hamilton prensibi ile bulunmuş ve durum denklemini yaklaşık olarak çözmek için bu çalışmada da başvurulan pertürbasyon metotlarından olan çok ölçekli metottan yararlanmışlardır. Çalışmalarında orta mesnetin başlangıç noktasın uzaklığı ve Eringen'in teorisinden gelen yerel olmayan parametre odak noktaları olmuştur. Sonuçları grafikler ve tablo ile sunmuşlardır. Çalışmanın sonucunda, yerel olmayan parametre değerinin artmasıyla daha fazla nano boyutta yapının elde edilmekte olduğu ve orta mesnet yerinin kirişin orta nokta noktasına konumlandırılması durumunda maksimum yüksek rijitliği ve lineer tabii frekans değeri elde edildiğini vurgulamışlardır [19]. Bağdatlı ve Toğunun, kaleme aldıkları bir diğer çalışmada, farklı sınır şartları altında gerilmiş nanokirişin lineer olmayan titreşimlerini incelemişlerdir. Sisteme ait diferansiyel denklemlerini bulmak için Hamilton prensibi ve bir diğer kiriş teorisi olan Modifiye edilmiş kuvvet çifti teorisinden (MGÇT) faydalanmışlardır. Analizde sönümleme ve zorlama etkilerini dikkate almışlar ve denklemleri çözmek için diğer çalışmalarına benzer şekilde perturbasyon metodundan yararlanmışlardır. Sistemin frekans-tepki eğrileri oluşturulmuş ve ayrıca farklı sistem parametrelerinin sistemin titreşimi üzerindeki etkisini belirleyerek sayısal ve grafik olarak sunmuşlardır. Sonuç kısmında ise boyut etkisinin, yüksekliğinin nano ölçekte olan çok ince kirişler için önemli olduğunu ve MGÇT tarafından tahmin edilen titreşim frekansının, klasik kiriş teorisinden elde edilen frekanstan daha büyük olduğu sonucuna varmışlardır [20].

Khaniki çalışmasında, Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisinin, farklı sınır koşullarına sahip küçük ölçekli yapıları analiz etmede bazı yanlışlıklara sahip olduğunu öne sürmüş ve bu nedenle, Eringen'e ait iki aşamalı yerel ve yerel olmayan integral modelini, kuramın güvenilir ve iyi tasarlanmış bir formu olarak görmüş, boyuta bağlı etkilerin modellenmesinde kullanımının doğru olacağını belirtmiştir. Bu bilgi ışığında çalışmasında, çift katmanlı nano kiriş sisteminin titreşim davranışını incelemiştir. Çift katmanlı nano kirişin titreşim davranışı, faz içi titreşim, faz dışı titreşim ve alttaki katmanın sabitlenmesi üç farklı durum için formüle etmiştir. Eringen'in iki aşamalı modelinde yerel olmayan terimlerin etkisini ve bu tür yapıların dinamik davranışı üzerindeki elastik bağlantı terimini göstermek için kapsamlı bir

parametrik çalışma yürütmüştür ve bu parametrelerin, farklı sınır koşulları ile daha doğru ve güvenilir dinamik modellere yol açabilecek doğal frekans terimlerine önemli etkiye sahip olabileceğini vurgulamıştır [21].

Sürekli ortamlar mekaniği teorisinde, karbon nano tüpleri veya nano kirişleri, homojen ve sürekli makro yapılar olarak kabul edilmektedir. Malzeme yapısındaki kafes boşlukları ya da şekil 1'de de örnekleri görünen kademeler veya çatlaklar gibi sistemin sürekliliğini bozan bazı çizgisel ve yüzeysel hatalar gibi, malzeme nano yapısına ait fiziksel özellikler ihmal edilmektedir. Nano boyutta, malzemenin sahip olduğu özellikler boyutuna bağlı olarak farklılık gösterdiği için, nano malzemelerin mekanik davranışlarının incelenmesinde fiziksel özelliklerin ihmal edilmemesi gerçek mühendislik uygulamalarında daha doğru analizler sonuçlarına imkân tanıyacaktır. Bu kapsamda kademeli ve çatlak yüzeye sahip kirişler üzerine yapılan birçok araştırma mevcuttur.



Şekil 1.1.1 Taramalı Elektron Mikroskobu ile Taranmış Kademeli Nano Kirişi Örnekleri [22]

Tekin yapmış oldukları çalışmada, çok kademeli Euler-Bernoulli kirişinin doğrusal olmayan titreşimlerini incelemiştir. Kirişi her iki uçtan basit basit mesnetli sınır şartlarına sahip modellemiştir. Durum denklemlerini Hamilton prensibinden faydalanarak bulmuş ve boyutsuz hale getirmiştir. Germe etkisi, denklemlere doğrusal olmayan terimleri indüklemiş ve zorlama ve sönümleme terimleri de denklemlere

dahil edilmiştir. Hareket denklemlerine pertürbasyon yöntemi uygulamıştır. Doğrusal problem için doğal frekanslar, farklı adım durumları için tam olarak hesaplanmıştır. Pertürbasyon serisinin ikinci dereceden lineer olmayan terimleri ise lineer problemin düzeltmeleri olarak ortay çıkmıştır. Genlik ve faz modülasyon denklemlerini bulmuş ve Nonlineer ve zorlanmış titreşimleri ayrıntılı olarak incelemiştir. Bu analizleri farklı kademe oranları ve kademe yerleri için tekrarlamıştır [23]. Tekin ikinci çalışmasında, farklı noktalarda n adet kademeye sahip farklı geometri kesitli üç kiriş sistemine ait serbest titreşimleri üzerine çalışmıştır [24]. Tekin ve ark. diğer bir çalışmalarında ise, kübik nonlineeriteye sahip çok kademeli kirişlerin titreşimlerini ele almışlardır. Sistemin farklı sınır şartları altında rezonans durumlarını incelemişlerdir. Sistemin sahip olduğu ilk üç modunu incelemişler ve kuvvet tepkisi, sönümleme tepkisi ve frekans tepkisi eğrilerini titreşimlerin iç rezonans modları için çizmişler ve bu veriler ışığında stabilite analizi yapmışlardır [25].

Z.R. Lu ve ark, yazdıkları çalışmalarında, bir kompozit eleman yöntemi kullanılarak çoklu kesit kademeleriyle kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimlerini analiz etmekte yeni yaklaşım önermişlerdir. Sonuçları, kabul fonksiyonu yöntemi ve klasik Rayleigh Ritz yöntemi ve sonlu eleman sonuçları ile karşılaştırmışlardır. Bileşik eleman yönteminden elde edilen doğal frekansların yukarıda bahsedilen diğer yöntemlerle ve sonlu eleman yöntemiyle yakın uyum içinde olduğunu bulmuşlardır. Bu durumla çalışmanın sonunda, kademeli kirişin titreşim analizleri için önerilen yöntemin doğruluğunu gösterdiğini iddia etmişlerdir [26].

Xing-Jian v ark. araştırmalarında, kademeli lamine kompozit Timoshenko kirişinin titreşim özelliklerini incelemişlerdir. Birinci dereceden kayma deformasyon teorisine dayanarak, bir lamine kirişin eğilme rijitliği ve enine kesme rijitliği belirlemişlerdir. Kayma deformasyonunun ve kademeli kirişin döner ataletinin etkisini hesaba katmak için, Timoshenko kiriş teorisini frekans fonksiyonunu çıkarmak için kullanmışlardır. T300 / 970 lamine kademeli kirişin doğal frekanslarının ve mod şekillerinin grafikleri, kademeli konum parametresi uygulamalarının kirişin dinamik davranışı üzerindeki etkisini göstermek için vermişlerdir [27].

Kademeli kirişlerin titreşim analizleri için Adomian ayrıştırma yöntemine de sık sık başvurulmaktadır. Qibo ve ark, Adomian ayrıştırma yöntemini (ADM), iki

üniform bölümden meydana gelen kademeli Euler-Bernoulli kirişinin serbest titreşimlerini araştırmak için kullanmışlardır [28]. Qibo diğer bir çalışmasında ise, Adomian ayrıştırma yönteminden faydalanarak çoklu kesit adımlarına sahip Euler-Bernoulli kirişlerinin serbest titreşimlerini araştırmak için kullanmıştır [29].

Akbaş yapmış olduğu çalışmada, kenar çatlaklı mikro kirişlerin statik bükülmesi, MGÇT'ye dayalı olarak eşit dağılmış enine yükleme altında analitik olarak incelemiştir. Sayısal çalışmada, farklı çatlak pozisyonları, kirişin farklı uzunlukları, farklı uzunluk ölçek parametreleri, farklı çatlak derinlikleri ve bazı tipik sınır koşulları için kenar çatlaklı mikro kirişlerin elastik sapmaları hesaplamış ve yorumlamıştır. Ayrıca, klasik kiriş teorisi ile Modifiye edilmiş çift gerilme teorisi arasındaki fark, kenar çatlaklı mikro kirişlerin statik eğilmesi için araştırmıştır. Tablodaki sonuçların, diğer araştırmacıların sonuçlarını karşılaştırabilecekleri bir referans olacağını öne sürmüştür [30].

M.Shaat ve ark. araştırmalarında, nanokristalin malzemelerden yapılmış çatlak nano-kirişlerin titreşim özelliklerini araştırmak için boyuta bağlı Euler Bernoulli kiriş modeli geliştirmişlerdir. Önerdikleri modelde, kiriş malzemesi yapısını ve boyut etkilerini modellemek için boyuttan bağımsız bir mikro mekanik modeli ve Mindlin'in çift gerilim teorisinden faydalanmışlardır. Çalışmanın sonunda, çatlağın sahip olduğu uzunluğu, çatlağın kiriş üzerindeki konumu, kirişin sahip olduğu malzeme yapısı ve boyutunun titreşim hareketlerine etkilerini vurgulayan parametrik bir çalışma yapmışlardır [31].

Masih vd. nano kirişlerin doğal frekanslarını çeşitli süreksizlikler ve sınır koşullarının etkilediği bilgisini öne sürerek yaptıkları çalışmada, çoklu süreksizliklerle birlikte Euler-Bernoulli nano kirişinin serbest yanal titreşimini incelenmişlerdir. Yönetim denklemlerini, Eringen'in yerel olmayan esneklik teorisi kullanılarak geliştirilmişler ve çalışmalarında çatlaklar ve kademeleri, süreksizlikler olarak kabul etmişlerdir. Çatlakları, sonsuz küçük uzunluğa sahip kütlesiz bir burulma yayı ile modellemiş ve kademeleri farklı kesit alanlarına ve mekanik özelliklere sahip iki bağlantılı nano kiriş olarak kabul etmişlerdir. Sınırı, burulma ve öteleme yayı birleştirilerek oluşturmuşlardır. Ayrıca, çalışmalarında kirişin ucundaki buckyball (topaklanmış bir kütle olarak) bir sınır koşulu olarak kabul edilmiştir. Çatlak şiddeti,

enine kesit alanının basamak olarak değişen oranı, çatlak ve basamak konumu, buckyball kütlesi ve küçük ölçekli parametrenin doğal frekanslar üzerindeki etkilerini tartıştıkları araştırmalarında uyguladıkları yaklaşımın, diğer çalışmalar için kriter olarak kullanılabilecek bir dizi örnekten oluşturulduğunu ileri sürmüşlerdir [32].

Uluslararası alanda literatür veri tabanları incelendiğinde Jaan Lellep vd. son birkaç yıldır yaptıkları çalışmalarla kademeli nano kirişler üzerine yoğunlaşan nadir araştırmacılardan oldukları gözlemlenmektedir. Bu konuda yaptıkları ilk çalışmada [33] nano malzemelerden yapılmış kirişlerin ve çubukların serbest titreşimlerini incelemişlerdir. Çalışmada, nano kirişlerin kesit boyutlarının kademeli olarak değiştiği ve kirişlerin çatlaklarla zayıfladığı varsayılmıştır. Nano malzemenin titreşim davranışının yerel olmayan esneklik teorisi içinde tanımlanabilmesi ve çatlağın ek yerel uyumu indüklemesi beklenmiştir. J. Lellep vd. yaptıkları ikinci çalışmada, Nano kirişlere ait enine titreşimlerin analizi için yerel olmayan esneklik teorisine dayanan kesin çözümler sunmuşlardır. İncelenen nano kirişler, kademeli enine kesit boyutlarına sahiptir ve çatlak benzeri kusurlarla zayıflatılmıştır. Durağan çatlakların kademelerin bulunduğu noktada meydana geldiği ve nanomalzemenin mekanik davranışının Eringen'in yerel olmayan teorisi ile modellenebileceği varsayılmıştır. Çalışmada öz frekansların belirlenmesi için genel bir algoritma geliştirilmiştir [34]. J. Lellep vd. yaptıkları son çalışmada ise, dönme ataletinin çatlak ve kademeli nano kirişlerin doğal frekansı üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Çalışmada tek kademeli nano kirişin hareket denklemlerinin elde edilmesinde Homotopi pertürbasyon yönteminden faydalanılmıştır. Bu yaklaşım yönteminin sonuçları, kesin çözüm tekniğinin sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Nano kirişin titreşimi üzerindeki çatlak şiddeti, çatlak ve kademe konumu, kademe yüksekliği oranı ve eksenel yükün etkileri incelenmiştir. Sonuçlar, nano kirişte dönme atalet etkisinin çok önemli olduğu ve frekans modunun artmasıyla etkisinin arttığı sonucunu göstermektedir [35].

Nanokiriş üzerinde bulunan kademe veya çatlaklar sebebiyle oluşan süreksizlik çalışmalarda klasik sürekli ortamlar teorisinin uygulanmasına engel olduğu ve bu noktada Eringen’in [36] yerel olmayan elastisite teorisini öne sürmüştür. Nano ölçekli sistemlerde, küçük ölçek etkisi sistemin incelenmesi sürecinde gerçeklik açısından önemli bir çözüm yolu sunmaktadır [37]. Bu nedenle nano yapıların ele alındığı çalışmalarda, boyut etkisinin de hesaba katıldığı Eringen’in yerel olmayan sürekli

ortam mekaniği uygulanmasına geçilmiştir. Eringen'in teorisinden nano kirişler [38,39], nano plakalar [40], malzemelerin kafes yapıları [41], karbon nano tüpler [42] ve nano siviçler(anahtarlar) [43] gibi birçok nano ölçekli yapının analizinde faydalanılmıştır.

Yukarıdaki çalışmaların incelenmesi neticesinde, bu çalışmada, hem gerçek mühendislik uygulamaları için doğru analizler sunabilmek hem de yapılan literatür çalışmaları sonucunda üzerinde ulusal anlamda çalışma olmayan, uluslararası alanda ise çok az ve sadece son birkaç yıldır çalışmalara rastlanması sebebiyle var olan bilimsel çalışmanın eksikliğini gidermek adına şekil 2.2.1'de gösterimi verilmiş nano kademeli kirişlerin üzerinde durulmuştur.

Çalışmanın ilk altı aylık periyodu kapsamında konu ile ilgili kapsamlı bir literatür incelemesi yapılmış ve akabinde kademeli nano kirişlere ait titreşimlerin Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisine göre incelemesi yapılmıştır. Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi, nano ölçekli etkiyi yakalamak için kullanılmıştır. Nano boyutta kademeli Euler Bernoulli kirişi ele alınmıştır. Kademeli nano kirişin hareketini temsil eden hareket denklemleri Hamilton prensibi ile bulunmuştur. Denklemler malzemenin fiziksel yapısından ve boyutlarından bağımsız hale getirmek için boyutsuzlaştırma işlemi uygulanmıştır.

Çalışmanın ikinci altı aylık periyodunda, boyutsuz integro diferansiyel durum denklemlerini çözmek için perturbasyon tekniklerinden olan çok zaman ölçekli metot tercih edilmiştir. Perturbasyon açılımından gelen ilk mertebedeki terimler lineer problemi oluşturmaktadır. Lineer problem çözülmesiyle tabii frekans denklemleri elde edilmiştir. Perturbasyon açılımın ikinci mertebesinde ise karşımıza nonlineer terimler gelmiş ve bu terimler lineer çözümlerin düzeltmeleri olarak ortaya çıkmıştır.

Çalışmanın son altı aylık periyodunda ise kademe yeri, kademe oranı ve yerel olmayan etki göz önüne alınarak titreşim ve kararlılık analizleri yapılmıştır. Kademeli nano kirişe ait lineer ve nonlineer titreşim davranışlarının yerel olmayan esneklik teorisi içinde tanımlanabilmesi beklenmiş ve kademe konumunun kirişin titreşimlerine ve doğal frekansları üzerinde etkileri incelenmiştir. Analiz sonucu elde edilen veriler tablo ve grafiksel olarak gösterilmiş ve yorumlanmıştır.

2. HAREKET DENKLEMLERİ

2.1.Eringen'in Yerel Olmayan Elastisite Teorisi

Araştırmacılar, nano elementleri analiz etmek için yeterli teorinin zorluğuyla karşı karşıya kaldılar. Klasik süreklilik teorisi, küçük boyutlarından dolayı nano elementler için etkili değildir. Nano ölçekte, yüzey hacim oranı çok yüksektir ve atomik çekim elementlerin gücünü değiştirir [35]. Bundan sonra Eringen, yerel olmayan esneklik teorisini önerdi. Bu teori, nano yapının çeşitli problemlerini çözmek için yaygın olarak kullanılmaktadır [36].

Yerel olmayan elastisite teorisine göre, cisim gövdesindeki bir referans noktasındaki gerilim, yalnızca o noktadaki gerilimlere değil, aynı zamanda gövdenin diğer tüm noktalarındaki gerilimlere de bağlıdır. Bu gözlem, örgü dinamiğinin atomik teorisine ve fonon dispersiyonu üzerine deneysel gözlemlere uygundur. Limitte, referans noktası dışındaki noktalardaki şekil değiştirmelerin etkileri ihmal edildiğinde, klasik (yerel) elastisite teorisi elde edilir [44].

Nano-kirişin malzemesinin, yerel olmayan bir elastisite teorisine uyan doğrusal olmayan bir elastik malzeme olduğu varsayılmaktadır. Eringen [36] kavramlarına göre, yerel olmayan elastisiteye uyan malzemeler için kurucu denklemler şu şekilde ifade edilebilir,

$$\sigma_{ij}^{n}(x)=\iiint_{(V)} a(|x'-x|,\tau)\sigma_{ij}^{c}(x')dV \tag{2.1}$$

Denklem (2.1)'de σ_{ij}^{n}, yerel olmayan elastisitede gerilim tensörünü ifade eder, σ_{ij}^{c} klasik (hooke) gerilim tensörü ve V hacmi ifade etmektedir. Burada a, $x'\in V$'deki gerilim durumunun etkisini $x\in V$'deki gerilim-şekil değiştirme durumunu ifade ettiği kabul edilen çekirdek (kernel function) fonksiyonudur ve τ fiziksel sabittir [44].

Çekirdek fonksiyonunun farklı formları denklem (2.1) 'deki $a(x)$ yerel olmayan elastisitenin farklı yaklaşık modellerini tanımlar. $a(x)$ 'nin Green'in doğrusal diferansiyel operatör L fonksiyonu olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$L\left(\left[x'-x\right]\right)=\delta\left(\left[x'-x\right]\right) \tag{2.2}$$

Burada δ Dirac'ın δ –fonksiyonudur. Eringen [44], Lu ve arkadaşları [45] fonksiyonun (2.2) ile gösterildiği gibi diferansiyel operatörün L alınarak elde edildiği iki boyutlu basit bir çekirdek fonksiyon olduğuna dikkat çekmişlerdir [33].

$$L(a)=(1-\left(e_0a\right)^2\nabla^2)a(x) \tag{2.3}$$

Burada ∇ Laplace operatörüdür. Denklem (2.3)'te e_0 fiziksel bir sabittir. a Nanomalzemelerin kafes yapısında tekrar eden iki atom arası uzaklık parametresidir (latis boyutudur). Eringen e_0a ifadesini küçük ölçek parametresi olarak adlandırmış ve değerini $e_0a<2$ nanometre ölçülerinde alınmasını önermiştir [36].

Denklem (2.1)-(2.3) 'e göre, yerel olmayan elastisitenin kurucu denklemi şu şekilde ifade edilebilir,

$$\left(1-e_0a\nabla^2\right)\sigma_{ij}^n=\sigma_{ij}^c \tag{2.4}$$

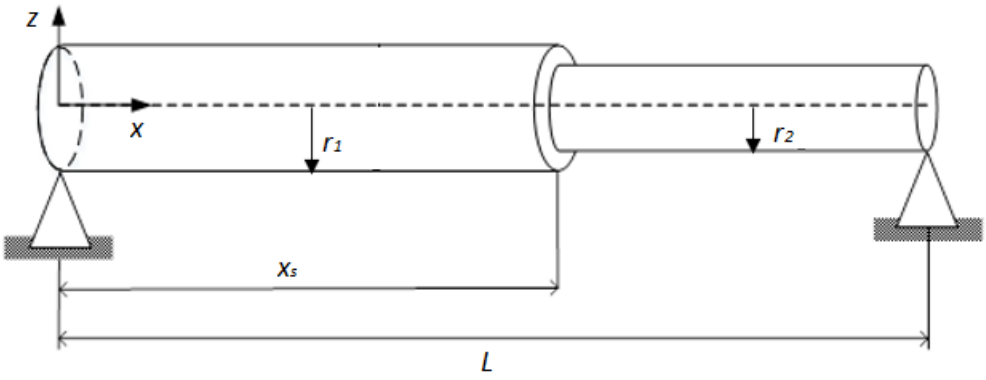
Denklem (2.4) teki stres ifadesi genel anlamda aşağıdaki forma sahiptir,

$$M-e_0a\frac{\partial^2M}{\partial x^2}=M_c \tag{2.5}$$

Burada M yerel olmayan elastisitede eğilme momenti ve M_c ise klasik eğilme momentidir.

2.2.Matematiksel Model

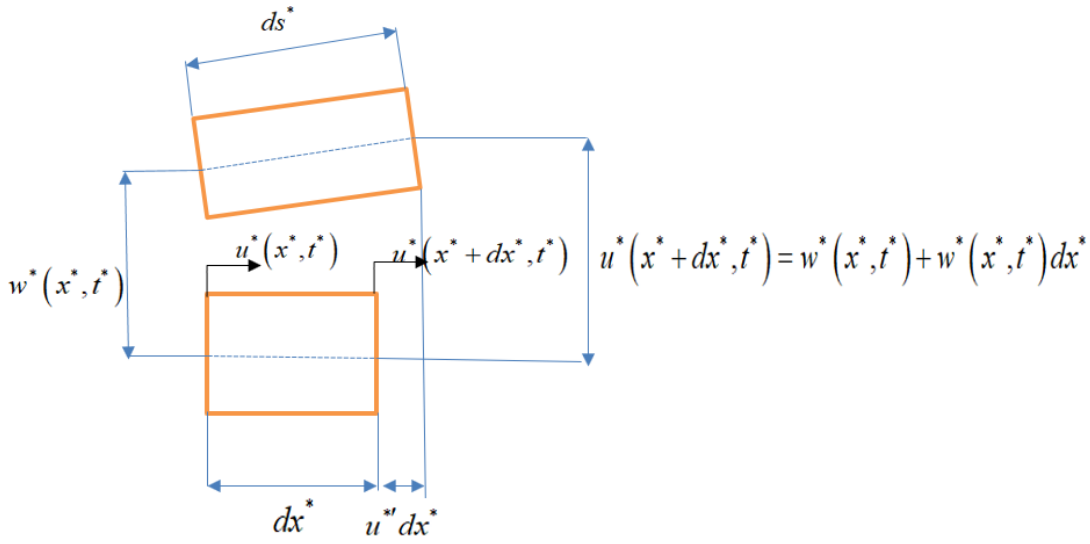
Bu bölümde kademeli nano kirişin titreşimi esnasında uzamasından doğan davranışlarını temsil eden yerel olmayan hareket denklemleri ve sınır şartları formüle edilmiştir. Şekil 2.2.1'de kademeli nano kirişin şematik olarak çizimi görülmektedir.



Şekil 2.2.1 Kademeli Nano Kirişin Şematik Gösterimi

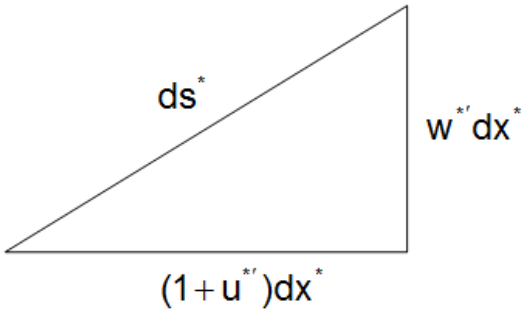
Şekil 2.2.1 de şematize edilen eksenel hareketli Euler-Bernoulli nano kirişin boyu L ile ifade edilmektedir ve kirişin basit-basit mesnetli olduğu kabul edilmiştir. Kademenin yeri ise x_s ile gösterilmiştir. Kademe öncesi ve sonrasına ait atalet yarıçapları ise sırasıyla r_1 ve r_2 olarak verilmiştir.

Kademeli nano kirişten dx^* uzunluğunda bir diferansiyel parçacığı alınmıştır. Kirişin titreşimi anında uzama etkisinden ötürü ds^* elemanı elde edilir. Gözlemlenen bu parçacık şekil 2.2.2'de şematize edilmiştir.



Şekil 2.2.2 Kademeli Nano Kiriş İçin Uzama Etkisinden Kaynaklanan Deplasmanlar

Kirişin enine deplasmanı $w^*(x^*,t^*)$, boyuna deplasmanı ise $u^*(x^*,t^*)$ olarak tanımlanmıştır. Denklemlerde $()^*$ ile ifade edilen üst indise sahip terimler boyutlu olarak kabul edilmektedir. t^* Boyutlu zaman, x^* ise boyutlu konum değişkenini temsil etmektedir. Şekil 2.2.2'de gözlemlenen hipotenüs şekil 2.2.3'te gösterilmiştir,



Şekil 2.2.3 Diferansiyel Elemanın Uzamasına Karşılık Gelen Dik Üçgen

Pisagor bağıntısından faydalanılarak ds^* uzunluğu elde edilebilir,

$$ds^{*2}=(1+u^{*\prime})^2dx^{*2}+w^{*\prime 2}dx^{*2} \tag{2.6}$$

$$ds^* = dx^* \sqrt{(1+u^{*\prime})^2 + w^{*\prime 2}} \tag{2.7}$$

Diferansiyel elemana ait birim şekilde değiştirme ise şu şekilde elde edilir,

$$e = \frac{ds^* - dx^*}{dx^*} \tag{2.8}$$

Denklem (2.7) düzenlenirse,

$$e+1 = \sqrt{(1+u^{*\prime})^2 + w^{*\prime 2}} \tag{2.9}$$

Elde edilen köklü ifadeyi Taylor serisinden faydalanarak açarsak,

$$e+1 = 1+u^{*\prime} + \frac{u^{*\prime 2}}{2} + \frac{w^{*\prime 2}}{2} + \ldots \tag{2.10}$$

Bulunur. Hooke yasasına göre gerilim ifadesi,

$$\sigma = E\varepsilon \text{ ve } \sigma = \frac{M_c}{I} \tag{2.11}$$

Şeklindedir. Bu durumda eğilme momenti aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M_c = -EI \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \tag{2.12}$$

Kirişin nano ölçekli olması sebebiyle klasik sürekli ortam teorisinin uygun olmadığı ve yerel olmayan elastisite teorisinin dikkate alınacağı bir önceki bölümde ifade edilmişti. Eringen tarafından ifade edilen denklem (2.5)'te gösterilen yerel olmayan gerilme ifadesi denklem (2.12)'ye entegre edilirse yerel olmayan elastisite eğilme momenti aşağıdaki gibi,

$$M = (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \tag{2.13}$$

Elde edilir. Burada E Young modülü ve I kirişin enine kesitinin eylemsizlik momentini temsil eder. Öte yandan, denge denklemlerinden şu sonuca varılır [46],

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \tag{2.14}$$

Denklem (2.9)'da ρA, nano kirişin birim uzunluğu başına düşen kütle anlamına gelir ve ρ malzemenin yoğunluğunu göstermektedir.

Kademeli nano kirişin hareket denklemlerinin elde edilmesi için Hamilton prensibinden faydalanılmıştır. Önce sistemin Lagrangianı bulunmuştur.

$$£ = T - V \tag{2.15}$$

Hamilton prensibini uygulamak için sistemin kinetik T ve potansiyel V enerjileri yazılmalıdır. Sırasıyla,

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{x_s} \rho A_1 \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial t^*}\right)^2 dx^* + \frac{1}{2}\int_{x_s}^{L} \rho A_2 \left(\frac{\partial w_2^*}{\partial t^*}\right)^2 dx^* \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} V = {} & \frac{1}{2}\int_0^{x_s} \left(EI_1 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} + (e_0 a)^2 N \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} - (e_0 a)^2 \rho A_1 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial t^{*2}} \right) \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} dx \\ & - \frac{1}{2}\int_0^{x_s} N \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*}\right)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_s}^{L} \left(\begin{array}{l} EI_2 \dfrac{\partial^2 w_2^*}{\partial x^{*2}} + (e_0 a)^2 N \dfrac{\partial^2 w_2^*}{\partial x^{*2}} \\ -(e_0 a)^2 \rho A_2 \dfrac{\partial^2 w_2^*}{\partial t^{*2}} \end{array} \right) \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial x^{*2}} dx \\ & - \frac{1}{2}\int_{x_s}^{L} N \left(\frac{\partial w_2^*}{\partial x^*}\right)^2 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Burada ρ kademeli nano kirişin yoğunluğunu, A_1 ve A_2 ise kademeli nano kirişe ait kesit alanlarını temsil etmektedir. E Kademeli nano kirişin elastisite modülü, I

atalet momentidir. L Kademeli nano kirişin uzunluk ölçeği parametresi ve N ise eksenel kuvvet şeklinde tanımlanmıştır.

