T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TOPOLOJİ BİLİM DALI

BAZI METRİK UZAYLARDA $C-$ FONKSİYON SINIFLARININ KULLANIMIYLA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Sevinç AKDAĞ

Danışman
Prof. Dr. Ali MUTLU



MANİSA-2017

BAZI METRİK UZAYLARDA C- FONKSİYON SINIFLARININ KULLANIMIYLA

Sevinç AKDAĞ **SABİT NOKTA TEOREMLERİ** **2017**

TEZ ONAYI

Sevinç AKDAĞ tarafından hazırlanan **"Bazı Metrik Uzaylarda $C-$ Fonksiyon Sınıflarının Kullanımıyla Sabit Nokta Teoremleri"** adlı tez çalışması …./..../…. tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**' nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak savunulmuş ve oy çokluğu/oy birliği ile kabul edilmiştir.

Danışman **Prof. Dr. Ali MUTLU**
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Jüri Üyesi **Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK**
Kırıkkale Üniversitesi

Jüri Üyesi **Yrd. Doç. Dr. Simge ÖZTUNÇ**
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Sevinç AKDAĞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİKER ….…… I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ …… II
TEŞEKKÜR……...III
ÖZET…… IV
ABSTRACT ..... …. V
1. GİRİŞ…….1
2. GENEL BİLGİLER…….....5
2.1. Metrik Uzay…….....6
2.2.Yarı Metrik Uzay…….7
2.3.Rectangular Metrik Uzay…… 8
2.4.Kısmi (Partial) Metrik…… 9
2.5.Kısmi(Partial) Sıralı (Ordered) Metrik……10
3.TANIMLAR VE TEOREMLER…..……...11
3.1. Rectangular Yarı Metrik……11
4.TAM KISMİ SIRALI RACTANGULAR YARI METRİK UZAY ……..16
5.SONUÇ……...24
KAYNAKLAR……...25
ÖZGEÇMİŞ……....29

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	$n-$ boyutlu Euclidean Uzay
(X,d)	Metrik Uzay
$C-$	$C-$ Fonksiyon Sınıfı
λ	Lambda
ψ	Psi
ϕ	Fi
ρ	Ro
δ	Sigma
$\preceq$	Kısmi Sıralama Bağıntısı
$\leqq$	İkili Kısmi Sıralama Bağıntısı

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren lisans ve lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aşamalarında her yönden yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ali MUTLU'ya , ayrıca yüksek lisans öğrenimim boyunca bilgilerinden yararlandığım Sayın Yrd. Doç. Dr. Simge ÖZTUNÇ'a sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini her zaman hissettiğim ve hep yanımda olan aileme yürekten teşekkür ederim.

Sevinç AKDAĞ
Manisa, 2017

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Bazı Metrik Uzaylarda $C-$ Fonksiyon Sınıflarının Kullanımıyla Sabit Nokta Teoremleri

SEVİNÇ AKDAĞ

Manisa Celal Bayar Üniversitesi,

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof. Dr. Ali MUTLU

Bu çalışmada $C-$ fonksiyon sınıflarını kullanarak çeşitli metrik uzaylardaki sabit nokta teoremleri beşinci ana bölümde verilmiştir. İlk giriş kısmında sabit nokta tanımı, sabit nokta teoremlerinin tarihçesi ve kullanım alanlarından bahsedilmiştir. İkinci kısım olan genel bilgilerde metrik uzay, yarı metrik uzay, rectangular metrik uzay, kısmi metrik uzay ve kısmi sıralı metrik uzay tanımları ve örnekleri bulunmaktadır. Üçüncü kısımda tanım ve teoremlere yer verilmiştir ayrıca rectangular yarı metrik uzay tanımı verilmiştir. Dördüncü bölümde ise tam kısmi sıralı rectangular yarı metrik uzaydan ve $C-$ sınıf fonksiyonlarıyla tam kısmi sıralı rectangular yarı metrik uzay gösterilmiştir.

Sonuç olarak da rectangular yarı metrik uzaydaki karışık monoton dönüşümlerde $C-$ sınıf fonksiyonlarını kullanarak sabit nokta teoremlerinin ispatlandığı belirtilmiştir.

Anahtar Kelimeler / Keywords: Sabit Nokta, Metrik Uzay, $C-$ fonksiyonu, rectangular yarı metrik, karışık monoton dönüşüm

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

Fixed Point Theorems Using $C-$ Function Classes in Some Metric Spaces

SEVİNÇ AKDAĞ

Manisa Celal Bayar Üniversitesi,
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ali MUTLU

In this thesis, fixed point theorems in various metric spaces using $C-$ function classes are given in fiveth main sections. In the first introduction, fixed point definition, the history of fixed point theorems and their usage areas are mentioned. In the second part of the general information, metric space, semi-metric space, rectangular metric space, partial metric space and partial ordered metric space definitions and examples are found. In the third part, definitions and theorems are given, and rectangular semi-metric space definitions are given. In the fourth part, complete partial ordered rectangular semi-metric space is shown with full semi-rectangular semi-metric space and class functions.