Denklem (2.16)' da kiriş deformasyonu sonucu doğan kinetik enerjisi ifadesi bulunmaktadır. Denklem (2.17)' de birinci terim kirişin eğilmeden kaynaklanan potansiyel enerji terimidir. İkinci terim, nötr eksenin gerilmesi nedeniyle oluşan uzama elastik potansiyel enerjisidir. Üçüncü terim ise eksenel gerilmeden kaynaklanan potansiyel enerjidir.

Hamilton prensibine göre bir sisteme ait kinetik ve potansiyel enerjileri arasındaki farkın zaman integralinin varyasyonu sıfır olmalıdır. Burada kinetik ve potansiyel enerjilerin farkı "Lagrangian (£)" olarak tanımlanmıştır.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} £\, dt = 0 \tag{2.18}$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt^* = 0 \tag{2.19}$$

Denklem (2.16) ve (2.17), denklem (2.19)'da ilgili yerlere koyulup varyasyon işlemi integral işlemi içine dahil edilirse,

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} £ \; \mathrm{dt}^* = {} & \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{0}^{x_s} \frac{1}{2} \rho A_1 \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial t^*} \right)^2 \mathrm{dx}^* \mathrm{dt}^* + \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{0}^{x_s} \frac{1}{2} \rho A_2 \left(\frac{\partial w_2^*}{\partial t^*} \right)^2 \mathrm{dx}^* \mathrm{dt}^* \\
& - \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{0}^{x_s} \frac{1}{2} \left(EI_1 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} + (e_0 a)^2 N \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} - (e_0 a)^2 \rho A_1 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial t^{*2}} \right) \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} \mathrm{dx}^* \mathrm{dt}^* \\
& - \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{0}^{x_s} \frac{1}{2} N \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \right)^2 \mathrm{dx}^* \mathrm{dt}^* - \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_s}^{L} \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} EI_2 \dfrac{\partial^2 w_2^*}{\partial x^{*2}} + (e_0 a)^2 N \dfrac{\partial^2 w_2^*}{\partial x^{*2}} \\ -(e_0 a)^2 \rho A_2 \dfrac{\partial^2 w_2^*}{\partial t^{*2}} \end{array} \right) \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial x^{*2}} \mathrm{dx}^* \mathrm{dt}^* \\
& - \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_s}^{L} \frac{1}{2} N \left(\frac{\partial w_2^*}{\partial x^*} \right)^2 \mathrm{dx}^* \mathrm{dt}^* = 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Elde edilir. Denklem (2.20)'deki integralleri hesaplamak için kısmi integrasyondan faydalanılır. Kısmi integral aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$\int_0^L udv = uv\Big|_0^L - \int_0^L vdu \tag{2.21}$$

Kısmi integraller hesaplanıp denklem (2.20)'de yerlerine yazılıp düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}
\delta\int_{t_1}^{t_2} L\ \mathrm{dt}^* = &\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{x_s} \left[\begin{array}{l} -\rho A_1 \dfrac{\partial^2 w_1^*}{\partial t^{*2}} - EI_1 \dfrac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^{*4}} - (e_0 a)^2 N^* \dfrac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^{*4}} \\ +(e_0 a)^2 \rho A_1 \dfrac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^{*2}\partial t^{*2}} + N^* \dfrac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} \end{array}\right] \delta w_1^* \mathrm{dx}^* \mathrm{dt}^* \\
&+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_s}^{L} \left[\begin{array}{l} -\rho A_2 \dfrac{\partial^2 w_2^*}{\partial t^{*2}} - EI_2 \dfrac{\partial^4 w_2^*}{\partial x^{*4}} - (e_0 a)^2 N^* \dfrac{\partial^4 w_2^*}{\partial x^{*4}} \\ +(e_0 a)^2 \rho A_2 \dfrac{\partial^4 w_2^*}{\partial x^{*2}\partial t^{*2}} + N^* \dfrac{\partial^2 w_2^*}{\partial x^{*2}} \end{array}\right] \delta w_2^* \mathrm{dx}^* \mathrm{dt}^* \\
&+\int_{t_1}^{t_2} \left[\begin{array}{l} \left(-EI_1 \dfrac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} \dfrac{\partial\left(\delta w_1^*\right)}{\partial x^*}\Big|_0^{x_s} + EI_1 \dfrac{\partial^3 w_1^*}{\partial x^{*3}} \delta w_1^*\Big|_0^{x_s} \right) \\ +\left(-(e_0 a)^2 N \dfrac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} \dfrac{\partial\left(\delta w_1^*\right)}{\partial x^*} + (e_0 a)^2 N \dfrac{\partial^3 w_1^*}{\partial x^{*3}} \delta w_1^* \right)\Big|_0^{x_s} \\ +(e_0 a)^2 \rho A_1 \dfrac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^* \partial t^*} \dfrac{\partial\left(\delta w_1^*\right)}{\partial t^*}\Big|_0^{x_s} - N^* \dfrac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \delta w_1^*\Big|_0^{x_s} \\ +\left(-EI_2 \dfrac{\partial^2 w_2^*}{\partial x^{*2}} \dfrac{\partial\left(\delta w_2^*\right)}{\partial x^*}\Big|_{x_s}^{L} + EI_2 \dfrac{\partial^3 w_2^*}{\partial x^{*3}} \delta w_2^*\Big|_{x_s}^{L} \right) \\ +\left(-(e_0 a)^2 N \dfrac{\partial^2 w_2^*}{\partial x^{*2}} \dfrac{\partial\left(\delta w_2^*\right)}{\partial x^*} + (e_0 a)^2 N \dfrac{\partial^3 w_2^*}{\partial x^{*3}} \delta w_2^* \right)\Big|_{x_s}^{L} \\ +(e_0 a)^2 \rho A_2 \dfrac{\partial^2 w_2^*}{\partial x^* \partial t^*} \dfrac{\partial\left(\delta w_2^*\right)}{\partial t^*}\Big|_{x_s}^{L} - N^* \dfrac{\partial w_2^*}{\partial x^*} \delta w_2^*\Big|_{x_s}^{L} \end{array}\right] \mathrm{dt}^*
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Elde edilir. Denklem (2.22)'nin sıfır olabilmesi için çift katlı integrallerde $\delta w_1^*\, dx^*\, dt^*$ ve $\delta w_2^*\, dx^*\, dt^*$ ile çarpım halindeki ifadelerin sıfır olması gerekir. Tek katlı integraller

de ayrı ayrı sıfıra eşit olmalıdır. Çift katlı integraller kademeli nano kirişin titreşimini ifade eden hareket denklemini, tek katlı integraller ise olası sınır şartlarını verir [47].

Çift katlı integrallerden durum denklemleri,

$$-\rho \mathrm{A}_1 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial t^{*2}} - EI_1 \frac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^{*4}} - (e_0 a)^2 N^* \frac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^{*4}} + (e_0 a)^2 \rho A_1 \frac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^{*2} \partial t^{*2}} + N^* \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} = 0 \quad (2.23)$$

$$-\rho \mathrm{A}_2 \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial t^{*2}} - EI_2 \frac{\partial^4 w_2^*}{\partial x^{*4}} - (e_0 a)^2 N^* \frac{\partial^4 w_2^*}{\partial x^{*4}} + (e_0 a)^2 \rho A_2 \frac{\partial^4 w_2^*}{\partial x^{*2} \partial t^{*2}} + N^* \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial x^{*2}} = 0 \quad (2.24)$$

Şeklinde elde edilir. Denklem (2.23) Kademe öncesi nano kirişin titreşim hareketlerini temsil eden denklem iken, denklem (2.24) ise kademe sonrası nano kirişin hareket denklemlerini temsil eden hareket denklemidir.

Potansiyel enerji ifadesinden bulunan malzemenin uzama etkisini temsil eden N^* aşağıdaki gibi bulunur,

$$u_1\big|_0^{x_s} + u_2\big|_{x_s}^{L} + \frac{1}{2}\int_0^{x_s}\left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*}\right)^2 dx^* + \frac{1}{2}\int_{x_s}^{L}\left(\frac{\partial w_2^*}{\partial x^*}\right)^2 dx^* = \frac{1}{EA_1} Nx\big|_0^{x_s} + \frac{1}{EA_2} N^* x\big|_{x_s}^{L} \quad (2.25)$$

İntegraller alınırsa,

$$\begin{aligned} &u_1(x_s) - u_1(0) + u_2(L) - u_2(x_s) + \frac{1}{2}\int_0^{x_s}\left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*}\right)^2 dx^* + \frac{1}{2}\int_{x_s}^{L}\left(\frac{\partial w_2^*}{\partial x^*}\right)^2 dx^* \\ &= \frac{1}{EA_1} Nx\big|_0^{x_s} + \frac{1}{EA_2} Nx\big|_{x_s}^{L} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Uçlarda uzama olmadığı için,

$$\cancel{u_1(x_s)} - \cancel{u_1(0)} + \cancel{u_2(L)} - \cancel{u_2(x_s)} + \frac{1}{2}\int_0^{x_s}\left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*}\right)^2 dx^* + \frac{1}{2}\int_{x_s}^{L}\left(\frac{\partial w_2^*}{\partial x^*}\right)^2 dx^* \quad (2.27)$$
$$= \frac{1}{EA_1}N(x_s - 0) + \frac{1}{EA_2}N(L - x_s)$$

Denklem (2.27) düzenlenir ve N çekilirse,

$$N^* = \frac{EA_1}{2\left(x_s + \frac{1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}(L - x_s)\right)}\left[\int_0^{x_s}\left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*}\right)^2 dx^* + \int_{x_s}^{L}\left(\frac{\partial w_2^*}{\partial x^*}\right)^2 dx^*\right] \quad (2.28)$$

Boyutlu uzama etkisi terimi elde edilir. Denklem (2.28), denklem (2.23) ve (2.24)'te yerlerine yazılırsa,

$$EI_1\frac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^{*4}} + \rho A_1\left(\frac{\partial^2 w_1^*}{\partial t^{*2}} - (e_0 a)^2\frac{\partial^4 w_1^*}{\partial t^{*2}\partial x^{*2}}\right)$$
$$= \frac{EA_1}{2\left[x_s + \left(L - x_s\right)\Big/\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]}\left[\int_0^{x_s}\left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*}\right)^2 dx^* + \int_{x_s}^{L}\left(\frac{\partial w_2^*}{\partial x^*}\right)^2 dx^*\right]\left(\frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} - (e_0 a)^2\frac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^{*4}}\right) \quad (2.29)$$

$$EI_2\frac{\partial^4 w_2^*}{\partial x^{*4}} + \rho A_2\left(\frac{\partial^2 w_2^*}{\partial t^{*2}} - (e_0 a)^2\frac{\partial^4 w_2^*}{\partial t^{*2}\partial x^{*2}}\right)$$
$$= \frac{EA_1}{2\left[x_s + \left(L - x_s\right)\Big/\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right]}\left[\int_0^{x_s}\left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*}\right)^2 dx^* + \int_{x_s}^{L}\left(\frac{\partial w_2^*}{\partial x^*}\right)^2 dx^*\right]\left(\frac{\partial^2 w_2^*}{\partial x^{*2}} - (e_0 a)^2\frac{\partial^4 w_2^*}{\partial x^{*4}}\right) \quad (2.30)$$

Sistemin boyutlu hareket denklemleri elde edilir.

Denklem (2.22)'de bulunan tek katlı integrallerden boyutlu ideal sınır şartları basit basit mesnetli sistem için aşağıdaki gibi elde edilir.

Uç kısımlar :

$$\frac{\partial^2 w_1^*(0)}{\partial x^{*2}} = 0, \qquad \delta w_1^*(0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w_2^*(L)}{\partial x^{*2}} = 0, \qquad \delta w_2^*(L) = 0 \tag{2.31}$$

Orta kısım :

$$\delta w_1^*(x_s) = \delta w_2^*(x_s), \qquad \frac{\partial\left(\delta w_1^*(x_s)\right)}{\partial x^*} = \frac{\partial\left(\delta w_2^*(x_s)\right)}{\partial x^*},$$

$$-EI_1 \frac{\partial^2 w_1^*(x_s)}{\partial x^{*2}} + EI_2 \frac{\partial^2 w_2^*(x_s)}{\partial x^{*2}} = 0, \qquad EI_1 \frac{\partial^3 w_1^*(x_s)}{\partial x^{*3}} - EI_2 \frac{\partial^3 w_2^*(x_s)}{\partial x^{*3}} = 0$$

2.3.Boyutsuzlaştırma

Bir önceki bölümde elde ettiğimiz hareket denklemleri ve sınır şartlarını malzemenin cinsinden ve boyutlarından bağımsız hale getirmek için boyutsuzlaştırmamız gerekir. Boyutsuz ifadeler aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x=\frac{x^*}{L}, w_{1,2}=\frac{{w_{1,2}}^*}{R_{1,2}}, t=\beta t^*,\ \gamma=\frac{e_0 a}{L}, \alpha=\frac{r_2}{r_1},\ \eta=\frac{x_s}{L}, \beta=\frac{1}{L^2}\sqrt{\frac{EI_1}{\rho A_1}} \tag{2.32}$$

$$I_{1,2}=\pi\frac{r_{1,2}^4}{4},\ A_{1,2}=\pi r_{1,2}^2 \qquad \frac{A_2}{A_1}=\frac{\pi r_2^{\,2}}{\pi r_1^{\,2}}=\frac{r_2^{\,2}}{r_1^{\,2}}=\alpha^2 \tag{2.33}$$

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{\pi\frac{r_2^4}{4}}{\pi\frac{r_1^4}{4}}=\frac{r_2^{\,4}}{r_1^{\,4}}=\alpha^4 \tag{2.34}$$

Denklem (2.32)'de bulunan α kademelerin yarı çapları oranını gösteren boyutsuz parametredir. γ Boyutsuz yerel olmayan küçük ölçek parametresidir. η Kademenin başlangıç noktasında olan uzaklığını gösteren boyutsuz parametredir. Denklem (2.34)'te bulunan R ise dairesel kesitli kademeli kirişin atalet yarıçapıdır.

Hareket denklemindeki türev ifadeleri,

$$\begin{aligned}
&dx^* = d(xL) = Ldx\\
&\frac{\partial {w_{1,2}}^*}{\partial x^*}=\frac{\partial\left(w_{1,2}R_{1,2}\right)}{\partial\left(xL\right)}=\frac{R_{1,2}}{L}\frac{\partial w_{1,2}}{\partial x}\\
&\frac{\partial^2 {w_{1,2}}^*}{\partial {x^*}^2}=\frac{\partial}{\partial x^*}\left(\frac{R_{1,2}}{L}\frac{\partial w_{1,2}}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial\left(xL\right)}\left(\frac{R_{1,2}}{L}\frac{\partial w_{1,2}}{\partial x}\right)=\frac{R_{1,2}}{L^2}\frac{\partial^2 w_{1,2}}{\partial x^2}\\
&\frac{\partial^3 {w_{1,2}}^*}{\partial {x^*}^3}=\frac{\partial^3\left(w_{1,2}R_{1,2}\right)}{\partial\left(xL\right)^3}=\frac{R_{1,2}}{L^3}\frac{\partial^3 w_{1,2}}{\partial x^3}\\
&\frac{\partial^4 {w_{1,2}}^*}{\partial {x^*}^4}=\frac{\partial^4\left(w_{1,2}R_{1,2}\right)}{\partial\left(xL\right)^4}=\frac{R_{1,2}}{L^4}\frac{\partial^4 w_{1,2}}{\partial x^4}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Denklem (2.29) ve (2.30)'daki türev ifadeleri, denklem (2.35)'teki boyutsuz türev ifadelerine uyarlanırsa,

$$\frac{\partial {w_{1,2}}^*}{\partial t^*} = \frac{\partial {w_{1,2}}^*}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t^*} = \frac{\partial\left(w_{1,2}R_{1,2}\right)}{\partial t}\beta = \frac{\partial\left(w_{1,2}R_{1,2}\right)}{\partial\left(t/\beta\right)} = \beta R_{1,2}\frac{\partial w_{1,2}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 {w_{1,2}}^*}{\partial x^* \partial t^*} = \frac{\partial}{\partial(xL)}\left(\beta R_{1,2}\frac{\partial w_{1,2}}{\partial t}\right) = \frac{\beta R_{1,2}}{L}\frac{\partial^2 w_{1,2}}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial^4 {w_{1,2}}^*}{\partial x^{*3} \partial t^*} = \frac{\partial}{\partial\left(t/\beta\right)}\left(\frac{\partial^3\left(wR_{1,2}\right)}{\partial(xL)^3}\right) = \frac{\beta R_{1,2}}{L^3}\frac{\partial^4 w_{1,2}}{\partial x^3 \partial t} \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial^2 {w_{1,2}}^*}{\partial t^{*2}} = \frac{\partial}{\partial t^*}\left(\beta R_{1,2}\frac{\partial w_{1,2}}{\partial t}\right) = \beta^2 R_{1,2}\frac{\partial^2 w_{1,2}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^4 {w_{1,2}}^*}{\partial x^{*2} \partial t^{*2}} = \frac{\partial^2}{\partial(xL)^2}\left(\beta^2 R_{1,2}\frac{\partial^2 w_{1,2}}{\partial t^2}\right) = \frac{\beta^2 R_{1,2}}{L^2}\frac{\partial^4 w_{1,2}}{\partial x^2 \partial t^2}$$

Şeklindedir. Denklem (2.36)'daki türev ifadeleri ve denklem (2.32), (2.33) ve (2.34)'teki boyutsuz parametreler denklem (2.29)'da yerlerine yazılırsa,

$$EI_1\frac{R_1}{L^4}\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \rho A_1\left(\beta^2 R_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - (e_0 a)^2\frac{\beta^2 R_1}{L^2}\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial t^2}\right)$$
$$= \frac{EA_1}{2\left(x_s + \frac{1}{\alpha^2}(L - x_s)\right)}\left[\int_0^{x_s}\left(\frac{R_1}{L}\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 Ldx + \int_{x_s}^{L}\left(\frac{R_2}{L}\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 Ldx\right]\left(\frac{R_1}{L^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - (e_0 a)^2\frac{R_1}{L^4}\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4}\right) \tag{2.37}$$

Elde Edilir. Denklem (2.37)'de denklem (2.32)'deki boyutsuz parametreler yerleştirilir ve düzenlenirse,

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \gamma^2\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial t^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2\left(\eta + \frac{1}{\alpha^2}(1-\eta)\right)}\left[\int_0^{\eta}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 dx + \int_{\eta}^{1}\alpha^2\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 dx\right]\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \gamma^2\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4}\right) \tag{2.38}$$

Kademe öncesi nano kirişin titreşim hareketlerini ifade eden boyutsuz hareket denklemi elde edilir. Aynı işlemler denklem (30)'a da uygulanırsa kademe sonrası nano kirişin titreşim hareketlerini ifade eden boyutsuz hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4}+\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}-\gamma^2\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2\partial t^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2\left(\eta+\frac{1}{\alpha^2}(1-\eta)\right)}\frac{1}{\alpha^4}\left[\int_0^{\eta}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 dx+\int_{\eta}^{1}\alpha^2\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 dx\right]\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}-\gamma^2\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4}\right) \quad (2.39)$$

Sistemin boyutsuz süreklilik şartları ise,

Uç kısımlar :

$$\frac{\partial^2 w_1(0)}{\partial x^2}=0,\quad w_1(0)=0,\qquad \frac{\partial^2 w_2(1)}{\partial x^2}=0,\quad w_2(1)=0 \quad (2.40)$$

Orta kısım :

$$w_1(\eta)=\alpha w_2(\eta),\qquad \frac{\partial w_1(\eta)}{\partial x}=\alpha\frac{\partial w_2(\eta)}{\partial x}, \quad (2.41)$$
$$\frac{\partial^2 w_1(\eta)}{\partial x^2}=\alpha^5\frac{\partial^2 w_2(\eta)}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial^3 w_1(\eta)}{\partial x^3}=\alpha^5\frac{\partial^3 w_2(\eta)}{\partial x^3}$$

Şeklinde elde edilir.

3. ANALİTİK ÇÖZÜM

3.1.Perturbasyon Analizi

Perturbasyon teorisi problem denkleminin kesin çözümü bulunamaması durumlarında, problemin yaklaşık çözümünün elde edildiği analitik bir çözüm yöntemidir. Pertürbasyon metodu problem denklemini daha basit denklemlere ayırarak çözüm sunar. Bu bölüştürme işlemi değişken terimin tam ve yakınsama parametrelerini içeren bir açılım ile sağlanır. Bu açılımda 1. terim tam çözümü, 2. ve sırasıyla üst mertebeden terimler ise yakınsama terimlerini verir.

Pertürbasyon metodu ile diferansiyel denklemleri çözmek için, denklemin bünyesinde pertürbasyon parametresi denilen çok küçük bir terimi barındırması gerekir. Problemin diferansiyel denkleminde bu ifadenin olmaması halinde denklem üzerinde bazı dönüşümler yapılarak denklem pertürbasyon yöntemine uygun duruma getirilir.

Kademeli nanokiriş için elde edilen hareket denklemlerinin yaklaşık çözümü için perturbasyon metodundan faydalanılacaktır. İntegro diferansiyel durum denklemleri sönüm ifadesi içerdiği için sistemin genliğinde zamanla değişim meydana gelecektir. Sabit olmayan genliklerin perturbasyon çözümü için en uygun metot olan çok zaman ölçekli metot kullanılacaktır.

Durum denklemlerine sönüm ve zorlama terimleri eklenirse aşağıdaki denklemler bulunur,

$$w_1^{iv} + \ddot{w}_1 - \gamma^2 \ddot{w}_1'' = \frac{1}{2\left(\eta + \dfrac{(1-\eta)}{\alpha^2}\right)}\left[\int_0^{\eta} w_1'^2 dx + \alpha^2 \int_{\eta}^{1} w_2'^2 dx\right]\left[w_1'' - \gamma^2 w_1^{iv}\right] + \bar{F}_1 \cos\Omega t - 2\bar{\mu}\dot{w}_1 \tag{3.1}$$

$$w_2^{iv}+\frac{1}{\alpha^2}\left(\ddot{w}_2-\gamma^2\ddot{w}_2''\right)$$
$$=\frac{1}{2\alpha^4\left(\eta+\frac{(1-\eta)}{\alpha^2}\right)}\left[\int_0^{\eta}w_1'^2dx+\alpha^2\int_{\eta}^{1}w_2'^2dx\right]\left[w_2''-\gamma^2w_2^{iv}\right]+\bar{F}_2\cos\Omega t-2\bar{\mu}\dot{w}_2 \tag{3.2}$$

Bu denklemlerde μ sönüm katsayısı, F zorlama genliği, Ω ise zorlama frekansıdır. Nonlineer etkilerin (uzama etkisinden kaynaklanan integral ifadesi) ε mertebesine alınabilmesi için bir dönüşüm uygulanmalıdır [48]. Bu dönüşüm şu şekilde olacaktır:

$$w=\sqrt{\varepsilon}\,y \tag{3.3}$$

Nonlineer etkilerle, zorlama etkisinin aynı mertebe çıkabilmesi için zorlama genliği ve sönümü aşağıdaki gibi yeniden mertebelendirilebilir.

$$\bar{F}=\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\,F \tag{3.4}$$

$$\bar{\mu}=\varepsilon\,\mu \tag{3.5}$$

Denklem (3.3 - 3.5), denklem (3.1) de yerlerine yerleştirilir,

$$\sqrt{\varepsilon}y_1^{iv}+\sqrt{\varepsilon}\ddot{y}_1-\gamma^2\sqrt{\varepsilon}\ddot{y}_1''=\frac{1}{2\left(\eta+\frac{(1-\eta)}{\alpha^2}\right)}\left[\int_0^{\eta}\left(\sqrt{\varepsilon}y_1'\right)^2dx+\alpha^2\int_{\eta}^{1}\left(\sqrt{\varepsilon}y_2'\right)^2dx\right]\left[\sqrt{\varepsilon}y_1''-\gamma^2\sqrt{\varepsilon}y_1^{iv}\right]+$$
$$\varepsilon\sqrt{\varepsilon}F\cos\Omega t-2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\mu\dot{y}_1 \tag{3.6}$$

Kademe öncesi ve sonrası için gerekli işlemler yapılırsa dönüştürülmüş boyutsuz durum denklemleri şu şekilde bulunur,

$$y_1^{iv}+\ddot{y}_1-\gamma^2\ddot{y}_1''=\frac{1}{2\left(\eta+\dfrac{(1-\eta)}{\alpha^2}\right)}\varepsilon\left[\int_0^{\eta}y_1'^2dx+\alpha^2\int_{\eta}^{1}y_2'^2dx\right]\left[y_1''-\gamma^2y_1^{iv}\right] \tag{3.7}$$
$$+\varepsilon F_1\cos\Omega t-2\varepsilon\mu\dot{y}_1$$

$$y_2^{iv}+\frac{1}{\alpha^2}\left(\ddot{y}_2-\gamma^2\ddot{y}_2''\right)=\frac{1}{2\alpha^4\left(\eta+\dfrac{(1-\eta)}{\alpha^2}\right)}\varepsilon\left[\int_0^{\eta}y_1'^2dx+\alpha^2\int_{\eta}^{1}y_2'^2dx\right]\left[y_2''-\gamma^2y_2^{iv}\right] \tag{3.8}$$
$$+\varepsilon F_2\cos\Omega t-2\varepsilon\mu\dot{y}_2$$

Denklemin karmaşık görselini azaltmak için bu noktadan sonra

$$\Gamma_1=\frac{1}{2\left(\eta+\dfrac{(1-\eta)}{\alpha^2}\right)}\ \text{Ve}\ \Gamma_2=\frac{1}{2\alpha^4\left(\eta+\dfrac{(1-\eta)}{\alpha^2}\right)} \tag{3.9}$$

Kısaltma ifadeleri kullanılacaktır. Aynı dönüşümler sınır şartları için de uygulanır,

Basit-Basit Durum İçin:

Uç kısımlar :

1) $\dfrac{\partial^2 w_1(0)}{\partial x^2}=0,$
2) $w_1(0)=0,$
3) $\dfrac{\partial^2 w_2(1)}{\partial x^2}=0,$
4) $w_2(1)=0$

Orta kısım :

5) $w_1(\eta)=\alpha w_2(\eta),$
6) $\dfrac{\partial w_1(\eta)}{\partial x}=\alpha\dfrac{\partial w_2(\eta)}{\partial x},$
7) $\dfrac{\partial^2 w_1(\eta)}{\partial x^2}=\alpha^5\dfrac{\partial^2 w_2(\eta)}{\partial x^2},$
8) $\dfrac{\partial^3 w_1(\eta)}{\partial x^3}=\alpha^5\dfrac{\partial^3 w_2(\eta)}{\partial x^3}$

Yukarıda verilen şekilde elde edilir. Denklem (3.3) uygun yerlere yerleştirilirse:

Uç kısımlar :

$y_1(0)=0,\qquad y_2(1)=0$
$y_1''(0)=0,\qquad y_2''(1)=0$

Orta kısım :

$$y_1(\eta)=\alpha y_2(\eta)\qquad y_1'(\eta)=\alpha y_2'(\eta) \tag{3.10}$$
$$y_1''(\eta)=\alpha^5 y_2''(\eta)\qquad y_1'''(\eta)=\alpha^5 y_2'''(\eta)$$

Hareket denklemlerinin çözümü için aşağıdaki gibi bir açılımın geçerli olduğunu farz edelim,

$$y_1(x,t:\varepsilon) = \varepsilon^0 y_{10}(x,T_0,T_1) + \varepsilon y_{11}(x,T_0,T_1) \tag{3.11}$$

$$y_2(x,t:\varepsilon) = \varepsilon^0 y_{20}(x,T_0,T_1) + \varepsilon y_{21}(x,T_0,T_1) \tag{3.12}$$

ε Hesaplamalarda kullanılan küçük bir parametre olup, ε^0 Mertebesinde bulunan denklemler sistemin lineer hareket denklemini ve lineer frekans denklemini vermektedir. ε Mertebesindeki denklemler ise nonlineer kısımdan gelen etkileri göstermektedir.

Çok zaman ölçekli metotta zaman ölçekleri sırasıyla $T_0 = \varepsilon^0 t$ hızlı zaman ölçeği ve $T_1 = \varepsilon t$ yavaş zaman ölçeği olarak tanımlanmaktadır [49].

Denklem (3.7) ve (3.8) deki zamana göre türev ifadeleri yeni zaman ölçekleri cinsinden yazılır,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^0 \frac{\partial}{\partial T_0}\frac{\partial T_0}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}\frac{\partial T_1}{\partial t} = D_0 + \varepsilon D_1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \varepsilon^0 \frac{\partial^2}{\partial {T_0}^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} = {D_0}^2 + 2\varepsilon D_0 D_1$$

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$$

Açılım önerileri ile zaman türevleri denklem (3.7) e yerleştirilirse;

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{y}_{10}^{\mathrm{iv}} + \varepsilon \mathrm{y}_{10}^{\mathrm{iv}}\right) + \left({D_0}^2 + 2\varepsilon D_0 D_1\right)\left(\mathrm{y}_{10} + \varepsilon \mathrm{y}_{11}\right) - \gamma^2\left({D_0}^2 + 2\varepsilon D_0 D_1\right)\left(\mathrm{y}_{10}'' + \varepsilon \mathrm{y}_{11}''\right) \\
&= \Gamma_1 \varepsilon \left[\int_0^{\eta} \left(\mathrm{y}_{10}' + \varepsilon \mathrm{y}_{11}'\right)^2 dx + \alpha^2 \int_{\eta}^{1} \left(\mathrm{y}_{20}' + \varepsilon \mathrm{y}_{21}'\right)^2 dx\right]\left(\mathrm{y}_{10}'' + \varepsilon \mathrm{y}_{11}''\right) \\
&-\Gamma_1 \varepsilon \gamma^2 \left[\int_0^{\eta} \left(\mathrm{y}_{10}' + \varepsilon \mathrm{y}_{11}'\right)^2 dx + \alpha^2 \int_{\eta}^{1} \left(\mathrm{y}_{20}' + \varepsilon \mathrm{y}_{21}'\right)^2 dx\right]\left(\mathrm{y}_{10}^{\mathrm{iv}} + \varepsilon \mathrm{y}_{11}^{\mathrm{iv}}\right) \\
&+\varepsilon \mathrm{F}_1 \cos\Omega \mathrm{T}_0 - 2\varepsilon\mu\left(D_0 + \varepsilon D_1\right)\left(\mathrm{y}_{10} + \varepsilon \mathrm{y}_{11}\right)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Parantezleri dağıtırsak;

$$
\begin{aligned}
&y_{10}^{iv}+\varepsilon y_{10}^{iv}+D_0{}^2y_{10}+D_0{}^2\varepsilon y_{11}+2\varepsilon D_0D_1y_{10}+2\varepsilon D_0D_1\varepsilon y_{11}\\
&-\gamma^2D_0{}^2y_{10}''-2\varepsilon\gamma^2D_0D_1y_{10}''-\varepsilon\gamma^2D_0{}^2y_{11}''-2\varepsilon^2\gamma^2D_0D_1y_{11}''\\
&=\Gamma_1\varepsilon\left[\int_0^{\eta}(y_{10}'^2+2y_{10}'\varepsilon y_{11}'+\varepsilon^2y_{11}'^2)dx+\alpha^2\int_{\eta}^{1}(y_{20}'^2+2y_{20}'\varepsilon y_{21}'+\varepsilon^2y_{21}'^2)dx\right]\left(y_{10}''+\varepsilon y_{11}''\right)\\
&-\Gamma_1\varepsilon\gamma^2\left[\int_0^{\eta}\left(y_{10}'+\varepsilon y_{11}'\right)^2dx+\alpha^2\int_{\eta}^{1}\left(y_{20}'+\varepsilon y_{21}'\right)^2dx\right]\left(y_{10}^{iv}+\varepsilon y_{11}^{iv}\right)\\
&+\varepsilon F_1\cos\Omega T_0-2\varepsilon\mu D_0y_{10}-2\varepsilon^2\mu D_0y_{11}-2\varepsilon^2\mu D_1y_{10}-2\varepsilon^3\mu D_1y_{11}
\end{aligned}
$$

(3.14)

İfadeler düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
&\left(y_{10}^{iv}+D_0{}^2y_{10}-\gamma^2D_0{}^2y_{10}''\right)+\varepsilon\left(y_{10}^{iv}+D_0{}^2y_{11}+2D_0D_1y_{10}-2\gamma^2D_0D_1y_{10}''-\gamma^2D_0{}^2y_{11}''\right)\\
&+\varepsilon^2\left(2D_0D_1y_{11}-2\gamma^2D_0D_1y_{11}''\right)\\
&=\varepsilon\left(\begin{bmatrix}\Gamma_1\left[\int_0^{\eta}(y_{10}'^2+2y_{10}'\varepsilon y_{11}'+\varepsilon^2y_{11}'^2)dx+\alpha^2\int_{\eta}^{1}(y_{20}'^2+2y_{20}'\varepsilon y_{21}'+\varepsilon^2y_{21}'^2)dx\right]\left(y_{10}''+\varepsilon y_{11}''\right)\\-\Gamma_1\gamma^2\left[\int_0^{\eta}\left(y_{10}'+\varepsilon y_{11}'\right)^2dx+\alpha^2\int_{\eta}^{1}\left(y_{20}'+\varepsilon y_{21}'\right)^2dx\right]\left(y_{10}^{iv}+\varepsilon y_{11}^{iv}\right)\\+F_1\cos\Omega T_0-2\mu D_0y_{10}\\\end{bmatrix}\right)\\
&-2\varepsilon^2\mu D_0y_{11}-2\varepsilon^2\mu D_1y_{10}-2\varepsilon^3\mu D_1y_{11}
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

ε^0 Ve ε mertebeleri incelendiğinden ε mertebesi üzerinde kalan ifadeler sadeleştirilir.

$$
\begin{aligned}
&\left(y_{10}^{iv}+D_0{}^2y_{10}-\gamma^2D_0{}^2y_{10}''\right)+\varepsilon\left(y_{10}^{iv}+D_0{}^2y_{11}+2D_0D_1y_{10}-2\gamma^2D_0D_1y_{10}''-\gamma^2D_0{}^2y_{11}''\right)+\varepsilon^2\ldots\\
&=\varepsilon\left(\begin{bmatrix}\Gamma_1\left[\int_0^{\eta}(y_{10}'^2+2y_{10}'\varepsilon y_{11}'+\varepsilon^2y_{11}'^2)dx+\alpha^2\int_{\eta}^{1}(y_{20}'^2+2y_{20}'\varepsilon y_{21}'+\varepsilon^2y_{21}'^2)dx\right]\left(y_{10}''+\varepsilon y_{11}''\right)\\-\Gamma_1\gamma^2\left[\int_0^{\eta}(y_{10}'^2+2y_{10}'\varepsilon y_{11}'+\varepsilon^2y_{11}'^2)dx+\alpha^2\int_{\eta}^{1}(y_{20}'^2+2y_{20}'\varepsilon y_{21}'+\varepsilon^2y_{21}'^2)dx\right]\left(y_{10}^{iv}+\varepsilon y_{11}^{iv}\right)\\+F_1\cos\Omega T_0-2\mu D_0y_{10}\\\end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Aynı işlemler denklem (3.8) için de yapılırsa ikinci boyutsuz hareket denklemimiz aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left(y_{20}^{iv} + \frac{1}{\alpha^2} D_0^{\,2} y_{20} - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} D_0^{\,2} y_{20}'' \right)$$
$$+\varepsilon \left(y_{20}^{iv} + \frac{1}{\alpha^2} D_0^{\,2} y_{21} + \frac{2}{\alpha^2} D_0 D_1 y_{20} - 2\frac{\gamma^2}{\alpha^2} D_0 D_1 y_{20}'' - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} D_0^{\,2} y_{21}'' \right) + \varepsilon^2 \ldots$$
$$= \varepsilon \left(\begin{array}{l} \left[\Gamma_2 \left[\int_0^{\eta} (y_{10}'^2 + 2y_{10}' \varepsilon y_{21}' + \varepsilon^2 y_{21}'^2) dx + \alpha^2 \int_{\eta}^{1} (y_{20}'^2 + 2y_{20}' \varepsilon y_{21}' + \varepsilon^2 y_{21}'^2) dx \right] \left(y_{20}'' + \varepsilon y_{21}'' \right) \right. \\ -\Gamma_2 \gamma^2 \left[\int_0^{\eta} (y_{10}'^2 + 2y_{10}' \varepsilon y_{21}' + \varepsilon^2 y_{21}'^2) dx + \alpha^2 \int_{\eta}^{1} (y_{20}'^2 + 2y_{20}' \varepsilon y_{21}' + \varepsilon^2 y_{21}'^2) dx \right] \left(y_{20}^{iv} + \varepsilon y_{21}^{iv} \right) \\ \left. + F_2 \cos \Omega T_0 - 2\mu D_0 y_{20} \right] \end{array} \right) \quad (3.17)$$

<u>ε^0 mertebesi:</u>

$$O_1(\varepsilon^0): \qquad y_{10}^{iv} + D_0^2 y_{10} - \gamma^2 D_0^2 y_{10}'' = 0 \quad (3.18)$$

$$O_2(\varepsilon^0): \qquad y_{20}^{iv} + \frac{1}{\alpha^2} D_0^2 y_{20} - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} D_0^2 y_{20}'' = 0 \quad (3.19)$$

<u>ε Mertebesi:</u>

$O_1(\varepsilon)$:

$$y_{10}^{iv} + D_0^{\,2} y_{11} + 2D_0 D_1 y_{10} - 2\gamma^2 D_0 D_1 y_{10}'' - \gamma^2 D_0^{\,2} y_{11}'' = \Gamma_1 \left[\int_0^{\eta} (y_{10}'^2) dx + \alpha^2 \int_{\eta}^{1} (y_{20}'^2) dx \right] y_{10}''$$
$$-\Gamma_1 \gamma^2 \left[\int_0^{\eta} (y_{10}'^2) dx + \alpha^2 \int_{\eta}^{1} (y_{20}'^2) dx \right] y_{10}^{iv} + F_1 \cos \Omega T_0 - 2\mu D_0 y_{10} \quad (3.20)$$

$O_2(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} &y_{20}^{iv}+\frac{1}{\alpha^2}D_0{}^2y_{21}+\frac{2}{\alpha^2}D_0D_1y_{20}-2\frac{\gamma^2}{\alpha^2}D_0D_1y_{20}''-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}D_0{}^2y_{21}''=\Gamma_2\left[\int_0^{\eta}(y_{10}'^2)dx+\alpha^2\int_{\eta}^{1}(y_{20}'^2)dx\right]y_{20}'' \\ &-\Gamma_2\gamma^2\left[\int_0^{\eta}(y_{10}'^2)dx+\alpha^2\int_{\eta}^{1}(y_{20}'^2)dx\right]y_{20}^{iv}+F_2\cos\Omega T_0-2\mu D_0y_{20} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Bu mertebelerde süreklilik şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

Uç kısımlar:

$$\begin{aligned} &y_{10}(0)=0, \qquad y_{20}(1)=0 \\ &y_{11}''(0)=0, \qquad y_{21}''(1)=0 \end{aligned}$$

Orta kısım:

$$\begin{aligned} &y_{11}(\eta)=\alpha y_{21}(\eta), \qquad y_{11}'(\eta)=\alpha y_{21}'(\eta) \\ &y_{11}''(\eta)=\alpha^5 y_{21}''(\eta), \qquad y_{11}'''(\eta)=\alpha^5 y_{21}'''(\eta) \end{aligned} \tag{3.22}$$

3.2.Lineer Problem

ε^0 Mertebesindeki denklemler ve süreklilik şartlarını lineer hareket denklemi ve frekans denklemleri belirlemektedir. Bu denklemlerin şu çözümleri kabul ettiği varsayılabilir.

$$y_{10}(x,T_0,T_1)=A_1(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1(x)+\bar{A}_1(T_1)e^{-i\omega T_0}\bar{Y}_1(x) \tag{3.23}$$

$$y_{20}(x,T_0,T_1) = A_2(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2(x) + \bar{A}_2(T_1)e^{-i\omega T_0}\bar{Y}_2(x) \tag{3.24}$$

Denklem (3.23) ve (3.24)' de $A_1(T_1)$ ve $A_2(T_1)$ kompleks genlikleri ω ise doğal frekansı ifade eder. Çözüm kabulünün türevleri bulunur.

$$\begin{aligned} y_{10} &= A_1(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1(x) + cc \\ D_0 y_{10} &= i\omega A_1(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1(x) + cc \\ D_0^2 y_{10} &= i^2\omega^2 A_1(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1(x) + cc \end{aligned} \tag{3.25}$$

Türev değerleri denklem (3.18)'e yerleştirilir.

$$A_1(T_1)Y_1^{iv} + i^2\omega^2 A_1(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1(x) + cc - \gamma^2 i^2\omega^2 A_1(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1(x) + cc = 0 \tag{3.26}$$

Aynı işlemler denklem (3.19)' a da uygulanır ve denklemlerde sadeleştirmeler yapılırsa denklem (3.18) ve (3.19) için ε^0 mertebe çözümü,

$$Y_1^{iv} - \omega^2 Y_1(x) + \gamma^2\omega^2 Y_1''(x) = 0 \tag{3.27}$$

$$Y_2^{iv} - \frac{1}{\alpha^2}\omega^2 Y_2(x) + \frac{1}{\alpha^2}\gamma^2\omega^2 Y_2''(x) = 0 \tag{3.28}$$

Şeklinde elde edilir. Bulunan Denklem (3.27) ve (3.28) sadece konum değişkenine tabidir ve çözüm olarak şu denklemler önerilebilir,

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= c_{11}e^{ir_{11}x} + c_{12}e^{ir_{12}x} + c_{13}e^{ir_{13}x} + c_{14}e^{ir_{14}x} \\ &= c_{11}\left(e^{ir_{11}x} + \frac{c_{12}}{c_{11}}e^{ir_{12}x} + \frac{c_{13}}{c_{11}}e^{ir_{13}x} + \frac{c_{14}}{c_{11}}e^{ir_{14}x} \right) \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} Y_2(x) &= c_{21}e^{ikr_{21}x} + c_{22}e^{ikr_{22}x} + c_{23}e^{ikr_{23}x} + c_{24}e^{ikr_{24}x} \\ &= c_{21}\left(e^{ikr_{21}x} + \frac{c_{22}}{c_{21}}e^{ikr_{22}x} + \frac{c_{23}}{c_{21}}e^{ikr_{23}x} + \frac{c_{24}}{c_{21}}e^{ikr_{24}x} \right) \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tag{3.30a}$$

Çözümlerin mekâna göre türevleri,

$$Y_1'' = -c_{11}\left(r_{11}^2 e^{ir_{11}x} + \frac{c_{12}}{c_{11}} r_{12}^2 e^{ir_{12}x} + \frac{c_{13}}{c_{11}} r_{13}^2 e^{ir_{13}x} + \frac{c_{14}}{c_{11}} r_{14}^2 e^{ir_{14}x} \right)$$

$$Y_1^{iv} = c_{11}\left(r_{11}^4 e^{ir_{11}x} + \frac{c_{12}}{c_{11}} r_{12}^4 e^{ir_{12}x} + \frac{c_{13}}{c_{11}} r_{13}^4 e^{ir_{13}x} + \frac{c_{14}}{c_{11}} r_{14}^4 e^{ir_{14}x} \right) \tag{3.31}$$

$$Y_2'' = -c_{21}\left(r_{21}^2 k^2 e^{ikr_{11}x} + \frac{c_{22}}{c_{21}} r_{12}^2 k^2 e^{ikr_{12}x} + \frac{c_{23}}{c_{21}} r_{23}^2 k^2 e^{ikr_{13}x} + \frac{c_{24}}{c_{21}} r_{24}^2 k^2 e^{ikr_{14}x} \right)$$

$$Y_2^{iv} = c_{21}\left(r_{21}^4 k^4 e^{ikr_{21}x} + \frac{c_{22}}{c_{21}} r_{22}^4 k^4 e^{ikr_{22}x} + \frac{c_{23}}{c_{21}} r_{23}^4 k^4 e^{ikr_{23}x} + \frac{c_{24}}{c_{21}} r_{24}^4 k^4 e^{ikr_{24}x} \right)$$

$Y_1(x)$ Ve $Y_2(x)$ çözümü denklem (3.27) ve (3.28)'i sağlamalıdır. Denklem (3.29), (3.30) ve (3.31) yerlerine yazıldığında saçılma denklemleri elde edilir,

$$\begin{aligned}
&c_{11}\left(r_{11}^4 e^{ir_{11}x} + \frac{c_{12}}{c_{11}} r_{12}^4 e^{ir_{12}x} + \frac{c_{13}}{c_{11}} r_{13}^4 e^{ir_{13}x} + \frac{c_{14}}{c_{11}} r_{14}^4 e^{ir_{14}x} \right) \\
&-\omega^2 c_{11}\left(e^{ir_{11}x} + \frac{c_{12}}{c_{11}} e^{ir_{12}x} + \frac{c_{13}}{c_{11}} e^{ir_{13}x} + \frac{c_{14}}{c_{11}} e^{ir_{14}x} \right) \\
&-\gamma^2 \omega^2 c_{11}\left(r_{11}^2 e^{ir_{11}x} + \frac{c_{12}}{c_{11}} r_{12}^2 e^{ir_{12}x} + \frac{c_{13}}{c_{11}} r_{13}^2 e^{ir_{13}x} + \frac{c_{14}}{c_{11}} r_{14}^2 e^{ir_{14}x} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
&c_{21}\left(r_{21}^4 k^4 e^{ikr_{21}x} + \frac{c_{22}}{c_{21}} r_{22}^4 k^4 e^{ikr_{22}x} + \frac{c_{23}}{c_{21}} r_{23}^4 k^4 e^{ikr_{23}x} + \frac{c_{24}}{c_{21}} r_{24}^4 k^4 e^{ikr_{24}x} \right) \\
&-\frac{1}{\alpha^2} k^2 \omega^2 c_{21}\left(e^{ikr_{21}x} + \frac{c_{22}}{c_{21}} e^{ikr_{22}x} + \frac{c_{23}}{c_{21}} e^{ikr_{23}x} + \frac{c_{24}}{c_{21}} e^{ikr_{24}x} \right) \\
&-\frac{\gamma^2}{\alpha^2} k^2 \omega^2 c_{21}\left(r_{21}^2 k^2 e^{ikr_{21}x} + \frac{c_{22}}{c_{21}} r_{22}^2 k^2 e^{ikr_{22}x} + \frac{c_{23}}{c_{21}} r_{23}^2 k^2 e^{ikr_{23}x} + \frac{c_{24}}{c_{21}} r_{24}^2 k^2 e^{ikr_{24}x} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Burada sabit katsayılar,

$$C_{12}=\frac{c_{12}}{c_{11}} \qquad C_{13}=\frac{c_{13}}{c_{11}} \qquad C_{14}=\frac{c_{14}}{c_{11}} \qquad C_{22}=\frac{c_{22}}{c_{21}} \qquad C_{23}=\frac{c_{23}}{c_{21}} \qquad C_{24}=\frac{c_{24}}{c_{21}}$$

Şeklinde yeniden tanımlanabilir. Denklem (3.32) ve (3.33) sabit katsayı parantezini alır ve düzenlersek,

$$c_{11}\left\{\begin{array}{l} e^{ir_{11}x}\left(r_{11}{}^{4}-\gamma^{2}\omega^{2}r_{11}^{2}-\omega^{2}\right) \\ +C_{12}e^{ir_{12}x}\left(r_{12}{}^{4}-\gamma^{2}\omega^{2}r_{12}^{2}-\omega^{2}\right) \\ +C_{13}e^{ir_{13}x}\left(r_{13}{}^{4}-\gamma^{2}\omega^{2}r_{13}^{2}-\omega^{2}\right) \\ +C_{14}e^{ir_{14}x}\left(r_{14}{}^{4}-\gamma^{2}\omega^{2}r_{14}^{2}-\omega^{2}\right) \end{array}\right\}=0 \tag{3.34}$$

$$c_{21}\left\{\begin{array}{l} e^{ikr_{21}x}\left(r_{21}{}^{4}k^{4}-\frac{\gamma^{2}}{\alpha^{2}}k^{2}\omega^{2}r_{21}^{2}-\frac{1}{\alpha^{2}}\omega^{2}\right) \\ +C_{22}e^{ikr_{22}x}\left(r_{22}{}^{4}k^{4}-\frac{\gamma^{2}}{\alpha^{2}}k^{2}\omega^{2}r_{22}^{2}-\frac{1}{\alpha^{2}}k^{2}\omega^{2}\right) \\ +C_{23}e^{ikr_{23}x}\left(r_{23}{}^{4}k^{4}-\frac{\gamma^{2}}{\alpha^{2}}k^{2}\omega^{2}r_{23}^{2}-\frac{1}{\alpha^{2}}k^{2}\omega^{2}\right) \\ +C_{24}e^{ikr_{24}x}\left(r_{24}{}^{4}k^{4}-\frac{\gamma^{2}}{\alpha^{2}}k^{2}\omega^{2}r_{24}^{2}-\frac{1}{\alpha^{2}}k^{2}\omega^{2}\right) \end{array}\right\}=0 \tag{3.35}$$

Şeklinde elde edilir. Denklem (3.34) ve (3.35)'in geçerli olabilmesi için parantezlerin içindeki terimlerin sıfıra eşit olması gerekir.

$$r_{1n}^{4}-\gamma^{2}\omega^{2}r_{1n}^{2}-\omega^{2}=0 \qquad n=1,2,3,4 \tag{3.36}$$

$$r_{2n}^{4}k^{4}-\frac{\gamma^{2}}{\alpha^{2}}k^{2}\omega^{2}r_{2n}^{2}-\frac{1}{\alpha^{2}}k^{2}\omega^{2}=0 \qquad n=1,2,3,4 \tag{3.37}$$

Denklem (3.36) ve (3.37)'de tüm sabitler sayısal olarak yerleştirildikten sonra r_{1n} ve r_{2n} kökleri elde edilir. Daha sonra sınır şartlarını Denklem (3.36) ve (3.37)'ye yerleştirip bir katsayı matrisi kurularak şartların lineer probleme etkileri gözlemlenir.

Bu matrise ait determinant değerini sıfır yapan değerler sistemin tabii frekanslarına eşittir.

Uç kısımlar : *Orta kısım* :

$$Y_1(0)=0 \qquad Y_2(1)=0 \qquad Y_1(\eta)=\alpha Y_2(\eta) \qquad Y_1'(\eta)=\alpha Y_2'(\eta) \tag{3.38}$$
$$Y_1''(0)=0 \qquad Y_2''(1)=0 \qquad Y_1''(\eta)=\alpha^5 Y_2''(\eta) \qquad Y_1'''(\eta)=\alpha^5 Y_2'''(\eta)$$

3.3.Nonlineer Problem

Bu bölümde kademeli nano kiriş sisteminde meydana gelen nonlineer etkilerin lineer tabii frekansa katkısını gözlemlemek amacıyla nonlineer durum denklemlerinin çözümü yapılmıştır. ε Mertebesi denklemleri denklem (3.20) ve (3.21)'de bulunmuştur.

Nonlineer problemin çözümü için aşağıda verilen çözümlerin kabul edildiğini varsayalım.

Kademe öncesi ve sonrası için nonlineer çözüm önerileri;

$$y_{11}(x,T_0,T_1)=\phi_{11}(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{11}(x,T_0,T_1)+ke \tag{3.39}$$

$$y_{21}(x,T_0,T_1)=\phi_{21}(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{21}(x,T_0,T_1)+ke \tag{3.40}$$

Yukarıdaki denklemlerde *ke* kompleks eşleniği göstermektedir. Çözüm fonksiyonlarındaki ilk terimler ϕ_{11} ve ϕ_{21}, fonksiyonda bulunan seküler terimler, ikinci terimler W_{11} ve W_{21} ise fonksiyonda bulunan seküler olmayan terimleri ile ilişkilidir. Nonlineer probleme ait homojen kısmının çözümünde kullanılacak olan lineer çözüm önerileri aşağıda verilmiştir.

Kademe öncesi için lineer çözüm önerisi;

$$\begin{aligned} y_{10}(x,T_0,T_1) &= A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1(x) \\ &= (A(T_1)e^{i\omega T_0}+ke)Y_1(x) \end{aligned} \tag{3.41}$$

Kademe sonrası için lineer çözüm önerisi;

$$\begin{aligned} y_{20}(x,T_0,T_1) &= A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2(x) \\ &= (A(T_1)e^{i\omega T_0}+ke)Y_2(x) \end{aligned} \tag{3.42}$$

$$f\cos\Omega T_0 = f\frac{e^{i\Omega T_0}+e^{-i\Omega T_0}}{2} \tag{3.43}$$

Denklem (3.20)'de denklem (3.39), (3.41), (3.42) ve (3.43) yerlerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\left(\phi_{11}{}^{iv}(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{11}{}^{iv}(x,T_0,T_1)+ke\right)+D_0{}^2\left(\phi_{11}(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{11}(x,T_0,T_1)+ke\right)\\
&-\gamma^2 D_0{}^2\left(\phi_{11}''(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{11}''(x,T_0,T_1)+ke\right)\\
&=-2D_0D_1\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1(x)\right)\\
&+2\gamma^2 D_0D_1\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1''(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1''(x)\right)\\
&+\Gamma_1\left[\begin{array}{l}\int_0^{\eta}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1'(x))^2dx\\ +\alpha^2\int_{\eta}^{1}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2{}'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2{}'(x))^2dx\end{array}\right](A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1''(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1''(x))\\
&-\Gamma_1\gamma^2\left[\begin{array}{l}\int_0^{\eta}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1{}'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1{}'(x))^2dx+\\ \alpha^2\int_{\eta}^{1}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2{}'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2{}'(x))^2dx\end{array}\right](A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1^{iv}(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1^{iv}(x))\\
&+f_1\frac{e^{i\Omega T_0}+e^{-i\Omega T_0}}{2}-2\mu D_0\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1(x)\right)
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Denklem (3.21)'de denklem (3.40), (3.41), (3.42) ve (3.43) yerlerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\left(\phi_{21}{}^{iv}(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{21}{}^{iv}(x,T_0,T_1)+ke\right)+\frac{1}{\alpha^2}D_0{}^2\left(\phi_{21}(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{21}(x,T_0,T_1)+ke\right)\\
&-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}D_0{}^2\left(\phi_{21}''(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{21}''(x,T_0,T_1)+ke\right)\\
&=-\frac{2}{\alpha^2}D_0D_1\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2(x)\right)\\
&+2\frac{\gamma^2}{\alpha^2}D_0D_1\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2''(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2''(x)\right)\\
&+\Gamma_2\left[\begin{array}{l}\int_0^{\eta}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1{}'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1{}'(x))^2dx\\ +\alpha^2\int_{\eta}^{1}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2{}'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2{}'(x))^2dx\end{array}\right]\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2''(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2''(x)\right)\\
&-\Gamma_2\gamma^2\left[\begin{array}{l}\int_0^{\eta}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1{}'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1{}'(x))^2dx\\ +\alpha^2\int_{\eta}^{1}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2{}'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2{}'(x))^2dx\end{array}\right]\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2^{iv}(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2^{iv}(x)\right)\\
&+f_2\frac{e^{i\Omega T_0}+e^{-i\Omega T_0}}{2}-2\mu D_0\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2(x)\right)
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

Doğrusal olmayan problem için kademe öncesi ve sonrası için çözüm denklemleri sırasıyla (3.44), (3.45)'te bulunmuştur.

3.3.1.Baskın Rezonans Durumu

Uygulanan kuvvetin frekansının sistemin doğal frekansına yakın olduğunu farz edelim. Bu durumda şu eşitlik yazılabilir.

$$\Omega = \omega + \varepsilon\sigma \tag{3.46}$$

σ Bir ayar parametresidir ve zorlama frekansının tabii frekansa yakınlığını göstermektedir.