As a result, fixed point theorems have been proved by using class functions in mixed monotone mapping in rectangular semi-metric rectangles.

Anahtar Kelimeler / Keywords: Fixed Point, Metric Space, $C-$ function, rectangular semi-metric, mixed monotone mapping.

1.GİRİŞ

X boştan farklı bir küme ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $Tx = x$ eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ noktasına T 'nin bir sabit noktası denir.

Sabit nokta teorisi çalışmaları; bir dönüşümün sabit nokta varlığını, var ise tekliğini ve nasıl bulunabileceğini araştırır. Geniş bir konu olan sabit nokta genel topoloji, diferansiyel denklemler, integral denklemler teorisi, analiz, fonksiyonel analiz, potansiyel teori, yaklaşım teorisi, kontrol sistemler ve oyun teorisi gibi alanlarda uygulanan önemli bir teoremdir. Örneğin 20. yüzyıl başlarında oyun teorisindeki gelişmeler ünlü matematikçi John von Neumann'ın oyunun aksiyomatik temellerini atmış ve daha sonra da iktisat ile ilişkilendirmiştir. Farklı oyunları inceleyen John von Neumann çalışmalarında oyunlar için "çözüm"ün varlığını ilk kez sabit nokta teoremlerini kullanarak topolojik tekniklerle ispatlamıştır. Bunun gibi pek çok farklı alanda çalışılan sabit nokta ayrıca da istatistik, matematiksel ekonomi, mühendislik, esneklik teorisi gibi alanlarda da uygulanmakta ve çalışmaları yapılmaktadır.

Yukarıda bahsedilen sabit nokta ile ilgili uygulamalar ve çalışmalar [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13] yer almaktadır.

Sabit nokta teorisi Brouwer ile başladığı bilinse de kökeni 19. Yüzyılın sonlarında diferansiyel denklemler çalışmalarında kullanılan yaklaşım yöntemlerine kadar dayanmaktadır. Örneğin buradaki yaklaşım metotlarını 1836'da Liouville, 1884 de Cauchy, 1887'de Lipschitz, 1885-1886-1889 yıllarında Peanove de özellikle 1890 yılında Picard kullanmışlardır. [14]

Genel olarak sabit nokta teorisi çalışmaları iki ayrı ana başlık altında incelenmektedir. Bu başlıklardan ilki tam metrik uzaylardaki büzülme ve bu büzülme dönüşümleri için sabit nokta teorisi diğeri ise bir normlu lineer uzayın kompakt ve kompleks alt kümesinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teorisidir.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları 1912'de Brouwer ile başlamıştır. Aşağıda verilen Brouwer'in mihenk taşı teoremi [15]' de:

"$\mathbb{R}^n$ nin kapalı birim yuvarlarından yine aynı kapalı birim yuvarı üzerine tanımlanan her sürekli dönüşümün bir sabit noktanın var olduğu"

ispatlanmıştır. Daha sonra 1930' da Schauder, Brouwer' ın teoreminde "$\mathbb{R}$" yerine herhangi bir normlu lineer uzay alınarak [16]' da;

"X bir normlu lineer uzay, $C \subseteq X$ kapalı ve konveks bir alt küme ve $f : C \to C$ olsun. O zaman f, C de bir sabit noktaya sahiptir",

şeklinde genişletilmiştir.

Metrik uzaylarda sabit nokta teoremi üzerindeki çalışmalar ise Banach ile başlamıştır. 1922 de Banach sabit nokta teoremi ya da diğer bir değişle büzülme ilkesi olarak bilinen;

"(X,d) bir tam metrik uzay ve $f : X \to X$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve bir $a \in [0,1)$ için $d(f(x), f(y)) \leq ad(x,y)$ eşitliğini sağlıyor olsun. Bu durumda f bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir ve üstelik herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{f^n(x_0)\}$ dizisi f 'nin $z \in X$ sabit noktasına yakınsar" [17].

Banach meşhur teoremi verilmiştir.

Stefan Banach, Mihenk taşı olarak bilinen Banach büzülme prensibi (BSP) ile sabit nokta teoremlerini açıklayan Polonyalı matematikçidir. BSP birçok farklı açıdan evrenselleşerek oluşmuştur. Pek çok araştırmacı lineer olmayan büzülme dönüşümlerinin durumuna göre BSP'yi genişletmiştir. Sabit bir noktanın varlığı birçok metrik uzaylarda üzerine çalışılmış ve birçok araştırma makalesinde incelenmiş olup matematik, mühendislik, ekonomi olmak üzere birçok alana uygulanmıştır.