Denklem (3.46), denklem (3.44)'e yerleştirilirse,

$$\begin{aligned}
&\left(\phi_{11}{}^{iv}(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0} + W_{11}{}^{iv}(x,T_0,T_1) + ke\right) + D_0{}^2\left(\phi_{11}(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0} + W_{11}(x,T_0,T_1) + ke\right)\\
&-\gamma^2 D_0{}^2\left(\phi_{11}''(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0} + W_{11}''(x,T_0,T_1) + ke\right)\\
&= -2D_0D_1\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1(x) + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1(x)\right)\\
&+2\gamma^2 D_0D_1\left(A(T_1)e^{iwT_0}Y_1''(x) + \bar{A}(T_1)e^{-iwT_0}Y_1''(x)\right)\\
&+\Gamma_1\left[\int_0^{\eta}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1{}'(x) + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1{}'(x))^2dx + \alpha^2\int_{\eta}^{1}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2{}'(x) + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2{}'(x))^2dx\right](A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1''(x) + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1''(x))\\
&-\Gamma_1\gamma^2\left[\int_0^{\eta}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1{}'(x) + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1{}'(x))^2dx + \alpha^2\int_{\eta}^{1}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2{}'(x) + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2{}'(x))^2dx\right](A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1^{iv}(x) + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1^{iv}(x))\\
&+ f_1\frac{e^{i(\omega T_0+\varepsilon\sigma T_1)} + e^{-i(\omega T_0+\varepsilon\sigma T_1)}}{2} - 2\mu D_0\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1(x) + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1(x)\right)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Denklem (3.46), denklem (3.45)'e yerleştirilirse,

$$
\begin{aligned}
&\left(\phi_{21}{}^{iv}(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{21}{}^{iv}(x,T_0,T_1)+ke\right)+\frac{1}{\alpha^2}D_0{}^2\left(\phi_{21}(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{21}(x,T_0,T_1)+ke\right)\\
&-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}D_0{}^2\left(\phi_{21}''(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{21}''(x,T_0,T_1)+ke\right)\\
&=-\frac{2}{\alpha^2}D_0D_1\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2(x)\right)\\
&+2\frac{\gamma^2}{\alpha^2}D_0D_1\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2''(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2''(x)\right)\\
&+\Gamma_2\left[\int_0^{\eta}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1'(x))^2dx+\alpha^2\int_{\eta}^{1}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2{}'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2{}'(x))^2dx\right]\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2''(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2''(x)\right)\\
&-\Gamma_2\gamma^2\left[\int_0^{\eta}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1'(x))^2dx+\alpha^2\int_{\eta}^{1}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2{}'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2{}'(x))^2dx\right]\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2^{iv}(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2^{iv}(x)\right)\\
&+\mathrm{f}_2\frac{e^{i(\omega T_0+\varepsilon\sigma T_1)}+e^{-i(\omega T_0+\varepsilon\sigma T_1)}}{2}-2\mu D_0\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2(x)\right)
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

Kademeli nano kirişin matematiksel modeli dikkate alınarak, denklem (3.47) ve (3.48), yani kademe öncesi ve sonrasının bütünlük sağlanması maksadıyla alt alta toplanır.

$$
\begin{aligned}
&\left(\phi_{11}{}^{iv}(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{11}{}^{iv}(x,T_0,T_1)+ke\right)+\left(\phi_{21}{}^{iv}(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{21}{}^{iv}(x,T_0,T_1)+ke\right)\\
&+D_0{}^2\left(\phi_{11}(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{11}(x,T_0,T_1)+ke+\frac{\phi_{21}(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{21}(x,T_0,T_1)+ke}{\alpha^2}\right)\\
&-\gamma^2 D_0{}^2\left(\phi_{11}''(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{11}''(x,T_0,T_1)+ke+\frac{\phi_{21}''(x,T_0,T_1)e^{i\omega T_0}+W_{21}''(x,T_0,T_1)+ke}{\alpha^2}\right)\\
&=-2D_0D_1\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1(x)+\frac{A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2(x)}{\alpha^2}\right)\\
&+2\gamma^2 D_0D_1\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1''(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1''(x)+\frac{A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2''(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2''(x)}{\alpha^2}\right)\\
&+\Gamma_1\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\eta}\left(\begin{array}{l}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1{}'(x))^2dx\\+\alpha^2\displaystyle\int_{\eta}^{1}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2{}'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2{}'(x))^2dx\end{array}\right)\\+\displaystyle\int_0^{\eta}\left(\begin{array}{l}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1{}'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1{}'(x))^2dx\\+\alpha^2\displaystyle\int_{\eta}^{1}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2{}'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2{}'(x))^2dx\end{array}\right)\end{array}\right]\left(\begin{array}{l}A(T_1)e^{i\omega T_0}\left(Y_1''(x)+Y_2''(x)\right)\\+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}\left(Y_1''(x)+Y_2''(x)\right)\end{array}\right)\\
&-\Gamma_2\gamma^2\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\eta}\left(\begin{array}{l}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1'(x))^2dx\\+\alpha^2\displaystyle\int_{\eta}^{1}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2'(x))^2dx\end{array}\right)\\+\displaystyle\int_0^{\eta}\left(\begin{array}{l}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1'(x))^2dx\\+\alpha^2\displaystyle\int_{\eta}^{1}(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2'(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2'(x))^2dx\end{array}\right)\end{array}\right]\left(\begin{array}{l}A(T_1)e^{i\omega T_0}\left(Y_1^{iv}(x)+Y_2{}^{iv}(x)\right)\\+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}\left(Y_1^{iv}(x)+Y_2{}^{iv}(x)\right)\end{array}\right)\\
&+F\frac{e^{i(\omega T_0+\varepsilon\sigma T_1)}+e^{-i(\omega T_0+\varepsilon\sigma T_1)}}{2}-2\mu D_0\left(\begin{array}{l}A(T_1)e^{i\omega T_0}\left(Y_1(x)+Y_2(x)\right)\\+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}\left(Y_1(x)+Y_2(x)\right)\end{array}\right)
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

$\varepsilon^{i\omega T_0}$ 'lı terimler alınır, diğer terimler ise seküler olmayan terimler "S.O.T. "ve kompleks eşlenikleri "k.e." olarak gösterilir.

$$
\begin{aligned}
&A(T_1)e^{i\omega T_0}\left(\phi_{11}{}^{iv}(x,T_0,T_1)+\phi_{21}{}^{iv}(x,T_0,T_1)\right)\\
&+D_0{}^2e^{i\omega T_0}\left(\phi_{11}(x,T_0,T_1)+\frac{\phi_{21}(x,T_0,T_1)}{\alpha^2}\right)\\
&-\gamma^2D_0{}^2e^{i\omega T_0}\left(\phi_{11}''(x,T_0,T_1)+\frac{\phi_{21}''(x,T_0,T_1)}{\alpha^2}\right)\\
&=-2D_0D_1A(T_1)e^{i\omega T_0}\left(Y_1(x)+\frac{Y_2(x)}{\alpha^2}\right)\\
&+2\gamma^2\,D_0D_1\left(\begin{array}{l}A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1''(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1''(x)\\+\dfrac{A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2''(x)+\bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2''(x)}{\alpha^2}\end{array}\right)\\
&+\Gamma_1e^{i\omega T_0}3A^2(T_1)\bar{A}(T_1)\left[\int_0^{\eta}\left(Y_1{}^{2\prime}(x)Y_1''(x)dx+\alpha^2\int_{\eta}^{1}Y_2{}^{2\prime}(x)Y_2''(x)dx\right)\right]\\
&-\Gamma_2\gamma^2e^{i\omega T_0}3A^2(T_1)\bar{A}(T_1)\left[\int_0^{\eta}\left(Y_1{}^{2\prime}(x)Y_1{}^{iv}(x)dx+\alpha^2\int_{\eta}^{1}Y_2{}^{2\prime}(x)Y_2{}^{iv}(x)dx\right)\right]\\
&+\frac{F}{2}e^{i\varepsilon\sigma T_1}-2\mu D_0A(T_1)e^{i\omega T_0}\left(Y_1(x)+Y_2(x)\right)+SOT+ke
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Eşitliğin sol tarafında kademe öncesi;

$$\Upsilon(\phi_{11})=\phi_1{}^{iv}-\omega^2\phi_1-\gamma^2\omega^2\phi_1'' \tag{3.51}$$

Eşitliğin sol tarafında kademe sonrası;

$$\Upsilon(\phi_{21})=\phi_2{}^{iv}-\frac{\omega^2\phi_2}{\alpha^2}-\frac{\gamma^2\omega^2\phi_2''}{\alpha^2} \tag{3.52}$$

Eşitliğin sağ tarafındaki terimler için E.S.T. kısaltması kullanılmıştır.

Eşitliğin sağ tarafında kademe öncesi;

$$
\begin{aligned}
(EST)_1 &= -2D_0D_1A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1(x) + 2\gamma^2 D_0D_1\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1''(x) + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_1''(x)\right) \\
&+\Gamma_1 e^{i\omega T_0}3A^2(T_1)\bar{A}(T_1)\left[\int_0^{\eta}\left(Y_1^{2\prime}(x)dx + \alpha^2\int_{\eta}^{1}Y_2^{2\prime}(x)dx\right)\right]Y_1''(x) \\
&-\Gamma_2\gamma^2 e^{i\omega T_0}3A^2(T_1)\bar{A}(T_1)\left[\int_0^{\eta}\left(Y_1^{2\prime}(x)dx + \alpha^2\int_{\eta}^{1}Y_2^{2\prime}(x)dx\right)\right]Y_1^{iv}(x) \\
&+\frac{F}{2}e^{i\varepsilon\sigma T_1} - 2\mu D_0A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_1(x)
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

Eşitliğin sağ tarafında kademe sonrası;

$$
\begin{aligned}
(EST)_2 &= -2D_0D_1A(T_1)e^{i\omega T_0}\frac{Y_2(x)}{\alpha^2} \\
&+2\frac{\gamma^2}{\alpha^2}D_0D_1\left(A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2''(x) + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}Y_2''(x)\right) \\
&+\Gamma_1 e^{i\omega T_0}3A^2(T_1)\bar{A}(T_1)\left[\int_0^{\eta}\left(Y_1^{2\prime}(x)dx + \alpha^2\int_{\eta}^{1}Y_2^{2\prime}(x)dx\right)\right]Y_2''(x) \\
&-\Gamma_2\gamma^2 e^{i\omega T_0}3A^2(T_1)\bar{A}(T_1)\left[\int_0^{\eta}\left(Y_1^{2\prime}(x)dx + \alpha^2\int_{\eta}^{1}Y_2^{2\prime}(x)dx\right)\right]Y_2^{iv}(x) \\
&+\frac{F}{2}e^{i\varepsilon\sigma T_1} - 2\mu D_0A(T_1)e^{i\omega T_0}Y_2(x)
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

Denklem (3.51), (3.52), (3.53) ve (3.54) keyfi seçilen g_1 ve g_2 fonksiyonları ile çarpılır ve integre edilirse,

$$
\int_0^{\eta} g_1(x)\Upsilon(\phi_{11})dx + \int_{\eta}^{1} g_2(x)\Upsilon(\phi_{21})dx = \int_0^{\eta} g_1(x)(EST)_1dx + \int_{\eta}^{1} g_2(x)(EST)_2dx \tag{3.55}
$$

Denklemi elde edilir. Denklem (3.53) ve (3.54), denklem (3.55)'de yerlerine konulursa,

$$\int_0^{\eta}\left(\underbrace{\phi_1^{iv}g_1(x)}_{1}-\underbrace{\omega^2\phi_1 g_1(x)}_{2}-\underbrace{\gamma^2\omega^2\phi_1'' g_1(x)}_{3}\right)dx$$
$$+\int_{\eta}^{1}\left(\underbrace{\phi_2^{iv}g_2(x)}_{4}-\underbrace{\frac{\omega^2\phi_2}{\alpha^2}g_2(x)}_{5}-\underbrace{\frac{\gamma^2\omega^2\phi_2''}{\alpha^2}g_2(x)}_{6}\right)dx \qquad (3.56)$$
$$=\int_0^{\eta}g_1(x)(EST)_1dx+\int_{\eta}^{1}g_2(x)(EST)_2dx$$

ifadesi elde edilir. g_1 Ve g_2 fonksiyonları başlangıçta keyfi olarak alınmış fonksiyonlardı. Bu fonksiyonlar eşitliğin sol tarafındaki integrali sıfır yapacak şekilde seçilirse ve denklem (3.56)'de numaralandırılmış ifadeler aşağıda açılırsa;

$$1\Rightarrow\int_0^{\eta}\phi_1^{iv}g_1(x)dx=\left[\phi_1'''g_1\Big|_0^{\eta}-\int_0^{\eta}\phi_1'''g_1'(x)dx\right]$$
$$=\left[\phi_1'''g_1\Big|_0^{\eta}-\phi_1''g_1'\Big|_0^{\eta}+\int_0^{\eta}\phi_1''g_1''(x)dx\right]$$
$$=\left[\phi_1'''g_1\Big|_0^{\eta}-\phi_1''g_1'\Big|_0^{\eta}+\phi_1'g_1''\Big|_0^{\eta}-\int_0^{\eta}\phi_1'g_1'''(x)dx\right] \qquad (3.57)$$
$$=\left[\phi_1'''g_1\Big|_0^{\eta}-\phi_1''g_1'\Big|_0^{\eta}+\phi_1'g_1''\Big|_0^{\eta}-\phi_1g_1'''\Big|_0^{\eta}+\int_0^{\eta}\phi_1g_1^{iv}(x)dx\right]$$

$$3\Rightarrow\gamma^2\omega^2\int_0^{\eta}\phi_1''g_1(x)dx=\gamma^2\omega^2\left[\phi_1'g_1\Big|_0^{\eta}-\int_0^{\eta}\phi_1'g_1'(x)dx\right]$$
$$=\gamma^2\omega^2\left[\phi_1'g_1\Big|_0^{\eta}-\phi_1g_1'\Big|_0^{\eta}+\int_0^{\eta}\phi_1g_1''(x)dx\right] \qquad (3.58)$$

1 ve 3 numaralı ifadelere benzer olarak 4 ve 6 numaralı ifadelerde açılırsa;

$$
\begin{aligned}
4 \Rightarrow & \int_{\eta}^{1} \phi_2^{iv} g_2(x)dx = \left[\phi_2''' g_2 \Big|_{\eta}^{1} - \int_{\eta}^{1} \phi_2''' g_2'(x)dx \right] \\
&= \left[\phi_2''' g_2 \Big|_{\eta}^{1} - \phi_2'' g_2' \Big|_{\eta}^{1} + \int_{\eta}^{1} \phi_2'' g_2''(x)dx \right] \\
&= \left[\phi_2''' g_2 \Big|_{\eta}^{1} - \phi_2'' g_2' \Big|_{\eta}^{1} + \phi_2' g_2'' \Big|_{\eta}^{1} - \int_{\eta}^{1} \phi_2' g_2'''(x)dx \right] \\
&= \left[\phi_2''' g_2 \Big|_{\eta}^{1} - \phi_2'' g_2' \Big|_{\eta}^{1} + \phi_2' g_2'' \Big|_{\eta}^{1} - \phi_2 g_2''' \Big|_{\eta}^{1} + \int_{\eta}^{1} \phi_2 g_2^{iv}(x)dx \right]
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

$$
\begin{aligned}
6 \Rightarrow & \frac{\gamma^2\omega^2}{\alpha^2} \int_{\eta}^{1} \phi_2'' g_2(x)dx = \gamma^2\omega^2 \left[\phi_2' g_2 \Big|_{\eta}^{1} - \int_{\eta}^{1} \phi_2' g_2'(x)dx \right] \\
&= \frac{\gamma^2\omega^2}{\alpha^2} \left[\phi_2' g_2 \Big|_{\eta}^{1} - \phi_2 g_2' \Big|_{\eta}^{1} + \int_{\eta}^{1} \phi_2 g_2''(x)dx \right]
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

(3.57), (3.58), (3.59), (3.60) nolu denklemler denklem (3.56)'ya yerleştirilirse,

$$
\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{l} \phi_1''' g_1 \Big|_0^{\eta} - \phi_1'' g_1' \Big|_0^{\eta} + \phi_1' g_1'' \Big|_0^{\eta} - \phi_1 g_1''' \Big|_0^{\eta} \\ + \phi_2''' g_2 \Big|_{\eta}^{1} - \phi_2'' g_2' \Big|_{\eta}^{1} + \phi_2' g_2'' \Big|_{\eta}^{1} - \phi_2 g_2''' \Big|_{\eta}^{1} \end{array} \right] \\
&-\gamma^2\omega^2 \left[\phi_1' g_1 \Big|_0^{\eta} - \phi_1 g_1' \Big|_0^{\eta} + \frac{1}{\alpha^2} \left(\phi_2' g_2 \Big|_{\eta}^{1} - \phi_2 g_2' \Big|_{\eta}^{1} \right) \right] \\
&+ \left[\int_0^{\eta} \phi_1 g_1^{iv}(x)dx + \int_{\eta}^{1} \phi_2 g_2^{iv}(x)dx \right] - \gamma^2\omega^2 \left[\int_0^{\eta} \phi_1 g_1''(x)dx + \frac{1}{\alpha^2} \int_{\eta}^{1} \phi_2 g_2''(x)dx \right] \\
&-\omega^2 \left[\int_0^{\eta} \phi_1 g_1(x)dx + \frac{1}{\alpha^2} \int_{\eta}^{1} \phi_1 g_1(x)dx \right] = \int_0^{\eta} g_1(x)(EST)_1 dx + \int_{\eta}^{1} g_2(x)(EST)_2 dx
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

Denklem düzenlenirse kademe öncesi ve sonrası için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$
g_1^{iv} - \omega^2 g_1 - \gamma^2\omega^2 g_1'' = 0 \tag{3.62}
$$

$$
g_2^{iv} - \frac{\omega^2}{\alpha^2} g_2 - \frac{\gamma^2\omega^2}{\alpha^2} g_2'' = 0 \tag{3.63}
$$

Kademeli nano kirişe ait boyutsuz sınır şartları ise tablo 3.3.1.1'deki gibi düzenlenir.

Tablo 3.3.1.1 Kademeli Nano kirişin Boyutsuz Sınır Şartları

1	$g_1(0)=0$	**5**	$g_1(\eta)=\alpha g_2(\eta)$
2	$g_2(1)=0$	**6**	$g_1'(\eta)=\alpha g_2'(\eta)$
3	$g_1''(0)=0$	**7**	$g_1''(\eta)=\alpha^5 g_2''(\eta)$
4	$g_2''(1)=0$	**8**	$g_1'''(\eta)=\alpha^5 g_2'''(\eta)$

Denklem (104) ve (105)'in sağlanması için gerekli şartlara şu şekilde ulaşılmıştır,

$$g_1(x)=Y_1(x) \qquad \text{ve} \qquad g_2(x)=\alpha^4 Y_2(x)$$

(3.64)

$$0=\int_0^{\eta} g_1(x)(EST)_1\,dx+\int_{\eta}^{1} g_2(x)(EST)_2\,dx \tag{3.65}$$

Denklemde eşitliğin sağ tarafında bulunan terimler açılır ve denklem (3.64), denklem (3.65)'de uygun yerlere yazılırsa şu ifade elde edilir.

$$
\begin{aligned}
0 = \int_0^{\eta} g_1(x) &\left[\begin{array}{l}
(-2iw)\left(A' + \mu A\right)Y_1 + 2\gamma^2\, i\omega A' Y_1'' \\
+\Gamma_1 3A^2\bar{A}\left[\int_0^{\eta}\left(Y_1'^2(x) + \alpha^2\int_{\eta}^{1} Y_2'^2(x)\right)\right]Y_1''dx \\
-\Gamma_2\gamma^2 3A^2\bar{A}\left[\int_0^{\eta}\left(Y_1'^2(x) + \alpha^2\int_{\eta}^{1} Y_2'^2(x)\right)\right]Y_1^{iv}dx + \dfrac{F}{2}e^{i\varepsilon\sigma T_1} \\
+SOT + ke
\end{array}\right]dx \\
+\int_{\eta}^{1} g_2(x) &\left[\begin{array}{l}
(-2iw)\left(\dfrac{A'}{\alpha^2} + \mu A\right)Y_2 + 2\dfrac{\gamma^2}{\alpha^2} i\omega A' Y_2'' + \\
\Gamma_1 3A^2\bar{A}\left[\int_0^{\eta}\left(Y_1'^2 + \alpha^2\int_{\eta}^{1} Y_2'^2\right)\right]Y_2''dx \\
-\Gamma_2\gamma^2 3A^2\bar{A}\left[\int_0^{\eta}\left(Y_1'^2 + \alpha^2\int_{\eta}^{1} Y_2'^2\right)\right]Y_2^{iv}dx \\
+\dfrac{F}{2}e^{i\varepsilon\sigma T_1} + SOT + ke
\end{array}\right]dx
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

Denklem (3.66)'ya denklem (3.64)'deki şartlar yerleştirilir.

$$
\begin{aligned}
0 = \int_0^{\eta} Y_1(x) &\left[\begin{array}{l}
(-2iw)\left(A' + \mu A\right)Y_1 + 2\gamma^2\, i\omega A' Y_1'' + \Gamma_1 3A^2\bar{A}\left[\int_0^{\eta}\left(Y_1'^2(x) + \alpha^2\int_{\eta}^{1} Y_2'^2(x)\right)\right]Y_1''dx \\
-\Gamma_2\gamma^2 3A^2\bar{A}\left[\int_0^{\eta}\left(Y_1'^2(x) + \alpha^2\int_{\eta}^{1} Y_2'^2(x)\right)\right]Y_1^{iv}dx + \dfrac{F}{2}e^{i\varepsilon\sigma T_1} + SOT + ke
\end{array}\right]dx \\
+\int_{\eta}^{1} \alpha^4 Y_2(x) &\left[\begin{array}{l}
(-2iw)\left(\dfrac{A'}{\alpha^2} + \mu A\right)Y_2 + 2\dfrac{\gamma^2}{\alpha^2} i\omega A' Y_2'' + \Gamma_1 3A^2\bar{A}\left[\int_0^{\eta}\left(Y_1'^2 + \alpha^2\int_{\eta}^{1} Y_2'^2\right)\right]Y_2''dx \\
-\Gamma_2\gamma^2 3A^2\bar{A}\left[\int_0^{\eta}\left(Y_1'^2 + \alpha^2\int_{\eta}^{1} Y_2'^2\right)\right]Y_2^{iv}dx + \dfrac{F}{2}e^{i\varepsilon\sigma T_1} + SOT + ke
\end{array}\right]dx
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

Denklemi (3.67)'de parantezler dağıtılırsa,

$$
\begin{aligned}
0 = (-2i\omega A')&\left(\int_0^{\eta} Y_1^2 dx + \alpha^2 \int_{\eta}^{1} Y_2^2 dx\right) \\
&-2iw\mu A\left(\int_0^{\eta} Y_1^2 dx + \alpha^4 \int_{\eta}^{1} Y_2^2 dx\right) \\
&+2\gamma^2 i\omega A'\left(\int_0^{\eta} Y_1 Y_1'' dx + \frac{a^4}{\alpha^2}\int_0^{\eta} Y_2 Y_2'' dx\right) \\
&+\Gamma_1 3A^2\bar{A}\left(\int_0^{\eta} Y_1'^2(x)dx + \alpha^2 \int_{\eta}^{1} Y_2'^2(x)dx\right) \\
&.\left(\int_0^{\eta} Y_1 Y_1'' dx + \alpha^2 \int_{\eta}^{1} Y_2 Y_2'' dx\right) \\
&-\Gamma_2\gamma^2 3A^2\bar{A}\left(\int_0^{\eta} Y_1'^2(x)dx + \alpha^2 \int_{\eta}^{1} Y_2'^2(x)dx\right) \\
&.\left(\int_0^{\eta} Y_1 Y_1^{iv} dx + \alpha^2 \int_{\eta}^{1} Y_2 Y_2^{iv} dx\right) \\
&+\frac{1}{2}e^{i\varepsilon\sigma T_1}\left(\int_0^{\eta} FY_1(x)dx + \alpha^4 \int_{\eta}^{1} FY_2(x)dx\right) \\
&+SOT + ke
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

Denklem üzerinde tanımlanan terimler kullanılarak denklem düzenlenir ve kısaltma terimleri (3.69)'daki gibi belirlenirse,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\eta} Y_1^2 dx + \alpha^4 \int_{\eta}^{1} Y_2^2 dx = 1 \qquad && \int_0^{\eta} Y_1'^2(x)dx + \alpha^2 \int_{\eta}^{1} Y_2'^2(x)dx = b \\
&\int_0^{\eta} Y_1''^2(x)dx + \alpha^2 \int_{\eta}^{1} Y_2''^2(x)dx = c \qquad && \int_0^{\eta} FY_1(x)dx + \alpha^4 \int_{\eta}^{1} FY_2(x)dx = f
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

Denklem (3.70) elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&2i\omega(A' + \mu A) + 2\gamma^2 i\omega A' b + \Gamma_1 3A^2\bar{A}b^2 + \Gamma_2\gamma^2 3A^2\bar{A}bc \\
&- f\frac{1}{2}e^{i\varepsilon\sigma T_1} + SOT + ke = 0
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

Yukarıdaki denklem (3.70)'e aşağıda belirtilen kompleks genlik ifadeleri yazılır, denklem reel ve sanal kısımlarına ayrılırsa sisteme ait genlik faz modülasyon denklemleri bulunabilir. Bunun için çözülebilirlik şartından elde edilen denklemler polar formda yazılmıştır.

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\theta} \quad \text{ve} \quad \bar{A} = \frac{1}{2} a e^{-i\theta} \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned} &2i\omega\left(\frac{1}{2}a'e^{i\theta} + \frac{1}{2}ai\theta'e^{i\theta} + \mu\frac{1}{2}ae^{i\theta}\right) + 2\gamma^2 i\omega b\frac{1}{2}a'e^{i\theta} + 2\gamma^2 i^2\omega b\frac{1}{2}a\theta'e^{i\theta} \\ &+\Gamma_1 3b^2\left(\frac{1}{4}a^2e^{2i\theta}\frac{1}{2}ae^{-i\theta}\right) + \Gamma_2\gamma^2 3bc\left(\frac{1}{4}a^2e^{2i\theta}\frac{1}{2}ae^{-i\theta}\right) \\ &- f\frac{1}{2}e^{i\varepsilon\sigma T_1} + SOT + ke = 0 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Denklem (3.72) $e^{i\theta}$ ile sadeleştirilir,

$$\begin{aligned} &i\omega a' - a\omega\theta' + \mu i\omega a + \gamma^2 i\omega a'b - \gamma^2\omega\alpha\theta'b + \Gamma_1\frac{3}{8}a^3b^2 + \Gamma_2\gamma^2\frac{3}{8}a^3bc \\ &- f\frac{1}{2}e^{i\varepsilon(\sigma T_1-\theta)} + SOT + ke = 0 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Faz ifadesi için denklem (3.74) ve (3.75)'deki tanımlamalar yapılıp düzenlenirse,

$$\theta = \sigma T_1 - \psi \tag{3.74}$$

$$e^{i\psi} = \cos\psi + i\sin\psi \tag{3.75}$$

Denklem (3.76) şu şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} &i\omega a' - a\omega\sigma + a\omega\psi' + i\omega\mu a + \gamma^2 i\omega a'b - \gamma^2\omega ab\sigma + \gamma^2\omega ab\psi' + \Gamma_1\frac{3}{8}a^3b^2 \\ &+\Gamma_2\gamma^2\frac{3}{8}a^3bc - \frac{1}{2}f\cos\psi - i\frac{1}{2}f\sin\psi = 0 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Denklem (3.76) reel ve sanal kısımlarına ayrılarak sırasıyla denklem (3.77) ve (3.78) elde edilir.

Reel Kısım

$$a\omega\psi' = a\omega\sigma + \gamma^2\omega ab\sigma - \gamma^2\omega ab\psi' - \Gamma_1\frac{3}{8}a^3b^2 - \Gamma_2\gamma^2\frac{3}{8}a^3bc + f\frac{1}{2}\cos\psi \quad (3.77)$$

Sanal Kısım

$$\omega a'(1+\gamma^2 b) + \mu\omega a = f\frac{1}{2}\sin\psi \quad (3.78)$$

3.4.Numerik Çözüm

Bu bölümde analitik olarak bulunan denklemlerin numerik analizi yapılmıştır.

3.4.1. Serbest Titreşim Durumu

Serbest titreşim için şu kabuller yapılır,

$$f = 0 \quad \mu = 0 \quad \sigma = 0 \quad (3.79)$$

Denklem (121), denklem (120)'ye yerleştirilirse,

$$a' = 0 \quad \text{Ve} \quad a = a_0(sabit) \quad (3.80)$$

Elde edilir. Bu durumda denklem (3.77)'ye denklem (3.79) ve (3.80) eklenilirse,

$$\omega_{n1} = \omega + \theta'$$

$$\psi = \sigma T_1 - \theta$$

$$\psi'(1+\gamma^2 b) = -\Gamma_1 \frac{3}{8\omega} a^2 b^2 - \Gamma_2 \gamma^2 \frac{3}{8\omega} a^2 bc \tag{3.81}$$

$$\psi' = -\Gamma_1 \frac{3a^2 b^2}{8\omega(1+\gamma^2 b)} - \Gamma_2 \frac{3\gamma^2 a^2 bc}{8\omega(1+\gamma^2 b)}$$

Eşitlikleri elde edilir. Denklem (3.81) düzenlenirse sistemin nonlineer frekansı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\omega_{n1} = \omega + a_0{}^2 \left(\Gamma_1 \frac{3b^2}{8\omega(1+\gamma^2 b)} + \Gamma_2 \frac{3\gamma^2 bc}{8\omega(1+\gamma^2 b)} \right) \tag{3.82}$$

λ ifadesi nonlineer terimlerden ötürü doğal frekansa gelen düzeltmeler olarak tanımlanır ve şu şekilde ifade edilir,

$$\lambda = \frac{3}{8} \frac{(\Gamma_1 b^2 + \Gamma_2 \gamma^2 bc)}{\omega(1+\gamma^2 b)} \tag{3.83}$$

Bu durumda sistemin nonlineer frekansının son hali şu şekilde olur,

$$\omega_{n1} = \omega + \lambda a_0{}^2 \tag{3.84}$$

3.4.2. Zorlamalı ve Sönümlü Titreşim Durumu

Düzgün rejim titreşimleri için,

$$a' = 0 \qquad \psi' = 0 \tag{3.85}$$

Kabul edilir. Kabuller, denklem (3.77) ve (3.78)'e yerleştirilir ve ψ denklemler arasından elimine edilirse,

$$\sigma_{1,2} = \lambda a^2 \mp \sqrt{\frac{f^2}{4\omega^2 a_0{}^2(1+\gamma^2 b)} - \mu^2} \tag{3.86}$$

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma$$

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon\left(\lambda a^2 \mp \sqrt{\frac{f^2}{4\omega^2 a_0{}^2(1+\gamma^2 b)} - \mu^2} \right) \tag{3.87}$$

σ ve Ω ifadeleri elde edilir. Denklem (3.86)'da zorlama frekansındaki değişimi ifade eden σ ayar parametresi ile genlik ilişkisini, denklem (3.87) ise frekans tepki denklemi bulunmuştur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMALAR

Bu tez çalışmasında basit-basit mesnetli kademeli bir nano kirişin yerel olmayan elastisite teorisine göre titreşim analizi yapılmıştır. Analiz kapsamında kademe yerinin, kademe kesit yarıçapları oranındaki değişimin ve Eringen'in eleastiste teorisinden gelen yerel olmayan parametrenin değişiminin nano kirişin titreşim hareketleri üzerindeki etkileri ele alınmıştır. Değişken parametrelerin kademeli nano kiriş titreşim hareketi üzerindeki etkileri, verilen değerlerde nano kirişe ait doğal frekanslarının bulunması ile incelenmiştir.

4.1. Kademeli Nano Kirişe ait Lineer Titreşim Durumu için Sayısal Çözümler

Önceki bölümde yapılan perturbasyon açılımda 1. Mertebeden elde edilen kademeli nano kirişe ait lineer hareket denklemleri ve sınır şartları kullanılarak nano kirişin ilk üç mod doğal frekans değerleri bulunmuştur. Bu noktada sönüm ve kuvvet etkisi yoktur. Frekans değerleri, çeşitli kademe oranlarında, $\alpha = 0.5 - 0.8 - 1 - 2 - 3$, kademe yerlerinde $\eta = 0.1 - 0.2 - 0.4 - 0.5 - 0.6 - 0.8$ ve yerel olmayan parametrelere $\gamma = 0 - 0.1 - 0.2 - 0.3 - 0.4 - 0.5$ göre çeşitlendirilmiştir. Farklı şartlarda kademeli nano kirişe ait elde edilen ilk üç mod doğal frekansları tablolar halinde sunulmuştur.

Tablo 4.1.1 Farklı yerel olmayan parametrelere göre ilk üç temel frekansın karşılaştırılması

	$\alpha=1$ $\eta=1$								
γ	ω_1			ω_2			ω_3		
	Mevcut	**[50]**	**[51]**	**Mevcut**	**[50]**	**[51]**	**Mevcut**	**[50]**	**[51]**
0	9.8696	9.8696	9.8696	39.4784	39.4784	39.4787	88.8264	88.8264	88.8280
0.1	9.4158	9.4159	9.4159	33.4277	33.4277	33.4279	64.6414	64.6414	64.6420
0.2	8.3569	8.3569	8.3569	24.5823	24.5823	24.5824	41.6284	41.6284	41.6287
0.3	7.1824	7.1824	-	18.5015	18.5016	-	29.6180	29.6180	-
0.4	6.1455	6.1456	-	14.5951	14.5951	-	22.7743	22.7743	-
0.5	5.3003	5.3003	-	11.9744	11.9744	-	18.4389	18.4389	-

Tablo 4.1.1'de lineer problem çözümlerinin doğruluğunu kanıtlamak için değerler Eltaher [50] ve Taima [51] değerleri ile karşılaştırılmıştır. Basit-basit mesnetli

kademeli nano kirişin ilk üç temel frekans değeri, Tablo 4.1.1'deki çeşitli yerel olmayan parametre değerleri için diğer nano kiriş değerleri ile karşılaştırıldığında iki çalışma ile de iyi bir uyum gösterdiği görülmüştür.

Bu sonuçlardan yerel olmayan parametrenin artmasıyla frekans değerlerinin azaldığını gözlemlenmektedir. Bu görüşün nano ölçekte çalışan diğer birçok çalışmanın görüşleri ile paralellik gösterdiği görülmektedir [52-53]. Ayrıca $\gamma = 0$ olduğu noktada sonuçların klasik kiriş teorisine denk geldiği hem çalışmamızda hem de literatürdeki çalışmalarda [54] görülmektedir.

Tablo 4.1.2 $\gamma = 0.2$ için farklı kademe yer ve oranlarına karşılık gelen ilk üç temel frekans değerleri

α	γ	η	ω_1	ω_2	ω_3
0.5	**0.2**	**0.1**	3.190	10.480	19.086
		0.2	3.205	10.850	20.373
		0.4	3.425	13.520	25.982
		0.5	3.736	15.966	27.764
		0.6	4.288	18.349	27.770
		0.8	4.609	18.712	35.346
0.8	**0.2**	**0.1**	6.163	18.858	32.706
		0.2	6.211	19.231	33.921
		0.4	6.560	21.235	35.672
		0.5	6.896	21.810	36.133
		0.6	7.329	21.855	37.850
		0.8	8.153	23.187	38.997
2	**0.2**	**0.1**	20.238	50.656	78.613
		0.2	17.109	42.730	75.050
		0.4	11.245	41.521	60.144
		0.5	9.833	36.594	59.881
		0.6	9.022	31.485	56.233
		0.8	8.214	25.245	44.991
3	**0.2**	**0.1**	30.361	67.620	201.381
		0.2	19.329	61.745	197.035
		0.4	10.739	48.784	80.765
		0.5	9.319	38.647	70.601
		0.6	8.623	31.937	59.063
		0.8	8.313	25.441	45.076

Tablo 4.1.2'de kademeli nano kiriş için farklı değerlere karşılık gelen ilk üç mod frekans değerlerini verilmiştir. Doğal frekans değerleri incelendiğinde kademe yerinin anlamlı bir etkiye sahip olduğu ve kademe oranının birden küçük olması durumunda kademe yeri başlangıç noktasından uzaklaştıkça doğal frekansın arttığı, ancak kademe oranı birden büyükse, ters etkiye sahip olduğu görülmektedir.

Tablo 4.1.3 $\eta = 0.4$ kademe konumunda farklı yerel olmayan parametre değerleri ve kademe oranlarına karşılık gelen ilk üç temel frekans değerleri

α	γ	η	ω_1	ω_2	ω_3
0.5	**0**	**0.4**	3.723	18.683	47.711
	0.1		3.642	16.860	37.832
	0.2		3.425	13.520	25.982
	0.3		3.138	10.709	18.923
	0.4		2.835	8.682	14.681
	0.5		2.550	7.234	11.929
0.8	**0**	**0.4**	7.549	32.811	72.084
	0.1		7.260	28.274	54.201
	0.2		6.560	21.235	35.672
	0.3		5.740	16.155	25.557
	0.4		4.981	12.809	19.700
	0.5		4.340	10.536	15.965
2	**0**	**0.4**	13.275	77.050	143.358
	0.1		12.663	60.984	97.443
	0.2		11.245	41.521	60.144
	0.3		9.681	29.922	42.036
	0.4		8.301	23.019	32.018
	0.5		7.174	18.595	25.777
3	**0**	**0.4**	12.218	98.107	205.217
	0.1		11.790	74.056	135.351
	0.2		10.739	48.784	80.765
	0.3		9.486	34.946	55.105
	0.4		8.301	26.931	50.483
	0.5		7.280	21.821	32.703

Tablo 4.1.4 $\alpha = 0.5$ kademe oranında farklı yerel olmayan parametre değerleri ve kademe yerlerine karşılık gelen ilk üç temel frekans değerleri

α	γ	η	ω_1	ω_2	ω_3
0.5	**0**	**0.2**	3.499	14.401	34.034
	0.1		3.418	13.198	28.280
	0.2		3.205	10.850	20.373
	0.3		2.924	8.743	15.183
	0.4		2.632	7.160	11.922
	0.5		2.359	6.002	9.757
0.5	**0**	**0.4**	3.723	18.683	47.711
	0.1		3.642	16.860	37.832
	0.2		3.425	13.520	25.982
	0.3		3.138	10.709	18.922
	0.4		2.835	8.682	14.681
	0.5		2.550	7.234	11.929
0.5	**0**	**0.6**	4.778	27.241	50.684
	0.1		4.581	23.924	40.291
	0.2		4.288	18.349	27.770
	0.3		3.907	14.053	20.238
	0.4		3.514	11.134	15.690
	0.5		3.150	9.128	12.738
0.5	**0**	**0.8**	7.591	27.192	70.363
	0.1		7.330	24.065	53.581
	0.2		6.686	18.712	35.346
	0.3		5.917	14.485	25.180
	0.4		5.187	11.558	19.296
	0.5		4.556	9.523	15.568

Tablo 4.1.3 ve 4.1.4'te kademeli nano kiriş için farklı değerlere karşılık gelen ilk üç mod frekans değerleri verilmiştir. Doğal frekans değerleri incelendiğinde yerel olmayan parametre değerinin artması doğal frekans değerlerinin azalmasına neden olduğu görülmektedir. Bu durumdan yola çıkarak yerel olmayan parametre değeri arttıkça malzemenin rijitliğinde bir azalma olduğu sonucuna varılabilmektedir.

Tablo 4.1.5 $\alpha = 0.8$ kademe oranında farklı yerel olmayan parametre değerleri ve kademe yerlerine karşılık gelen ilk üç temel frekans değerleri

α	γ	η	ω_1	ω_2	ω_3
0.8	**0.2**	**0.1**	6.163	18.858	32.706
		0.2	6.211	19.321	33.921
		0.4	6.335	20.216	35.324
		0.5	6.896	21.810	36.133
		0.6	7.329	21.855	37.850
		0.8	8.153	23.187	38.997
0.8	**0.4**	**0.1**	4.699	11.530	18.224
		0.2	4.735	11.795	18.851
		0.4	4.981	12.809	19.700
		0.5	5.211	13.092	19.965
		0.6	5.499	13.117	20.840
		0.8	6.023	13.880	21.420
0.8	**0.6**	**0.1**	3.606	8.065	12.431
		0.2	3.633	8.246	12.850
		0.4	3.815	8.919	13.999
		0.5	3.980	9.097	13.588
		0.6	4.183	9.113	14.173
		0.8	4.544	9.647	14.556
0.8	**0.8**	**0.1**	2.873	9.401	12.649
		0.2	2.895	9.715	13.111
		0.4	3.036	10.120	13.508
		0.5	3.163	10.266	14.013
		0.6	3.318	10.706	14.095
		0.8	3.589	10.992	14.851

Tablo 4.1.5'te verilen doğal frekans değerleri incelediğinde, tablo 4.1.2'de olduğu gibi kademe oranı bir den küçük seçildiği için kademe yeri başlangıç noktasından uzaklaştıkça doğal frekans değerlerinin arttığı görülmektedir. Ayrıca tablo 4.1.3 ve 4.1.4'e paralel olarak yerel olmayan parametre değerinin artması doğal frekansı azalttığı görülmektedir.

Bir sistemin doğal frekansını (Sönümsüz serbest titreşim hareket denklemi $m\ddot{x} + kx = 0$) kütlesi ve rijitliği belirler. Eğer kütle sabitse rijitlik arttıkça doğal frekans

değeri artar. Bu bilgi ışığında tablo sonuçları göz önüne alındığında kademe oranının bir den uzaklaşması kirişin rijitliğini azalttığı görüşünü ön plana çıkarmaktadır.

4.2.Kademeli Nano Kirişe ait Nonlineer Titreşim Durumu için Sayısal Çözümler

Perturbasyon açılımında ε Mertebesi çözümünde, kademeli nano kirişe ait nonlineer etkiler lineer hareket denklemlerine düzeltme terimleri olarak ortaya çıkmaktadır. Tablo 4.2.1'de, kademeli nano kiriş için farklı değerlere karşılık gelen ilk üç mod frekans değerleri ve bu frekans değerlerine karşılık gelen nonlineer düzeltme terimleri (λ) verilmiştir.

Tablo 4.2.1 Kademeli nano kiriş için farklı değerlere karşılık gelen ilk üç mod temel frekans değeri ve nonlineer terimlerin doğal frekansa katkıları

α	γ	η	ω_1	ω_2	ω_3	λ_1	λ_2	λ_3
0.8	**0.2**	**0.1**	6.163	18.858	32.706	3.4512	59.1682	216.2080
		0.2	6.211	19.321	33.921	3.1673	37.9541	113.0760
		0.4	6.335	20.216	35.324	2.3423	25.0465	82.5894
		0.5	6.896	21.810	36.133	1.9455	22.5023	91.1681
		0.6	7.329	21.855	37.850	1.8428	24.9271	82.7419
		0.8	8.153	23.187	38.997	2.2490	22.5535	88.0722
0.8	**0.4**	**0.1**	4.699	11.530	18.224	6.6566	55.7353	200.8910
		0.2	4.735	11.795	18.851	6.5842	50.6203	183.7060
		0.4	4.981	12.809	19.700	5.7198	49.4323	169.5430
		0.5	5.211	13.092	19.965	5.2803	51.6730	189.6520
		0.6	5.499	13.117	20.840	4.9919	53.6805	194.1390
		0.8	6.023	13.880	21.420	4.8670	52.1893	178.1560
0.8	**0.6**	**0.1**	3.606	8.065	12.431	10.3431	82.1774	292.2420
		0.2	3.633	8.246	12.850	10.4380	79.9969	283.9390
		0.4	3.815	8.919	13.999	9.7856	81.3550	248.6709
		0.5	3.980	9.097	13.588	9.3184	79.6889	288.1860
		0.6	4.183	9.113	14.173	8.8525	81.1249	300.5930
		0.8	4.544	9.647	14.556	7.8589	81.6600	258.0110
0.8	**0.8**	**0.1**	2.873	9.401	12.649	14.1066	389.4140	914.1200
		0.2	2.895	9.715	13.111	14.3353	385.4550	854.7980
		0.4	3.036	10.120	13.508	13.9181	309.0800	959.3030
		0.5	3.163	10.266	14.013	13.4697	383.9580	673.6520
		0.6	3.318	10.706	14.095	12.8426	404.4100	590.7230
		0.8	6.023	13.880	21.420	4.8670	52.1893	178.1560

Tablo 4.2.2 Kademeli nano kiriş için farklı değerlere karşılık gelen ilk üç mod temel frekans değeri ve nonlineer terimlerin doğal frekansa katkıları

α	γ	η	ω_1	ω_2	ω_3	λ_1
0.5	**0.2**	**0.1**	3.190	10.480	19.086	50.6257
		0.2	3.205	10.850	20.373	49.5054
		0.4	3.425	13.520	25.982	34.8064
		0.5	3.736	15.966	27.764	29.0513
		0.6	4.288	18.349	27.770	25.1905
		0.8	4.609	18.712	35.346	15.5401
0.8	**0.2**	**0.1**	6.163	18.858	32.706	3.4512
		0.2	6.211	19.231	33.921	3.1673
		0.4	6.560	21.235	35.672	2.2448
		0.5	6.896	21.810	36.133	1.9455
		0.6	7.329	21.855	37.850	1.8428
		0.8	8.153	23.187	38.997	2.2490
2	**0.2**	**0.1**	20.238	50.656	78.613	4806.6
		0.2	17.109	42.730	75.050	1421.7
		0.4	11.245	41.521	60.144	114.4
		0.5	9.833	36.594	59.881	41.6
		0.6	9.022	31.485	56.233	18.2
		0.8	8.214	25.245	44.991	6.1
3	**0.2**	**0.1**	30.361	67.620	201.381	58621.3
		0.2	19.329	61.745	197.035	5070.5
		0.4	10.739	48.784	80.765	261.5
		0.5	9.319	38.647	70.601	88.6
		0.6	8.623	31.937	59.063	37.2
		0.8	8.313	25.441	45.076	13.2

Tablo 4.2.1'de, kademeli nano kirişte kademe yeri soldan sağa değiştikçe, kademe oranlarından bağımsız olarak nonlineer terimlerin tabi frekansa katkılarının azaldığı görülebilmektedir.

Tablo 4.2.2 , 4.2.3 ve 4.2.4'te kademeli nano kiriş için farklı değerlere karşılık gelen birinci mod temel frekans değerlerine nonlineer terimlerden gelen λ düzeltme katkıları verilmiştir.

Tablo 4.2.3 Kademeli nano kiriş için farklı değerlere karşılık gelen ilk üç mod temel frekans değeri ve nonlineer terimlerin doğal frekansa katkıları

α	γ	η	ω_1	ω_2	ω_3	λ_1
0.5	**0**	**0.4**	3.723	18.683	47.711	2.7348
	0.1		3.642	16.860	37.832	12.7482
	0.2		3.425	13.520	25.982	34.8064
	0.3		3.138	10.709	18.923	58.6772
	0.4		2.835	8.682	14.681	85.2522
	0.5		2.550	7.234	11.929	102.5840
0.8	**0**	**0.4**	7.549	32.811	72.084	0.7481
	0.1		7.260	28.274	54.201	1.1445
	0.2		6.560	21.235	35.672	2.2448
	0.3		5.740	16.155	25.557	3.8416
	0.4		4.981	12.809	19.700	5.7198
	0.5		4.340	10.536	15.965	7.7284
2	**0**	**0.4**	13.275	77.050	143.358	1915.3
	0.1		12.663	60.984	97.443	447.5
	0.2		11.245	41.521	60.144	114.4
	0.3		9.681	29.922	42.036	45.6
	0.4		8.301	23.019	32.018	24.2
	0.5		7.174	18.595	25.777	15.5
3	**0**	**0.4**	12.218	98.107	205.217	7991.0
	0.1		11.790	74.056	135.351	1178.0
	0.2		10.739	48.784	80.765	261.5
	0.3		9.486	34.946	55.105	92.1
	0.4		8.301	26.931	50.483	43.0
	0.5		7.280	21.821	32.703	24.5

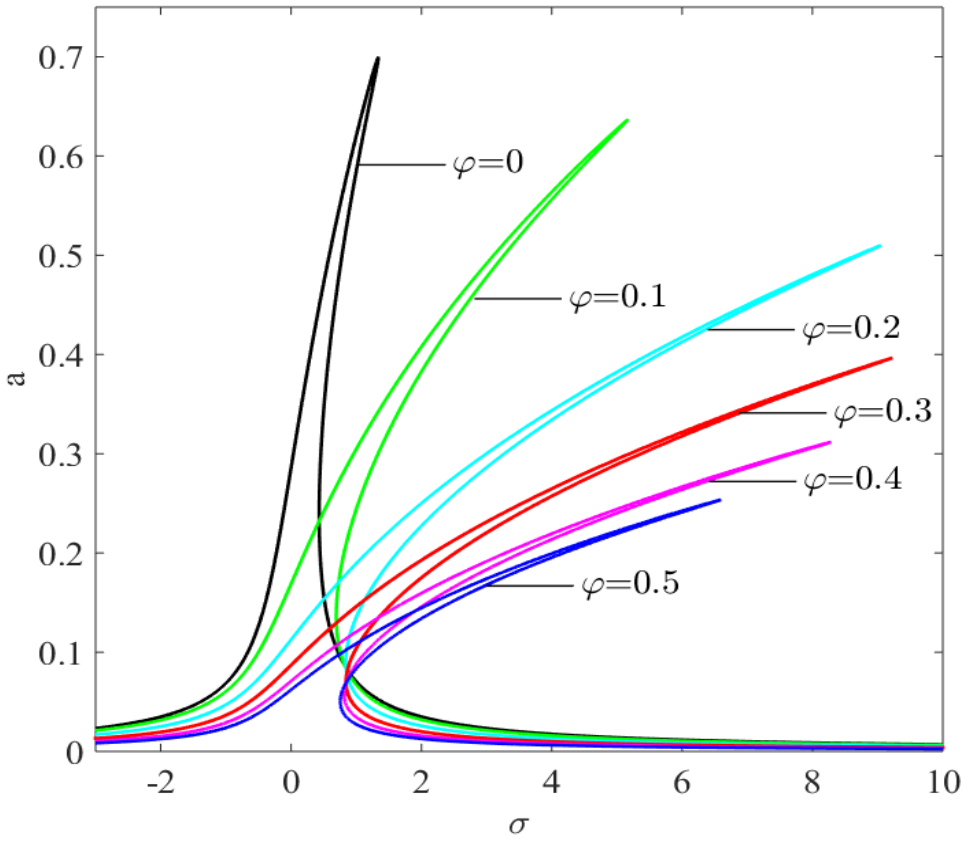
Düzeltme miktarları her durum için farklı değişimler göstermektedir. Tablo 4.2.2 ve 4.2.3'te kademe oranı birden küçük olduğu durumlarda kademe yeri başlangıç noktasından uzaklaştıkça (Tablo 4.2.2) ve yerel olmayan parametre değeri arttıkça (Tablo 4.2.3) düzeltme katkılarının arttığı, aksi durumda düzeltme miktarının azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.2.4 Kademeli nano kiriş için farklı değerlere karşılık gelen ilk üç mod temel frekans değerler ve nonlineer terimlerin doğal frekansa katkıları

α	γ	η	ω_1	ω_2	ω_3	λ_1
0.5	**0**	**0.2**	3.499	14.401	34.034	7.1442
	0.1		3.418	13.198	28.280	22.3054
	0.2		3.205	10.850	20.373	49.5054
	0.3		2.924	8.743	15.183	73.8113
	0.4		2.632	7.160	11.922	94.9288
	0.5		2.359	6.002	9.757	114.6200
0.5	**0**	**0.4**	3.723	18.683	47.711	2.7354
	0.1		3.642	16.860	37.832	12.7482
	0.2		3.425	13.520	25.982	34.8064
	0.3		3.138	10.709	18.922	58.6772
	0.4		2.835	8.682	14.681	81.2522
	0.5		2.550	7.234	11.929	102.5840
0.5	**0**	**0.6**	4.778	27.241	50.684	0.7245
	0.1		4.581	23.924	40.291	7.4247
	0.2		4.288	18.349	27.770	25.1905
	0.3		3.907	14.053	20.238	49.4636
	0.4		3.514	11.134	15.690	76.6364
	0.5		3.150	9.128	12.738	104.7910
0.5	**0**	**0.8**	7.591	27.192	70.363	0.2625
	0.1		7.330	24.065	53.581	5.2349
	0.2		6.686	18.712	35.346	20.2082
	0.3		5.917	14.485	25.180	44.6068
	0.4		5.187	11.558	19.296	76.6892
	0.5		4.556	9.523	15.568	114.1600

Tablo 4.2.4'te de yerel olmayan parametre değeri arttıkça düzeltme miktarında artış görülmektedir. Fakat parametre değeri arttıkça düzeltme terimindeki artış oranının azaldığı da görülmektedir.

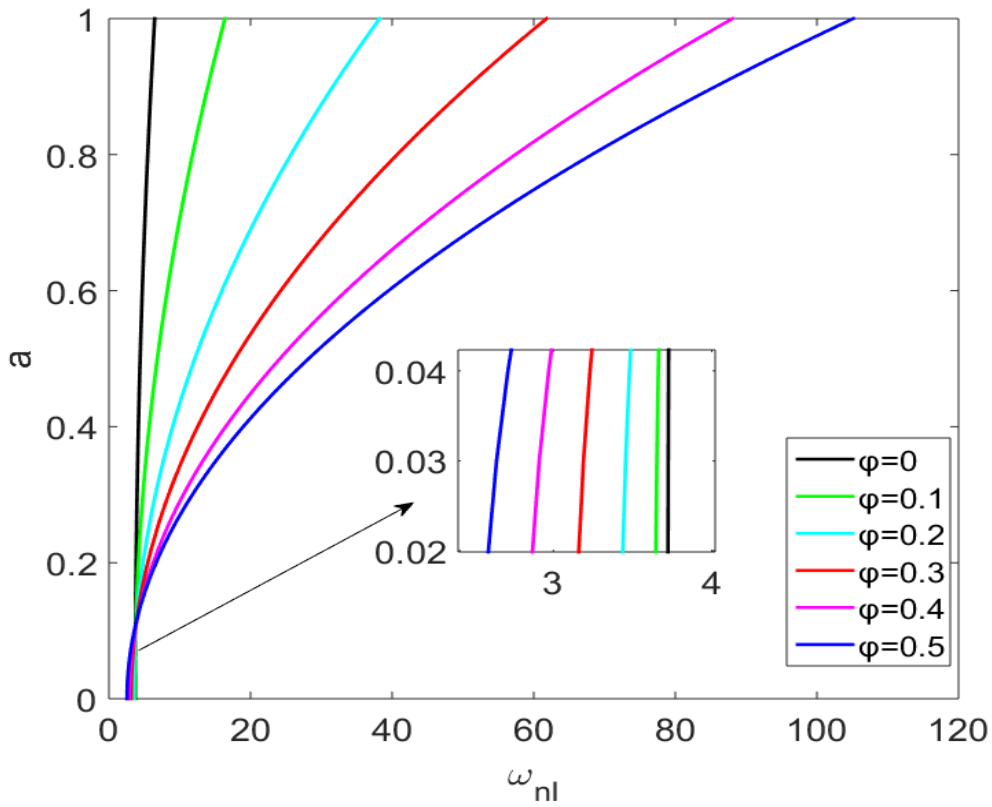
Kademeli nano kirişin nonlineer frekans – genlik eğrileri ve frekans- tepki eğrileri şekil 4.2.1 - 4.2.24'te verilmiştir. Grafik çizimlerinde zorlama kuvvet katsayısı $f = 1$ ve sönüm katsayısı $\mu = 0.1$ alınmıştır.



Şekil 4.2.1 Farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen frekans-tepki eğrisi ($\alpha = 0.5$, $\eta = 0.4$)

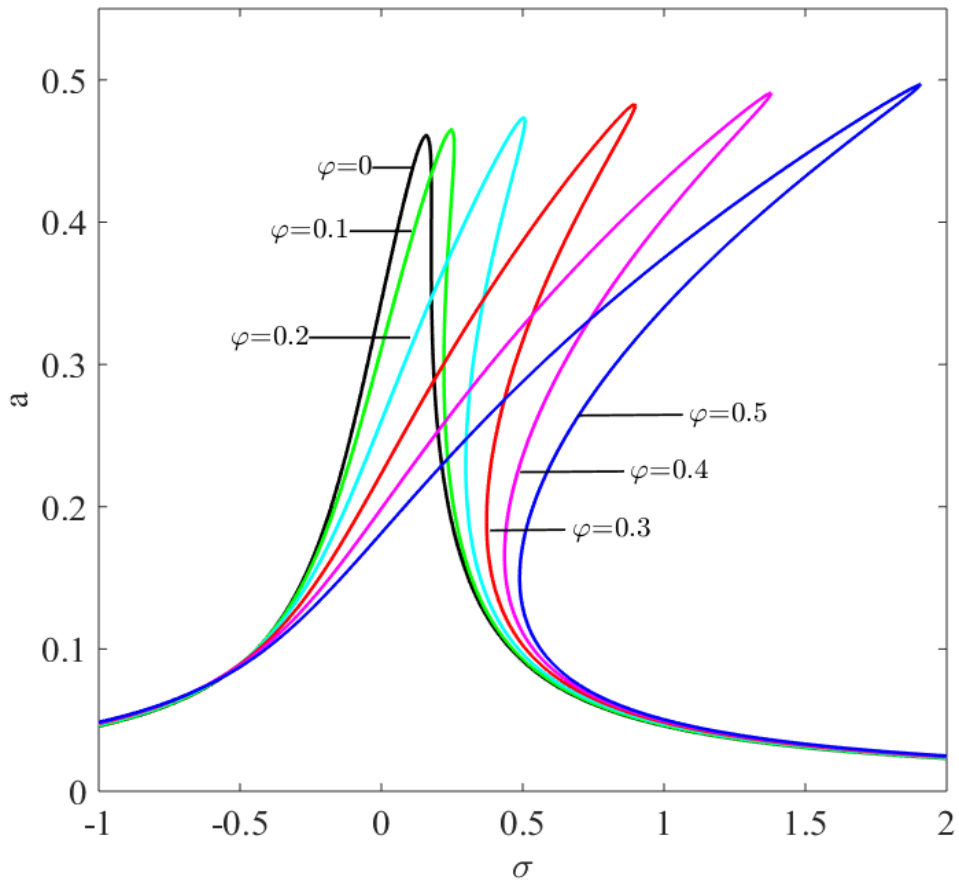
Zorlama frekansındaki değişimi ifade eden ayar parametresi $\sigma < 0$ olduğunda genlik artar, $\sigma > 0$ olduğunda ise genlik azalır ve frekans – tepki eğrisi bu şekilde açığa çıkar. Eğrinin dik olması sistemde nonlineer etkinin olmadığı, sola yatık olması nonlineer etkinin yumuşatıcı davranış sergilediği, sağa doğru yatması ise nonlineer etkinin sertleştirici davranış sergilediği anlamına gelmektedir [1].

Şekil 4.2.1'de $\alpha = 0.5$, $\eta = 0.4$ şartlarında farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen zorlama frekansındaki değişimlerin titreşim genliğine etkilerini gösteren grafik görülmektedir. Grafik incelendiğinde, yerel olmayan parametre değeri arttıkça genliğin azaldığı ve nonlineer etkinin artarak sertleştirici davranış sergilediği görülmektedir.



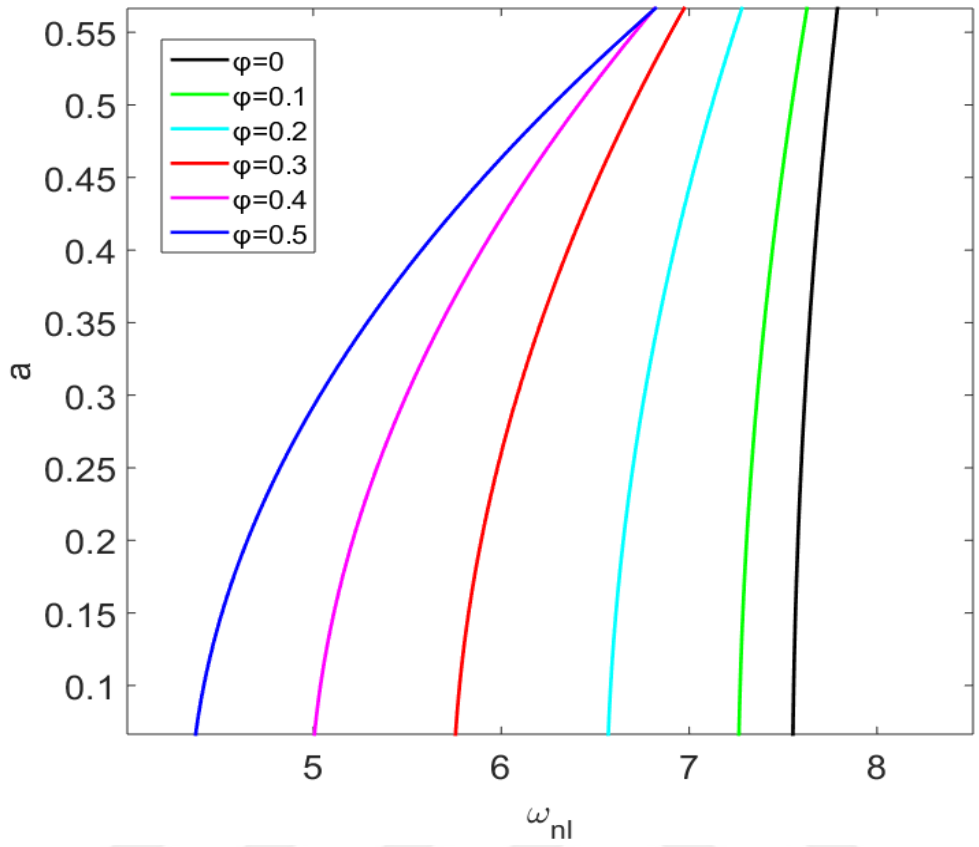
Şekil 4.2.2 Farklı yerel olmayan parametre değerleri için nonlineer frekans – genlik eğrileri ($\alpha = 0.5$, $\eta = 0.4$)

Şekil 4.2.2'de $\alpha = 0.5$, $\eta = 0.4$ şartlarında farklı yerel olmayan parametre değerleri için nonlineer frekansa karşı titreşim genliği arasındaki ilişkiyi gösteren grafik verilmiştir. Grafikte yerel olmayan parametre değeri arttıkça genlikle beraber nonlineeriteden gelen düzeltmenin de arttığı görülmektedir. Bu artış nonlineer frekans değerinin de genlik büyüdükçe artmasına sebep olmaktadır.



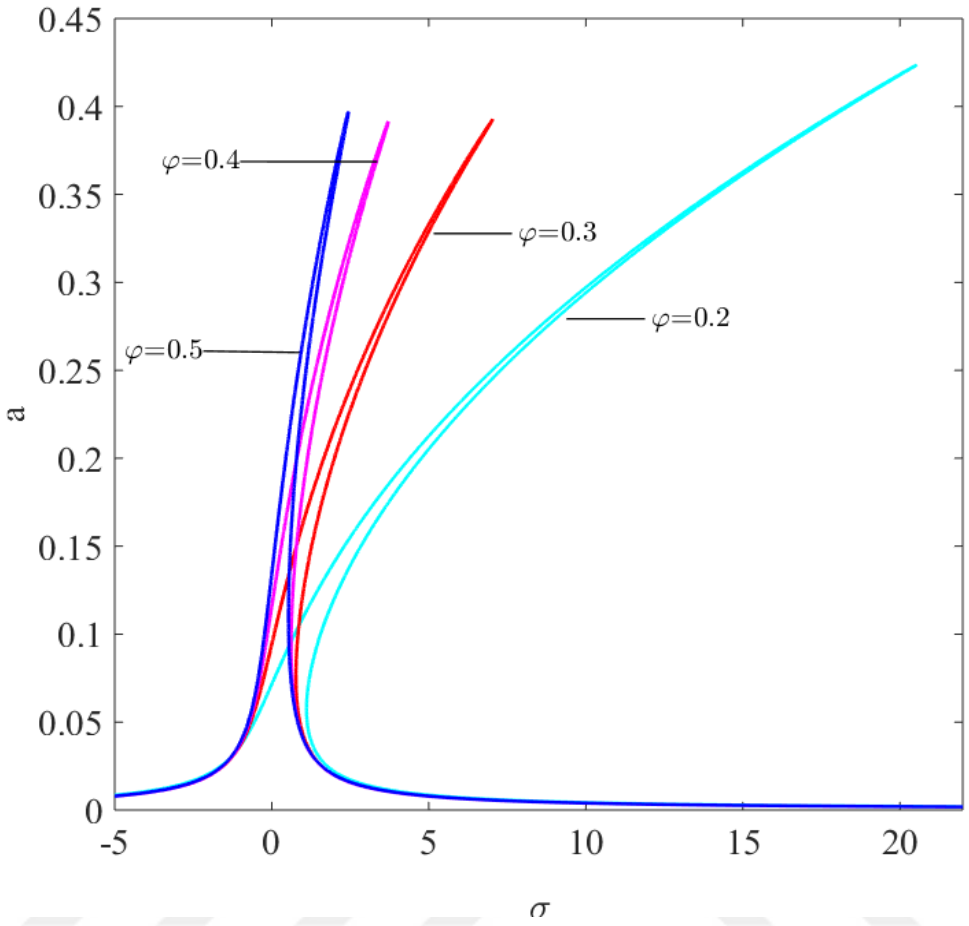
Şekil 4.2.3 Farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen için frekans-tepki eğrisi ($\alpha = 0.8,\ \eta = 0.4$)

Şekil 4.2.3'te $\alpha = 0.8$, $\eta = 0.4$ şartlarında farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen zorlama frekansındaki değişimlere bağlı olarak titreşim genliği grafiği görülmektedir. Grafikte Şekil 4.2.1'e benzer olarak yerel olmayan parametre değeri arttıkça grafik daha fazla sağa yatarak nonlineerite etkisinin sertleştirici davranışını artırdığı görülmektedir. Fakat zorlama frekansı değerindeki değişimin Şekil 4.2.1'e göre daha az olduğu görülmektedir.



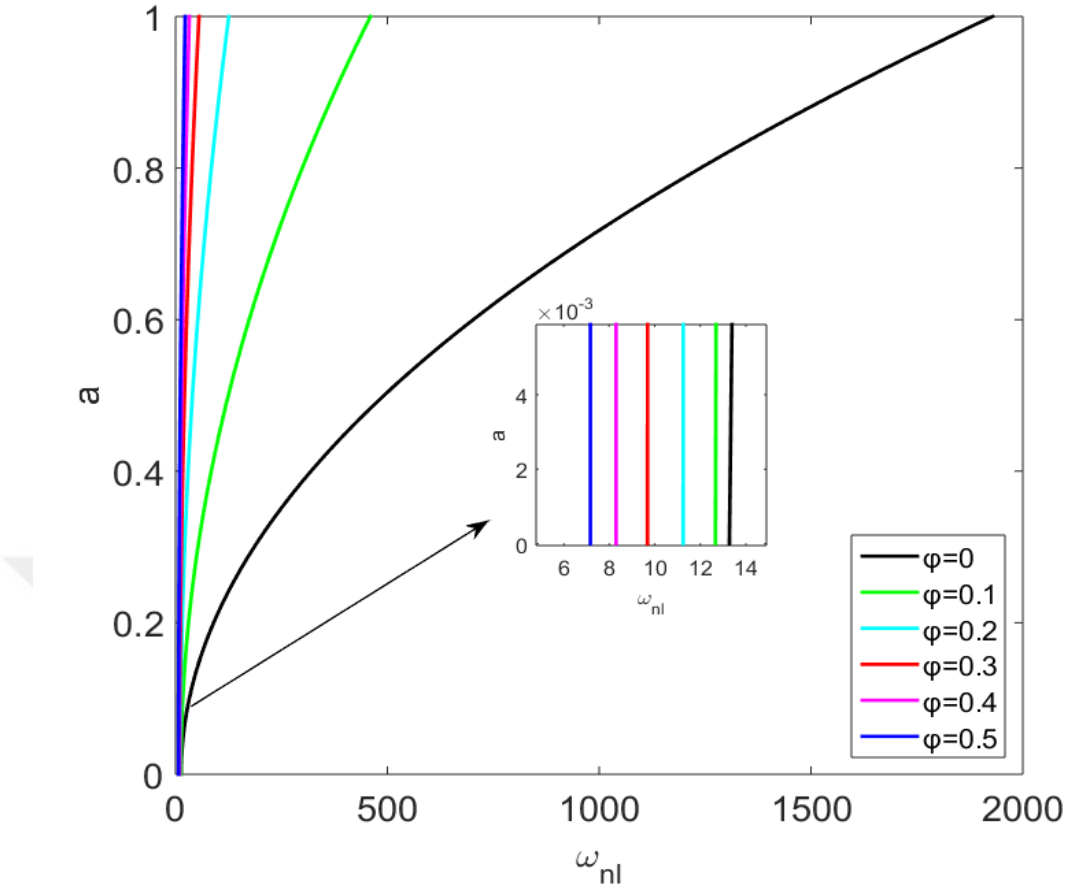
Şekil 4.2.4 Farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen nonlineer frekans – genlik eğrileri ($\alpha = 0.8$, $\eta = 0.4$)

Şekil 4.2.4'te $\alpha = 0.8$, $\eta = 0.4$ şartlarında farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen nonlineer frekansa karşı titreşim genlik grafiği görülmektedir. Grafikte yerel olmayan parametre değeri arttıkça genlikle beraber nonlineeriteden gelen düzeltmenin de arttığı görülmektedir.



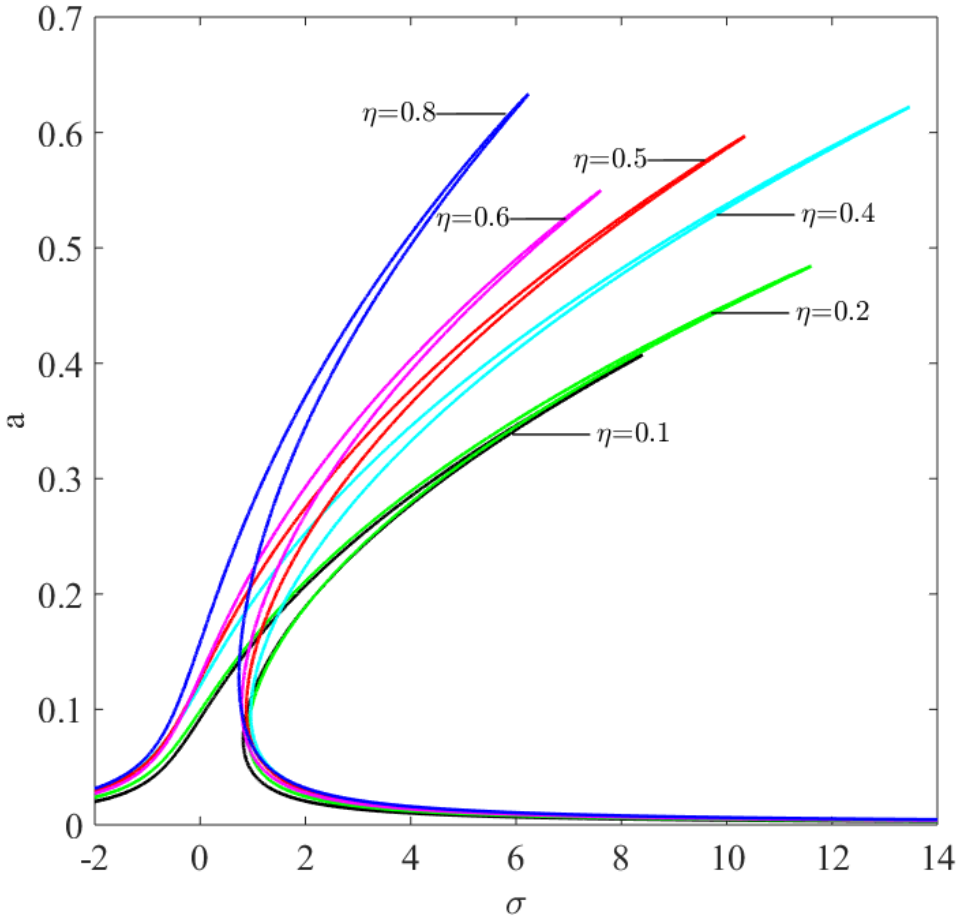
Şekil 4.2.5 Farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen frekans- tepki eğrisi ($\alpha = 2$, $\eta = 0.4$)

Şekil 4.2.5'te $\alpha = 2$, $\eta = 0.4$ şartlarında farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen zorlama frekansındaki değişimlere bağlı olarak titreşim genliği grafiği verilmiştir. Grafikte Şekil 4.2.1 ve 4.2.3'ün tersine yerel olmayan parametre değeri arttıkça grafik daha az sağa yatarak nonlineeritenin sertleştirici etkisinin azaldığı görülmektedir. Bu durum kademe oranının sistemin nonlineeritesine anlamlı etkilerinin olduğunu göstermektedir.



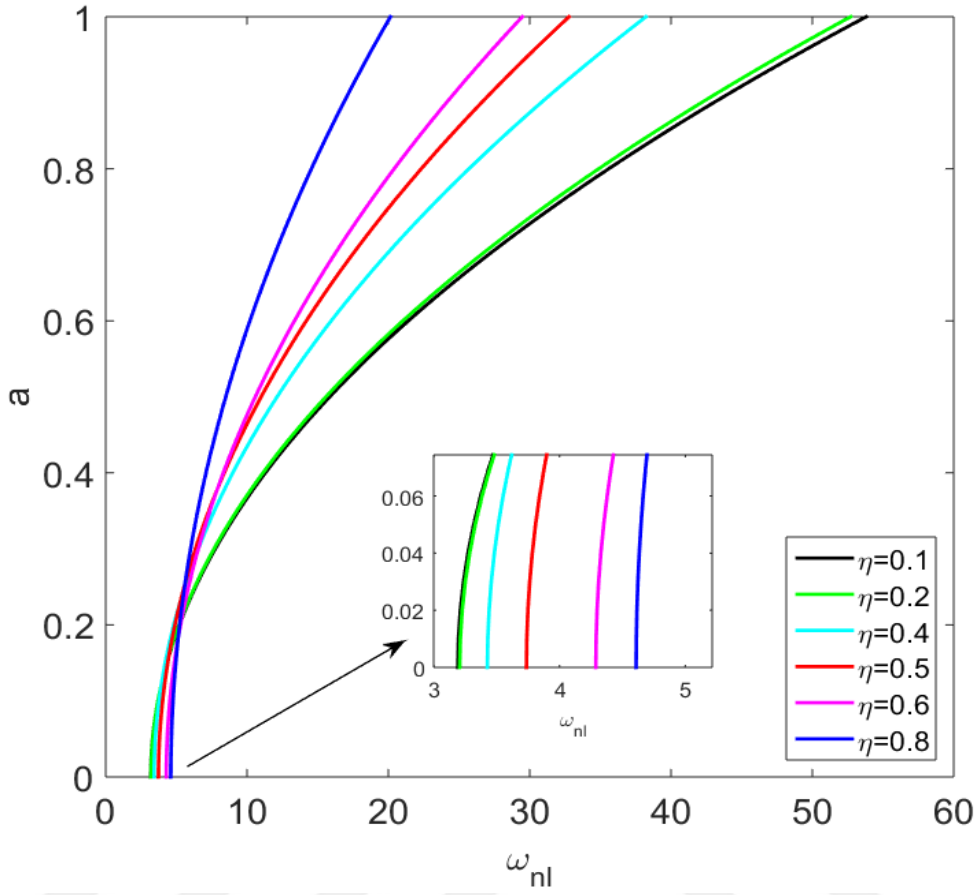
Şekil 4.2.6 Farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen nonlineer frekans – genlik eğrileri ($\alpha = 2$, $\eta = 0.4$)

Şekil 4.2.6'da $\alpha = 2$, $\eta = 0.4$ şartlarında farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen nonlineer frekansa karşı titreşim genlik grafiği görülmektedir. Grafikte Şekil 4.2.2 ve 4.2.4'ün tersine yerel olmayan parametre değeri arttıkça genlikle beraber nonlineeriteden gelen düzeltmenin de azaldığı görülmektedir.



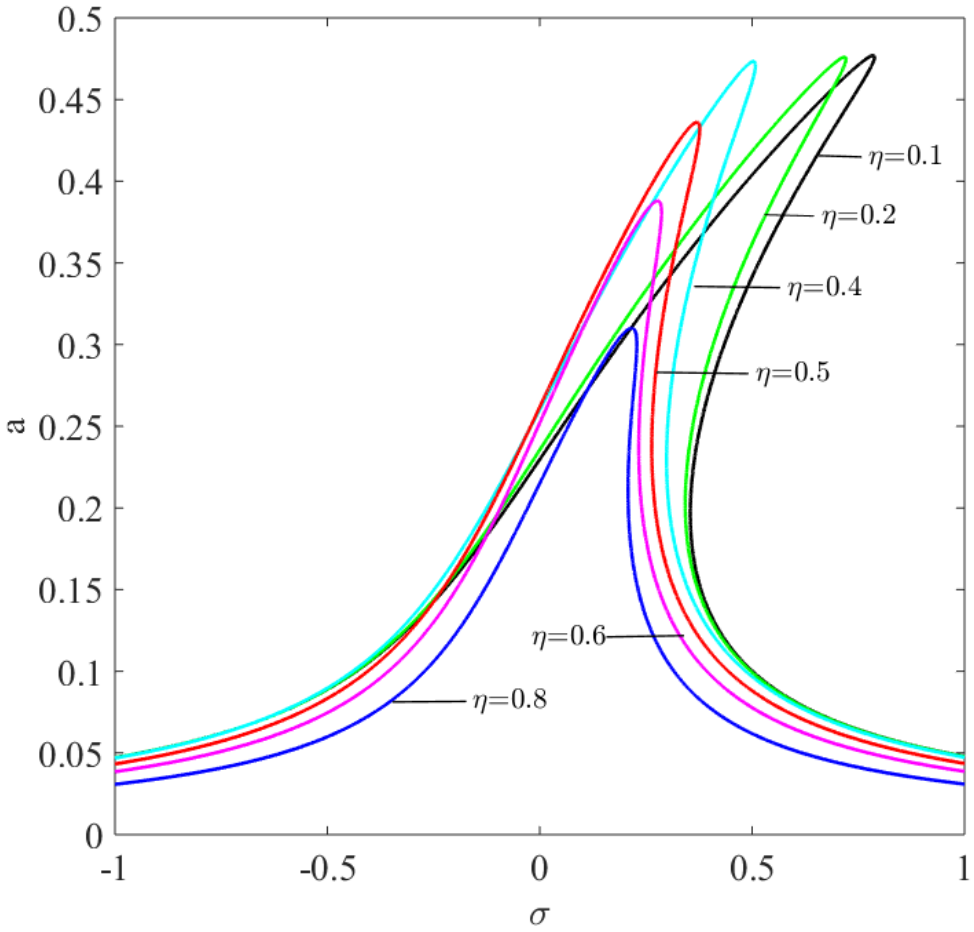
Şekil 4.2.7 Farklı kademe yerleri için frekans-tepki eğrisi ($\alpha = 0.5,\ \gamma = 0.2$)

Şekil 4.2.7'de $\alpha = 0.5,\ \gamma = 0.2$ şartlarında farklı kademe yeri değerleri için zorlama frekansındaki değişimlere bağlı olarak titreşim genliği grafiği verilmiştir. Grafik incelendiğinde kademe yeri başlangıç noktasından uzaklaştıkça grafik daha az sağa yatarak nonlineerite etkisinin sertleştirici davranışında azalma olduğu gözlemlenmektedir.



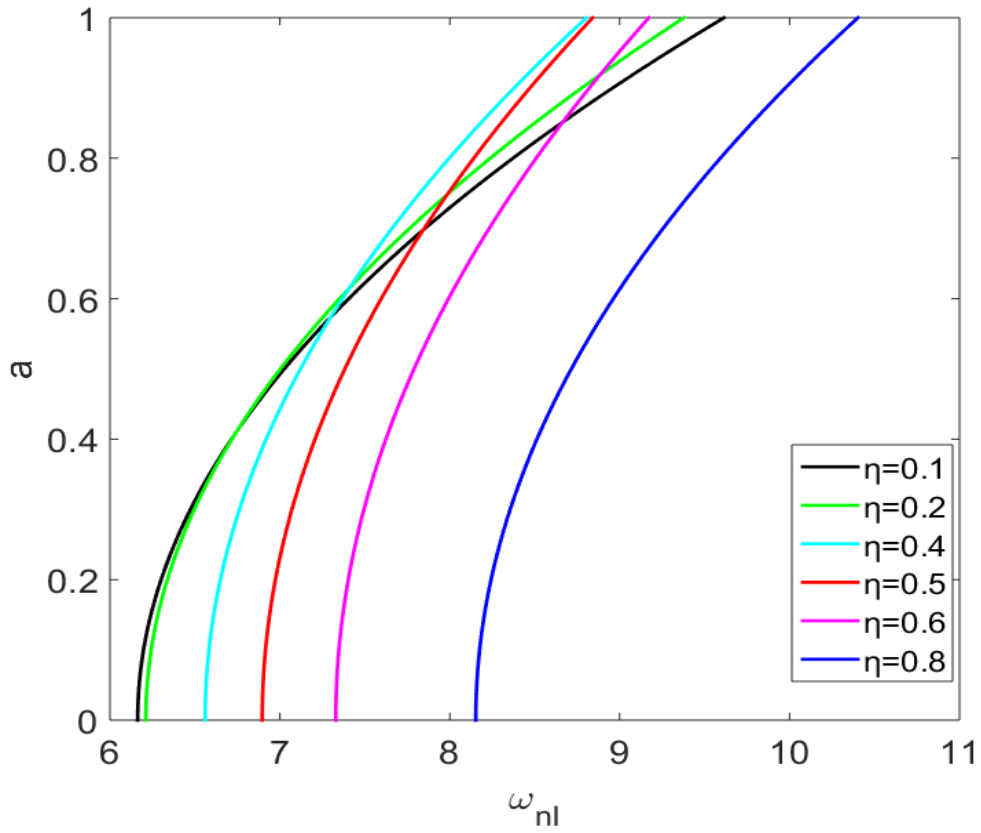
Şekil 4.2.8 Farklı kademe yerlerine karşılık gelen nonlineer frekans – genlik eğrileri ($\alpha = 0.5$, $\gamma = 0.2$)

Şekil 4.2.8'de $\alpha = 0.5,\ \gamma = 0.2$ şartlarında farklı kademe yeri değerleri için nonlineer frekansa karşı titreşim genlik grafiği görülmektedir. Grafikte kademe yeri başlangıç noktasına yaklaştıkça genlikle beraber nonlineeriteden gelen düzeltmenin de arttığı görülmektedir.



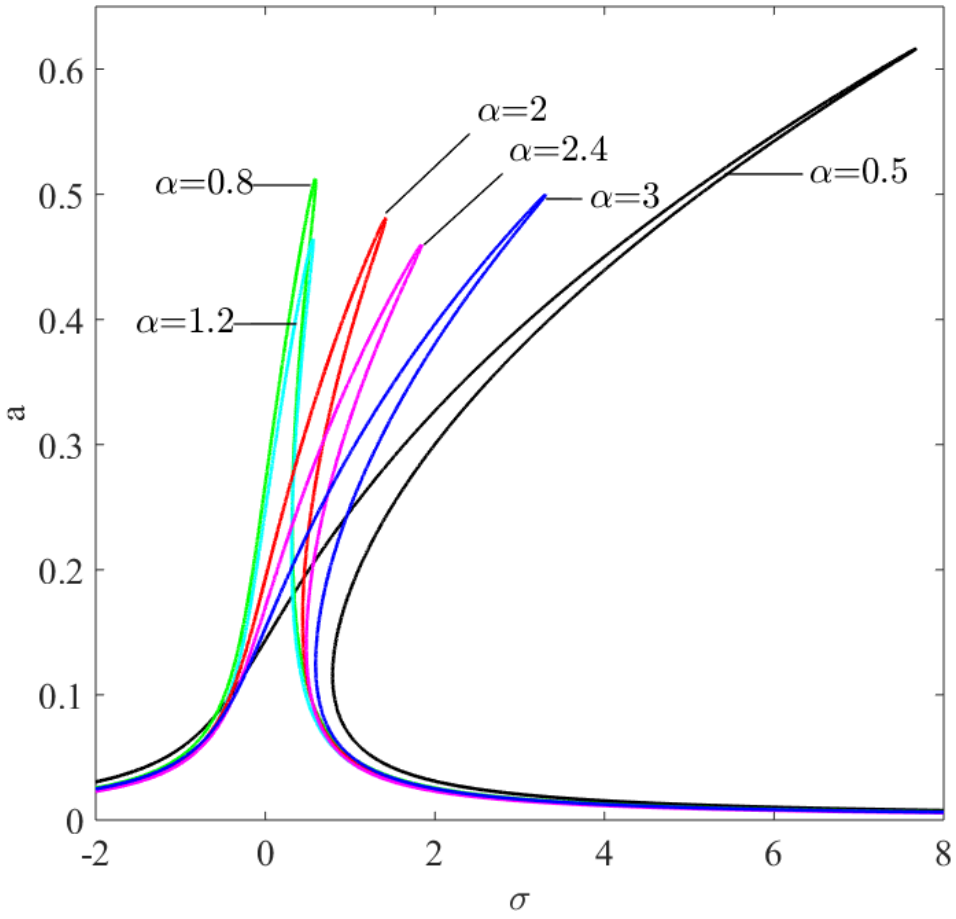
Şekil 4.2.9 Farklı kademe yerleri için frekans- tepki eğrisi ($\alpha = 0.8,\ \gamma = 0.2$)

Şekil 4.2.9'da $\alpha = 0.8,\ \gamma = 0.2$ şartlarında farklı kademe yeri değerleri için zorlama frekansındaki değişimlere bağlı olarak titreşim genliği grafiği verilmiştir. Grafik incelendiğinde Şekilde 4.2.7 ile benzer olarak kademe yeri başlangıç noktasından uzaklaştıkça grafik daha az sağa yatarak nonlineeritenin sertleştirici etkisinin azaldığı gözlemlenmektedir. Ayrıca kademe yeri başlangıç noktasından uzaklaştıkça genliğin de azaldığı görülmektedir.



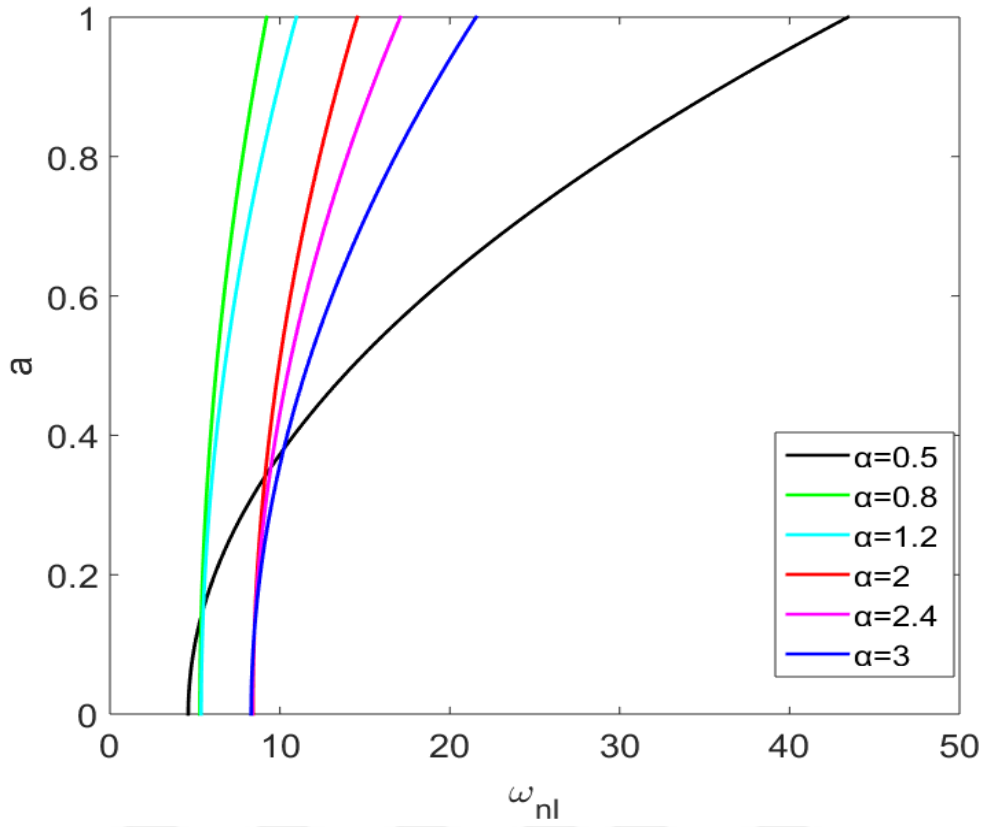
Şekil 4.2.10 Farklı kademe yerlerine karşılık gelen nonlineer frekans – genlik eğrileri ($\alpha = 0.8$, $\gamma = 0.2$)

Şekil 4.2.10'da $\alpha = 0.8$, $\gamma = 0.2$ şartlarında farklı kademe yeri değerleri için nonlineer frekansa karşı titreşim genlik grafiği görülmektedir. Grafikte Şekil 4.2.8'de olduğu gibi kademe yeri başlangıç noktasına yaklaştıkça genlikle beraber nonlineeriteden gelen düzeltmenin de arttığı görülmektedir.



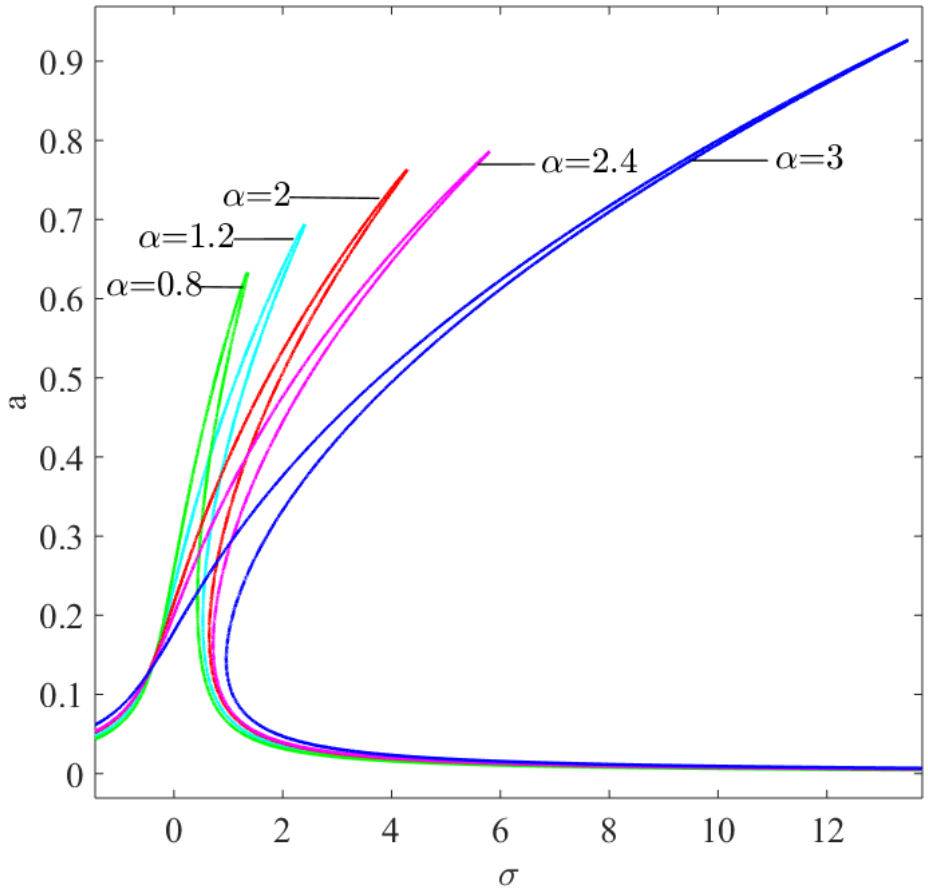
Şekil 4.2.11 Farklı kademe oranları için frekans- tepki eğrisi ($\eta = 0.8$, $\gamma = 0.2$)

Şekil 4.2.11'de $\eta = 0.8$, $\gamma = 0.2$ şartlarında farklı kademelerin yarıçap oranları için zorlama frekansındaki değişimlere bağlı olarak titreşim genliği grafiği verilmiştir. Grafik incelendiğinde kademelerin yarıçap oranı arttıkça grafik daha fazla sağa yatarak nonlineeritenin sertleştirici etkisinin arttığı görülmektedir. Fakat oran 1'e yaklaştıkça nonlineeritenin azaldığı gözlemlenmektedir.



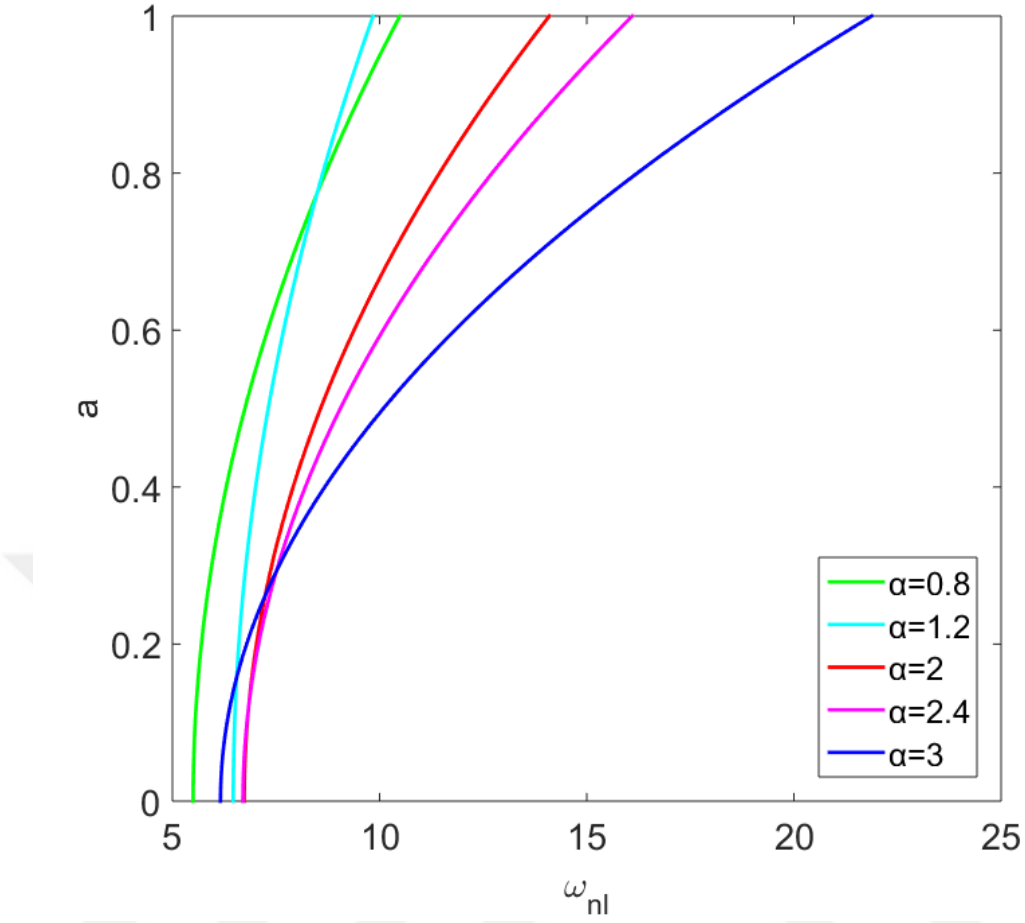
Şekil 4.2.12 Farklı kademe oranlarına karşılık gelen nonlineer frekans – genlik eğrileri ($\eta = 0.8$, $\gamma = 0.2$)

Şekil 4.2.12'de $\eta = 0.8$, $\gamma = 0.2$ şartlarında farklı kademelerin yarıçap oranları için nonlineer frekansa karşı titreşim genlik grafiği görülmektedir. Grafikte kademelerin yarıçap oranı arttıkça genlikle beraber nonlineeriteden gelen düzeltmenin de arttığı görülmektedir.



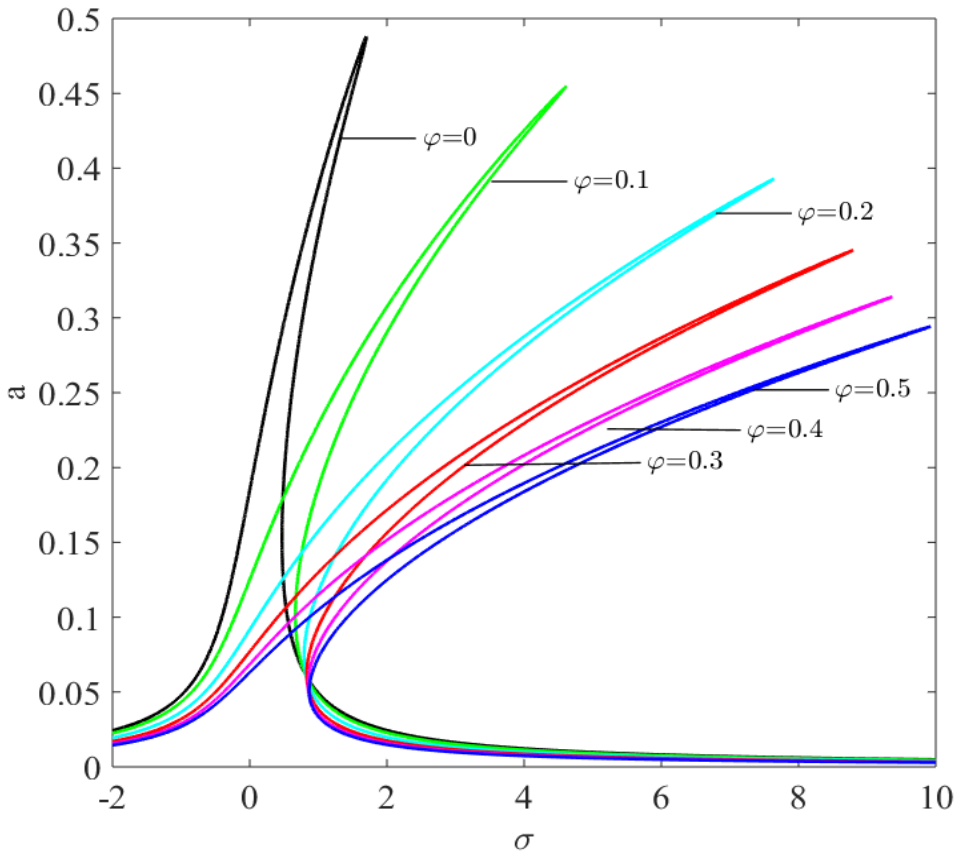
Şekil 4.2.13 Farklı kademe oranları için frekans- tepki eğrisi ($\eta = 0.6$, $\gamma = 0.2$)

Şekil 4.2.13'te $\eta = 0.6$, $\gamma = 0.2$ şartlarında farklı kademelerin yarıçap oranları için zorlama frekansındaki değişimlere bağlı olarak titreşim genliği grafiği verilmiştir. Grafik incelendiğinde kademelerin yarıçap oranı arttıkça nonlineeritenin sertleştirici etkisinin arttığı gözlemlenmektedir. Ayrıca kademe oranı arttıkça genliğin de arttığı görülmektedir.



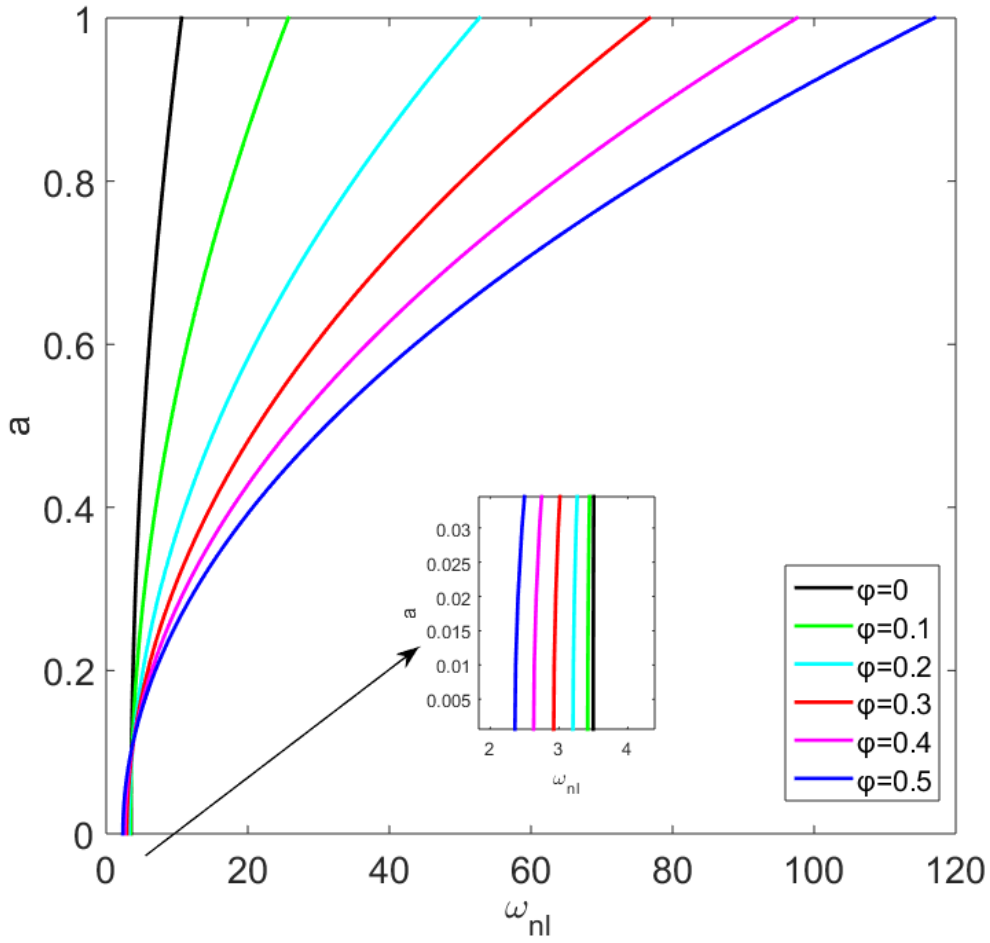
Şekil 4.2.14 Farklı kademe oranlarına karşılık gelen nonlineer frekans – genlik eğrileri ($\eta = 0.6$, $\gamma = 0.2$)

Şekil 4.2.14'te $\eta = 0.6$, $\gamma = 0.2$ şartlarında farklı kademelerin yarıçap oranları için nonlineer frekansa karşı titreşim genlik grafiği görülmektedir. Grafikte kademelerin yarıçap oranı arttıkça genlikle beraber nonlineeriteden gelen düzeltmenin de arttığı görülmektedir.



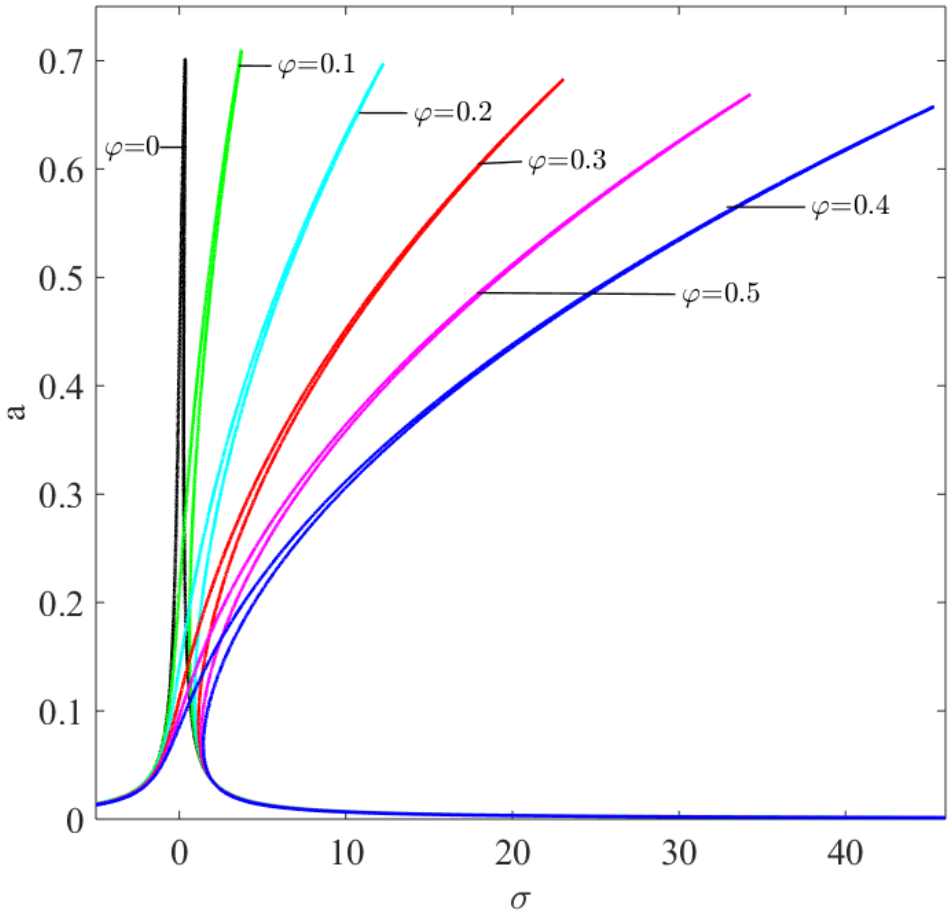
Şekil 4.2.15 Farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen frekans- tepki eğrisi ($\alpha = 0.5,\ \eta = 0.2$)

Şekil 4.2.15'te $\alpha = 0.5,\ \eta = 0.2$ şartlarında farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen zorlama frekansındaki değişimlere bağlı olarak titreşim genliği grafiği verilmiştir. Grafik incelendiğinde yerel olmayan parametre değerleri arttıkça nonlineeritenin sertleştirici etkisinin arttığı görülmektedir. Fakat yerel olmayan parametre değerleri arttıkça genliğin azaldığı gözlemlenmektedir.



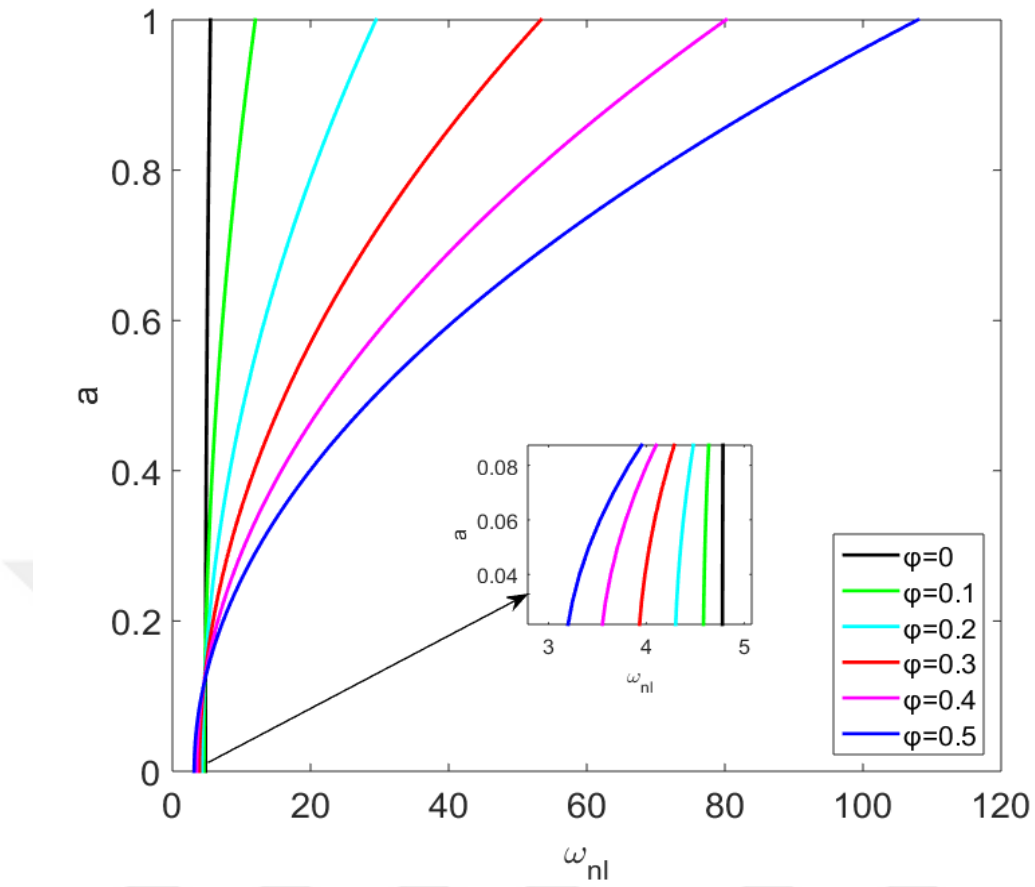
Şekil 4.2.16 Farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen nonlineer frekans – genlik eğrileri ($\alpha = 0.5$, $\eta = 0.2$)

Şekil 4.2.16'da $\alpha = 0.5$, $\eta = 0.2$ şartlarında farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen nonlineer frekansa karşı titreşim genlik grafiği görülmektedir. Grafikte yerel olmayan parametre değeri arttıkça genlikle beraber nonlineeriteden gelen düzeltmenin de arttığı görülmektedir.



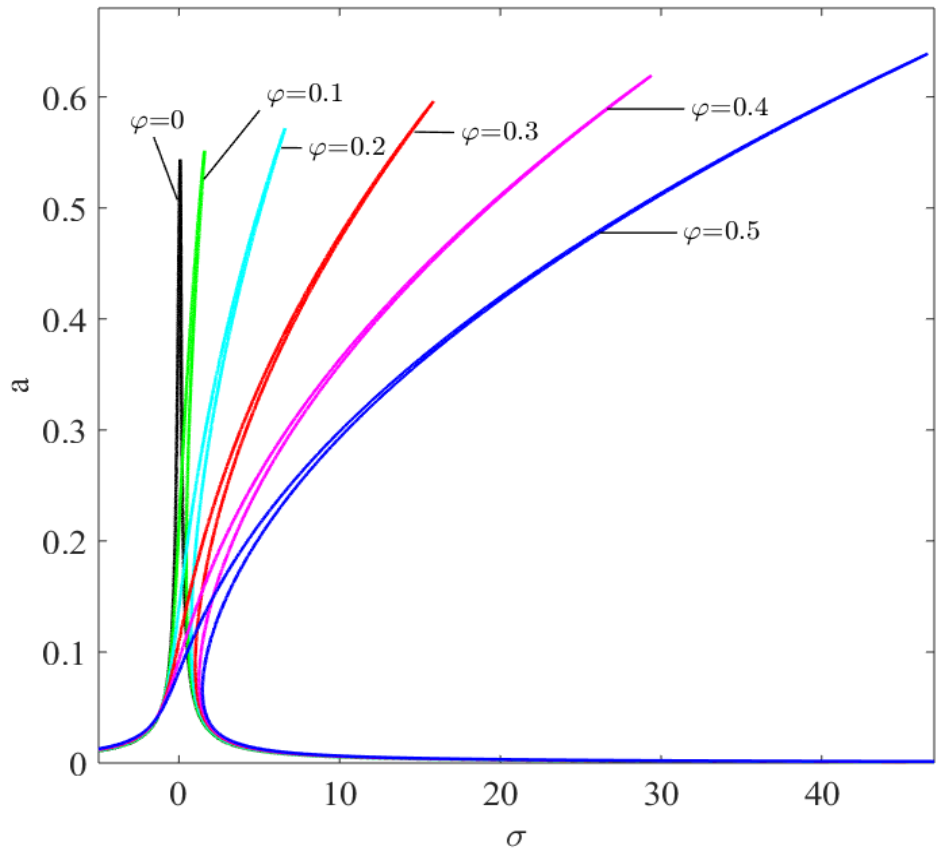
Şekil 4.2.17 Farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen frekans- tepki eğrisi ($\alpha = 0.5,\ \eta = 0.6$)

Şekil 4.2.17'de $\alpha = 0.5,\ \eta = 0.6$ şartlarında yerel olmayan parametre değerleri için zorlama frekansındaki değişimlere bağlı olarak titreşim genliği grafiği verilmiştir. Grafik incelendiğinde Şekil 4.2.15'e benzer olarak yerel olmayan parametre değerleri arttıkça nonlineeritenin sertleştirici etkisinin arttığı görülmektedir. Fakat Şekil 4.2.15 farklı olarak yerel olmayan parametre değerleri arttıkça genliğin de arttığı gözlemlenmektedir.



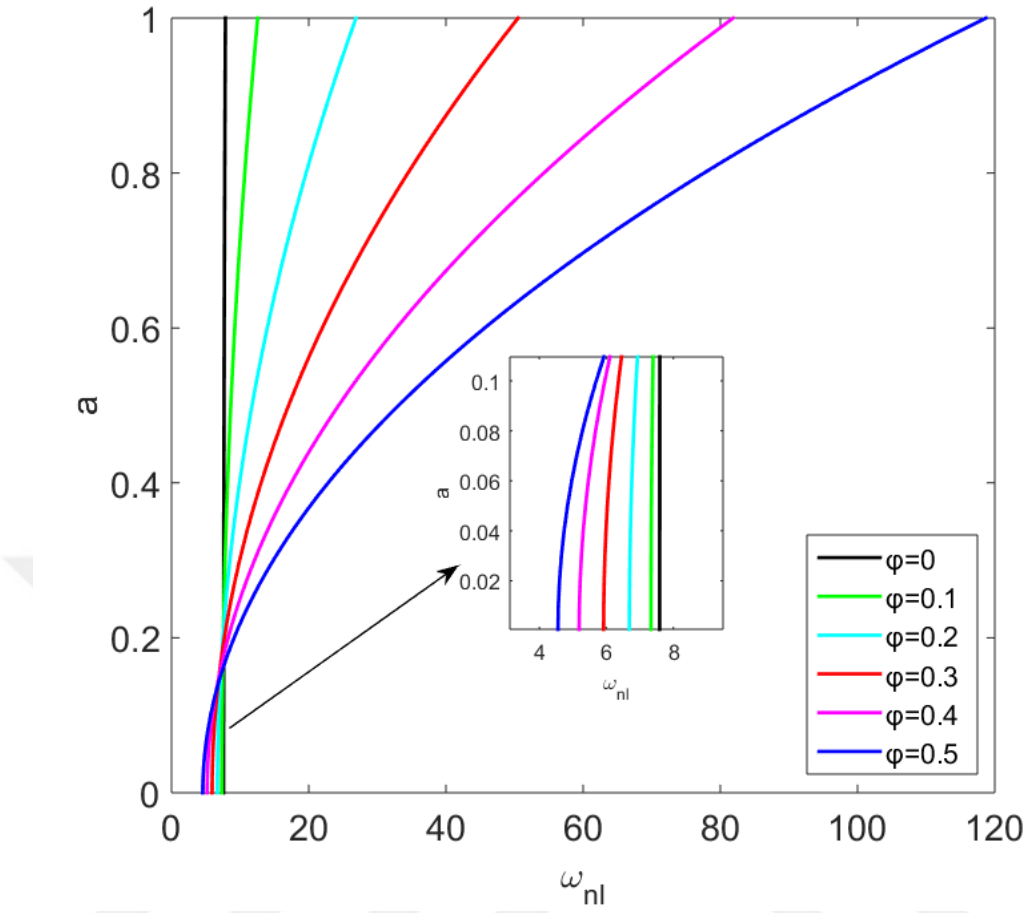
Şekil 4.2.18 Farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen nonlineer frekans – genlik eğrileri ($\alpha = 0.5$, $\eta = 0.6$)

Şekil 4.2.18'de $\alpha = 0.5$, $\eta = 0.6$ şartlarında farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen nonlineer frekansa karşı titreşim genlik grafiği görülmektedir. Grafikte yerel olmayan parametre değeri arttıkça genlikle beraber nonlineeriteden gelen düzeltmenin de arttığı görülmektedir.



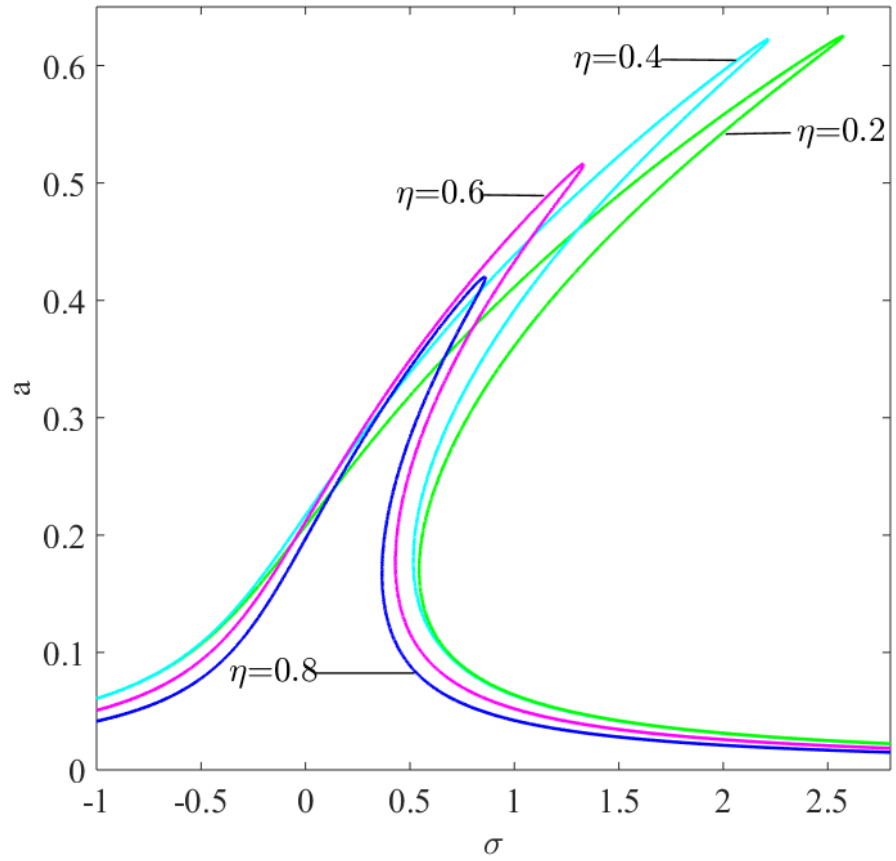
Şekil 4.2.19 Farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen frekans- tepki eğrisi ($\alpha = 0.5,\ \eta = 0.8$)

Şekil 4.2.19'da $\alpha = 0.5$, $\eta = 0.8$ şartlarında farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen zorlama frekansındaki değişimlere bağlı olarak titreşim genliği grafiği verilmiştir. Grafik incelendiğinde Şekil 4.2.17'ye benzer olarak yerel olmayan parametre değerleri arttıkça nonlineeritenin sertleştirici etkisinin arttığı ve yerel olmayan parametre değerleri arttıkça genliğin de arttığı gözlemlenmektedir.



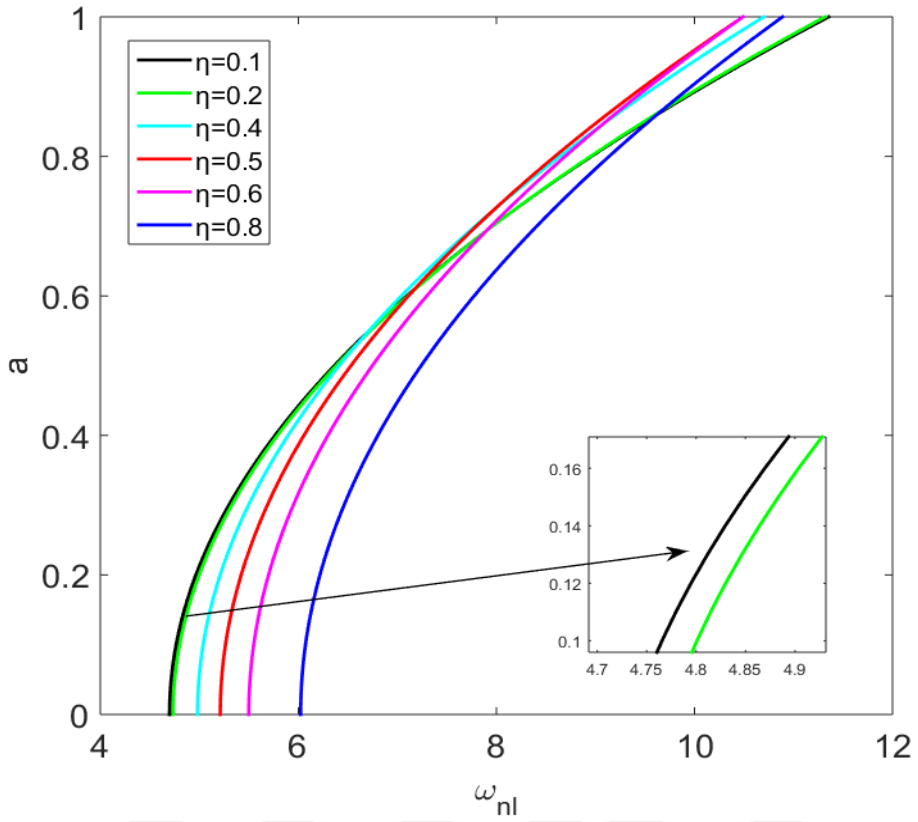
Şekil 4.2.20 Farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen nonlineer frekans – genlik eğrileri ($\alpha = 0.5$, $\eta = 0.8$)

Şekil 4.2.20'de $\alpha = 0.5$, $\eta = 0.8$ şartlarında farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen nonlineer frekansa karşı titreşim genlik grafiği görülmektedir. Grafikte Şekil 4.2.16 ve 4.2.18'e benzer olarak yerel olmayan parametre değeri arttıkça genlikle beraber nonlineeriteden gelen düzeltmenin de arttığı görülmektedir.



Şekil 4.2.21 Farklı kademe yerleri için frekans- tepki eğrisi ($\alpha = 0.8,\ \gamma = 0.4$)

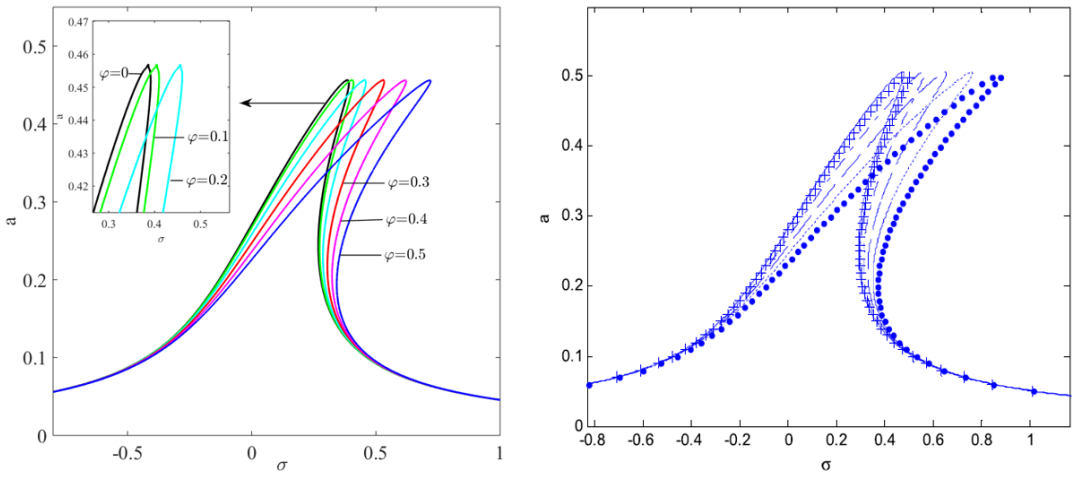
Şekil 4.2.21'de $\alpha = 0.8,\ \gamma = 0.4$ şartlarında farklı kademe yeri değerleri için zorlama frekansındaki değişimlere bağlı olarak titreşim genliği grafiği verilmiştir. Grafik incelendiğinde kademe yeri soldan sağa doğru gidildikçe grafik daha az sağa yatarak nonlineerite etkisinin sertleştirici davranışında azalma olduğu gözlemlenmektedir. Ayrıca kademe yeri soldan sağa doğru gidildikçe genliklerde azalma olduğu görülmektedir.



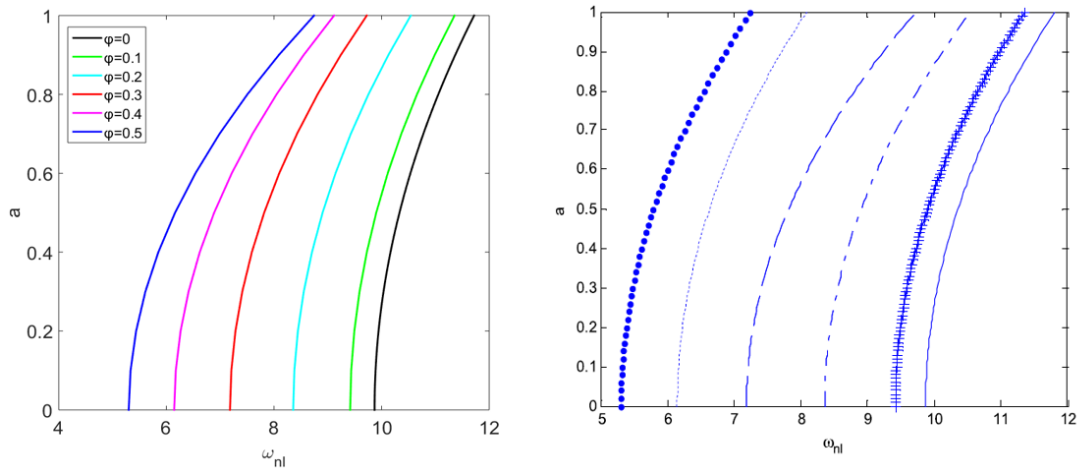
Şekil 4.2.22 Farklı kademe yerlerine karşılık gelen nonlineer frekans – genlik eğrileri ($\alpha = 0.8,\ \gamma = 0.4$)

Şekil 4.2.22'de $\alpha = 0.8$, $\gamma = 0.4$ şartlarında farklı kademe yeri değerleri için nonlineer frekansa karşı titreşim genlik grafiği görülmektedir. Grafikte kademe yeri başlangıç noktasına yaklaştıkça genlikle beraber nonlineeriteden gelen düzeltmenin de arttığı görülmektedir.

Çalışmanın nonlineer problemine ait çözümün doğruluğunu güçlendirmek amacıyla şekil 4.2.23 ve 4.2.24'te $\alpha = 1$ alınarak kademeli nano kirişin kademesiz kiriş olarak davranış göstermesi sağlanmıştır. Bu şekilde literatürde aynı şartlarda daha önce yapılmış olan Bağdatli [1]'ın çalışmasında elde edilen sonuçlar ile karşılaştırma yapma imkânı oluşturulmuştur.



Şekil 4.2.23 $\alpha = 1$ olan kademeli nano kirişe (sol) ve kademesiz nano kirişe ait (sağ) [55] farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen frekans- tepki eğrileri



Şekil 4.2.24 $\alpha = 1$ olan kademeli nano kirişe (sol) ve kademesiz nano kirişe ait (sağ) [55] farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen nonlineer frekans – genlik eğrileri

Şekil 4.2.23'te farklı kademe yerlerine karşılık gelen zorlama frekansındaki değişimlere bağlı olarak titreşim genliği grafiği, şekil 4.2.24'te ise farklı farklı yerel olmayan parametre değerlerine karşılık gelen nonlineer frekansa karşı titreşim genlik grafiği görülmektedir. Karşılaştırılma sonuçları incelendiğinde anlamlı bir uyum içerisinde oldukları görülmektedir.

5. SONUÇ VE YORUMLAR

İcra edilen bu tez çalışmasında kademeli nano kirişin lineer ve nonlineer titreşim hareketleri Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisine göre incelenmiştir. Kiriş Euler-Bernoulli kiriş teorisine uygun olarak seçilmiştir. Basit-basit sınır şartlarına sahip tek kademeli kiriş sistemi ele alınmıştır.

Kirişin hareketini temsil eden hareket denklemleri Hamilton prensibi ile bulunmuştur. Sisteme zorlama ve sönüm ifadeleri de eklenerek lineer analizin yanı sıra nonlineer analiz imkânı da oluşturulmuştur. Denklemleri malzemenin fiziksel yapısından ve boyutlarından bağımsız hale getirmek için boyutsuzlaştırma işlemi uygulanmıştır.

Boyutsuz durum denklemlerini çözmek için perturbasyon tekniklerinden olan çok zaman ölçekli metot tercih edilmiştir. Çözüm iki aşamada ele alınmıştır.

İlk aşamada perturbasyon açılımından gelen ilk mertebe terimleri lineer problemi oluşturmuştur. Lineer problem çözülmesiyle tabii frekans denklemleri elde edilmiş ve farklı şartlar için ilk üç mod değerleri bulunarak tablolar halinde sunulmuştur.

İkinci aşamada ise perturbasyon açılımının ikinci mertebesinin çözümü yapılmış ve bu çözümden lineer problemin düzeltmeleri olarak nonlineer terimler ortaya çıkmıştır. Nonlineer terimlerin doğal frekanslara etkileri farklı şartlar için hesaplanmıştır. Zorlama frekansının sistemin tabii frekansına yakın olduğu baskın rezonans durumu ele alınmış ve kararlılık analizi yapılmıştır.

Çalışmada temel olarak kirişin nano boyutta ve kademeli olması durumlarının incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda araştırmanın bulguları elde edilirken nano ölçekli etkiyi yakalamak için çeşitli yerel olmayan parametre değerleri ve kademe etkisini yakalamak için ise farklı kademe yarıçap oranları ve kademe yerleri için kirişe ait 1. Mod değerlerine karşılık gelen frekans-tepki ve nonlineer frekans-genlik eğrileri elde edilmiştir.

Titreşim analizi sonucu elde edilen verilerin doğruluğunu güçlendirmek amacıyla, literatürde bulunan Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi ile yapılan nano kiriş ve diğer klasik kiriş çalışma sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Yapılan bu çalışmanın öne çıkan sonuçları ise şöyle sıralanabilir.

Çalışma özgünlüğü açısından incelendiğinde,

- Türkiye'de kademeli nano kirişin ele alındığı ilk çalışma olarak göze çarpmaktadır. Ayrıca uluslararası alanda bakıldığında ise perturbasyon metodunun ilk defa bir kademeli nano kirişe uygulayarak nonlineer analiz imkânı sağlanmıştır. Bu iki sonuç çalışmanın özgünlüğü açısından önem arz etmektedir.

Çalışma analiz açısından incelendiğinde lineer probleminin çözümünden şu sonuçlara ulaşılabilir.

- Analizde ilk olarak kademeli nano kiriş, kademe oranı ve kademe yeri değerleri 1'e eşitlenerek kademesiz kirişe benzetilmiştir. Bu şartlar altında basit-basit sınır koşuluna sahip kademeli nano kirişin ilk üç temel frekans değeri, farklı yerel olmayan parametre değerleri için literatürdeki diğer nano kiriş değerleri ile karşılaştırılmış ve iyi bir uyum gözlemlenmiştir.

- Yerel olmayan parametre değeri 0'a eşitlenerek sistem klasik kiriş problemine dönüştürülmüş ve buradan elde edilen sonuçların da literatürde bulunan diğer klasik kiriş çalışmaların sonuçları ile aynı olduğu saptanmıştır.

- Aynı kademe oranı ve kademe yeri değerlerine sahip kademeli nano kiriş için bakıldığında, yerel olmayan parametre değerinin artması doğal frekans değerini düşürmüştür. Bu sonuçtan yola çıkarak yerel olmayan parametrenin kirişin rijitliği ile ters orantılı olduğu yorumunu çıkarabilmek mümkün görülmüştür.

- Kademe kesit yarıçap oranı 1’den küçük olduğu durumlarda, kademe yeri başlangıç noktasından uzaklaştıkça doğal frekans değerlerinin arttığı, kademe oranı 1’den büyük olduğu durumda ise sonuçlar tersine yani doğal frekans değerlerinin azaldığı görülmüştür. Bu durumdan ise kademe oranının 1’den uzaklaşması kirişin rijitliğini azaltması sonucunu doğurmaktadır.

Çalışmanın nonlineer problem çözümünden ise şu sonuçlara ulaşmak mümkündür.

- Genel çerçevede tüm frekans-tepki eğrilerine bakıldığında nonlineer etkinin sertleştirici davranış eğiliminde olduğu sonucuna varılmaktadır.

- Kademe oranı 1’eşitlenerek elde edilen frekans-tepki eğrileri literatürde bulunan diğer nano kiriş çalışması ile karşılaştırılmış ve kayda değer bir benzerlikte sonuç elde edilmiştir.

- Yine kademe oranı 1’eşitlenerek elde edilen nonlineer frekans-genlik eğrileri daha önce yapılmış literatürde bulunan çalışma ile karşılaştırıldığında aynı sonuç elde edilebilmiştir.

- Kademe oranı 1’den küçük olduğu durumlarda, yerel olmayan parametre arttıkça düzeltme terimi değerinin arttığı, kademe oranı 1’den büyük olduğu durumda ise sonuçlar tersine yani düzeltme terimi değerinin azaldığı görülmüştür.

- Aynı kademe oranı ve yerine sahip kademeli nano kirişte, yerel olmayan parametre değerindeki artışın, genlik arttıkça nonlineer frekans değerinde artış meydana getirdiği gözlemlenmiştir.

- Aynı kademe oranı ve yerel olmayan parametre değerine sahip kademeli nano kirişte, kademe yeri başlangıç noktasına yaklaştıkça genlikle beraber nonlineeriteden gelen düzeltmenin de arttığı görülmüştür.

Yukarıda belirtilen çıkarımlar ve sayısal analiz sonucunda, basit-basit mesnetli kademeli nano kiriş sistemlerinde kademe oranının 1'den uzaklaşması durumunda nonlineerite etkinin arttığı ve sistemin kararlılığının azaldığı görülmektedir. Ayrıca kademe oranı 1'den uzaklaştığı durumlarda kademe yeri başlangıç noktasından uzaklaştıkça sistemin kararlığın arttığı görülmektedir.

Yerel olmayan parametre boyutundan sistemin kararlılık durumu incelendiğinde ise; kademe oranı ve yerinin sabit olması durumunda yerel olmayan parametre değerindeki artışın sistemin kararlılığını bozduğu gözlemlenmektedir. Bunun yanı sıra değişken kademe oranı ve yerine göre yerel olmayan parametre değerinin sistem kararlılığı üzerindeki etkisi değişiklik göstermektedir.

Çalışmanın gelecekte karşılaşılması muhtemel bir kademeli nano kirişe sahip bir sistemin tasarım aşamasında yukarıda tespit edilen durumların göz önünde bulundurulması tasarlanacak olan sistemlerin daha kararlı ve doğru bir şekilde çalışmasına katkı sağlayacağı temenni edilmektedir.

Bu çalışmanın devamı olarak sistemin iç rezonansın araştırılması ve kararlılık analizinin yapılması, kademeli nano kirişe ait kademe sayısının arttırılması, farklı mesnet durumlarının incelenmesi, kiriş kesitinin dikdörtgen ve kare gibi çeşitli geometrik durumlarının incelenmesi ve gerçek malzemelere ait değerler kullanılarak çalışmanın uygulama alanının gözlemlenmesi gibi araştırma konularının ele alınması hedeflenmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Ekinci, K.L., Roukes, M.L. Nanoelectromechanical systems. Review of Scientific Instruments 2005, 76 (6).

[2] Bhushan, B. Nanotribology and nanomechanics of MEMS/NEMS and BioMEMS/ BioNEMS materials and devices. Microelectronic Engineering. 2007, 84 (3), 387–412.

[3] Saji, V.S., Choe, H.C., Yeung, K.W.K. Nanotechnology in biomedical applications: a review. International Journal of Nano and Biomaterials. 2010, 3(2), 119–139.

[4] Taghavi, N., Nahvi, H. Pull-in instability of cantilever and fixed–fixed nano-switches. European Journal of Mechanics endash; A/Solids. 2013, 41, 123–133.

[5] Arefi, M. Analysis of a doubly curved piezoelectric nano shell: nonlocal electroelastic bending solution. European Journal of Mechanics endash; A/Solids. 2018, 70, 226–237.

[6] Dresselhaus, M.S., Dresselhaus, G., Saito, R. Physics of carbon nanotubes. Carbon. 1995, 33 (7), 883-891.

[7] Fu, Y.M., Hong, J.W., Wang, X.Q. Analysis of nonlinear vibration for embedded carbon nanotubes, Journal of Sound and Vibration, 2006, 296(4), 746-756.

[8] Jack W.J. Microelectromechanical systems (MEMS): fabrication, design and applications. Smart Meterials and Structures. 2001, 10(6).

[9] Xie, W.C., Lee, H.P., Lim, S.P. Nonlinear Dynamic Analysis of MEMS Switches by Nonlinear Modal Analysis. Nonlinear Dynamics. 2003, 31, 243–256.

[10] Alkharabsheh, S.A., Younis, M.I. Dynamics of MEMS arches of flexible supports, Journal of Microelectromechanical Systems. 2013, 12 (1), 216-224.

[11] Fu, Y., Zhang, J., and Wan, L. Application of the energy balance method to a nonlinear oscillator arising in the microelectromechanical system (MEMS), Current Applied Physics, 2011, 11, 482-485.

[12] Ebrahimy, F., Hosseini, S.H.S. Nonlinear electroelastic vibration analysis of NEMS consisting of double-viscoelastic nanoplates. Journal of Applied Physics A. 2016, 122.

[13] Bornassi, S., Haddadpour, H. Nonlocal vibration and pull-in instability analysis of electrostatic carbon-nanotube based NEMS devices, Sensors and Actuators A: Physical. 2017, 266, 185-196.

[14] Sharma, J.N., Grover, D. Thermoelastic vibration analysis of Mems/Nems plate resonators with voids. International journal Acta Mechanica. 2012, 223, 167–187.

[15] Ebrahimi, F., Hosseini, S.H.S. Double nanoplate-based NEMS under hydrostatic and electrostatic actuations. European Physical Journal. 2016, 131, 160.

[16] Eric W. Wong, P., Sheehan* E., Charles M.L. Nanobeam Mechanics: Elasticity, Strength, and Toughness of Nanorods and Nanotubes. Science. 1997, 277(5334), 1971-1975.

[17] Aydogdu, M. A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending, buckling and vibration. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2009, 41(9), 1651-1655.

[18] Şimşek M. Nonlinear free vibration of a functionally graded nanobeam using nonlocal strain gradient theory and a novel Hamiltonian approach. International Journal of Engineering Science. 2016, 105, 12-27.

[19] Akkoca, Ş., Bağdatlı, S.M., Toğun, N. Ortadan mesnetli mikro kirişin doğrusal titreşim hareketleri. Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi. 2021, 36 (2), 1089-1104.

[20] Togun, N., Bağdatli, S.M. Size dependent nonlinear vibration of the tensioned nanobeam based on the modified couple stress theory. Composites Part B: Engineering. 2016, 97, 255-262.

[21] Khaniki, H.B. On vibrations of nanobeam systems. International Journal of Engineering Science. 2018, 124, 85-103.

[22] Zhiyong, F. et al. Ordered Arrays of Dual-Diameter Nanopillars for Maximized Optical Absorption. Nano Letters. 2010, (10), 3823-3827.

[23] Özkaya, E., Tekin, A. Non-Linear Transverse Vibrations of A Simply Supported Multi-Stepped Beam. The Fifth International Conference on Dynamic Systems and Application, 2007.

[24] Tekin, A, Özkaya, E. Ankastre Mesnetli Çok Kademeli Kirişlerin Lineer Enine Titreşimleri. Celal Bayar University Journal of Science. 2007, 3(2) , 143-152.

[25] Tekin, A., Özkaya, E., Bağdatlı, S.M. Three-to-one internal resonance in multiple stepped beam systems. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition). 2009, 30, 1131–1142.

[26] Lu, Z.R., Huang, M., Liu, J.K., Chen, W.H., Liao, W.Y. Vibration analysis of multiple-stepped beams with the composite element model. Journal of Sound and Vibration. 2009, 322 (4–5), 1070-1080.

[27] Xing-Jian, D., Guang, M., Hong-Guang, L., Lin, Y. Vibration analysis of a stepped laminated composite Timoshenko beam. Mechanics Research Communications. 2005, 32(5), 572-581.

[28] Qibo, M., Stanislaw, P. Free vibration analysis of stepped beams by using Adomian decomposition method. Applied Mathematics and Computation. 2010, 217(7), 3429-3441.

[29] Qibo, M. Free vibration analysis of multiple-stepped beams by using Adomian decomposition method. Mathematical and Computer Modelling. 2011,54(1–2), 756-764.

[30] Akbas, S.D. Analytical solutions for static bending of edge cracked micro beams. Structural Engineering and Mechanics. 2016, 59(3), 579–599.

[31] Mohammed, S., Majid, A.K., Abdessattar, A., Mahmoud, S. Modeling and Vibration Characteristics of Cracked Nano-Beams Made of Nanocrystalline Materials. International Journal of Mechanical Sciences. 2016, 115–116, 574-585.

[32] Masih, L., Mohammad, R.H.Y. An analytical method for free vibration of multi cracked and stepped nonlocal nanobeams based on wave approach. Results in Physics. 2018, 11, 166-181.

[33] Lellep, J., Lenbaum, A. Free Vıbratıons of Stepped Nano-Beams. International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. 2018, 6(4), 716–725.

[34] Lellep, J., Lenbaum, A. Natural vibrations of stepped nanobeams with defects. Acta Et Commentationes Universitatis Tartuensis De Mathematica. 2019, 23(1).

[35] Hossain, M., Lellep, J. The effect of rotatory inertia on natural frequency of cracked and stepped nanobeam. Engineering Research Express. 2020, 2.

[36] Eringen, A.C. On differential-equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface-waves. Journal of Applied Physics. 1983, 54, 4703–4710.

[37] Oldac, O. Nanoteknolojide Yerel Olmayan Çubuk Teorisinin Statik ve Dinamik Problemleri. İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalı, İstanbul, 2016, 174 s. (Doktora Tezi).

[38] Adhikari, S., Karličić, D., Liu, X. Dynamic stiffness of nonlocal damped nano-beams on elastic foundation. European Journal of Mechanics - A/Solids. 2021, 86.

[39] Hossein, D., Andrea, C., Raimondo, L. Nonlocal layerwise formulation for bending of multilayered/functionally graded nanobeams featuring weak bonding. European Journal of Mechanics - A/Solids. 2021, 86.

[40] Pradhan, S.C., Phadikar, J.K. Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates. Journal of Sound and Vibration. 2009, 325(1–2), 206-223.

[41] Eringen, A.C. Edge dislocation in nonlocal elasticity. International Journal of Engineering Science. 1977, 15(3), 177-183.

[42] Heireche, H., Tounsi, A., Benzair, A., Maachou, M., Adda, B.E.A. Sound wave propagation in single-walled carbon nanotubes using nonlocal elasticity. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2008, 40(8), 2791-2799.

[43] Yang, J., Jia, X.L., Kitipornchai, S. Pull-in instability of nano-switches using nonlocal elasticity theory. Journal of Physics D: Applied Physics. 2008, 41(3).

[44] Eringen, A. C. Nonlocal continuum field theories. Springer Science & Business Media. 2002.

[45] Lu, P., Lee, H.P., Lu, C. Dynamic properties of flexural beams using a nonlocal elasticity model. Journal Applied Physics. 2006, 99(7).

[46] Li, C., Lim, C.W., Yu, J.L., Zheng, O.C. Analytical solutions for vibration of simply supported nonlocal nanobeams with an axial force. International Journal Structural Stability and Dynamics. 2011, 11(2), 257–271.

[47] Sarı, G. Mikro kirişlerin lineer olmayan titreşimleri. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Ana bilim dalı, Manisa, 2013, 147 s. (Doktora Tezi).

[48] Nayfeh, A.H. Introduction to perturbation techniques. NewYork: John Wiley; 1981.

[49] Nayfeh, A.H., Mook D.T. Nonlinear oscillations. New York: John Wiley; 1979.

[50] Eltaher, M.A., Alshorbagy, A.E., Mahmoud, F.F. Vibration analysis of Euler–Bernoulli nanobeams by using finite element method. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(1), 4787-4797.

[51] Taima, M.S., Tamer, A.E., Said, H.F. Free vibration analysis of multi-stepped nonlocal Bernoulli–Euler beams using dynamic stiffness matrix method. Journal of Vibration and Control. 2021, 27(7-8), 774-789.

[52] Murmu, T., Adhikari, S. Nonlocal effects in the longitudinal vibration of double-nanorod systems. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2010, 43(1), 415-422.

[53] Murmu, T., Adhikari, S. Nonlocal elasticity based vibration of initially pre-stressed coupled nanobeam systems. European Journal of Mechanics - A/Solids. 2012, 34, 52-62.

[54] Bouamama, M., Elmeiche, A., Elhennani, A., Kebir, T., Harchouche, Z. E. A. Exact Solution for Free Vibration Analysis of FGM Beams. Revue des Composites et des Matériaux Avancés. 2020, 30(2).

[55] Bağdatlı, S.M. Nonlineer vibration of nanobeams with various boundary conditions based on nonlocal elasticity theory. Composites Part B: Engineering. 2015, 80, 43-52.