[18]' de bazı sabit nokta teoremleri tam ve kompakt metrik uzaylarda ispatlanmış ve ayrıca bazı örnekler verilmiştir. Genelleştirilmiş zayıf büzülme dönüşümünün sabit noktaları sınır uzaylarına göre tam metrik uzaylarda T – yörüngesinde varlığı belirtildi.

İkili sabit noktaların bazı varoluş teoremleri hem sürekli hem de süreksiz operatörler için sunulmuştur. Bu nedenle süreksiz sağ taraflı normal diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemleri bazı uygulamalarda araştırılmıştır. [19]

[20]'de varsayılan zayıf büzülme tipini kullanarak, kısmi sıralı ile verilen metrik uzayda karışık monoton dönüşüm için bir sabit nokta teoremi ispatlandı. Periyodik sınır değer problemi için çözümün varlığı ve tekliği araştırıldı.

[21]'de tanımlanan $C-$ sınıfının sürekli f fonksiyonu ve ayrıca bazı teoremler, sonuçlar ve örnekler verilmektedir. Ortak sabit nokta teoremi çok değişkenli ve tek değişkenli dönüşümler için $C-$ fonksiyonun zayıf büzülme koşulunu sağlayan dislocated metrik uzaylarda $F-\varphi-$ zayıf büzülme koşuluna göre [22]'de ispatlanmıştır.

Sabit nokta sonuçlarının araştırılması Hausdorff olmayan genelleştirilmiş metrik uzay sınıfında Banach-Caccipoli tipi sabit nokta teoremine göre genelleştirilmiş metrik uzaylar [23]'da verilmiştir.

[24]' de bazı ikili sabit nokta sonuçları koni metrik uzaylarda belirli büzülme koşullarını sağlayan $C-$uzaklık altında kanıtlanmış ve sonuçları $C-$ açıklığının koni metrik uzaydaki tek değişkenli dönüşümünün sabit nokta teoremlerini kullanarak genelleştirmeler ve ayrıca örnekler verilmektedir.

Metric-like uzaylarda dönüşümler ve $C-$ sınıf fonksiyonlarını devirli genelleştirilmiş büzülmeler için bazı sabit nokta teoremleri sunulmuştur.

Elde edilen sonuçlar literatür de son zamanlarda pek çok gelişme göstermiş ve genelleştirilmiştir. [25]'de dinamik programlamada meydana gelen fonksiyonel denklemlere bazı örnekler ve uygulamalar gösterilmiştir.

[26]'da ikili sabit nokta teoreminin varlığı evrenselleştirilmiş büzülme altında $T:X\to X$ karışık monoton dönüşümü için ispatlanmış ve kısmi sıralı tam rectangular metrik uzayda ek bir varsayım altında özelliği oluşturulmuştur.

Bu tezde $C-$ sınıfı fonksiyon kullanılarak kısmi sıralı rectangular yarı metrik uzayda $C-$ sınıfı fonksiyonunun $F-\psi-$ karışık monoton dönüşümü için ikili sabit nokta teoremi ispatlanır. Verilen teorem çeşitli sabit nokta sonuçları genelleştirilmiştir ve doğrulanmıştır. [27]

2.GENEL BİLGİLER

2.1. Metrik Uzay

Tanım 2.1.1. X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için;

i) $d(x, y) \geq 0$

ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii) $d(x, y) = d(y, x)$

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlıyor ise d fonksiyonuna X kümesi üzerinde metriktir denir. Üzerinde bir d metriği ile tanımlı olan uzaya da metrik uzay denir ve genellikle (X, d) veya X_d simgesi ile gösterilir. [28]

Örnek 2.1.2. X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere; $\forall x, y \in X$ için; $d : X \times X \to \mathbb{R}$

$$d_A(x, y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlanan d_A fonksiyonu X üzerinde metriktir ve dolaysıyla (X, d_A) bir metrik uzaydır. Şimdi d_A fonksiyonunun metrik koşullarını gerçeklediğini görelim:

i) $x = y \Rightarrow d_A(x,y) = d_A(x,x) = 0$
$x \neq y \Rightarrow d_A(x,y) = 1$

Buradan $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$ koşulunu sağladığı görülür.

ii) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

iii) $x = y \Rightarrow d(x,y) = d(x,x) = 0$ ve $d(y,x) = d(x,x) = 0 \Rightarrow d(x,y) = d(y,x)$

$x \neq y \Rightarrow d(x,y) = 1 = d(y,x)$

iv) $x = y \Rightarrow d_A(x,y) = 0$ olur. Dolayısıyla

$d_A(x,z) + d_A(z,y) \geq d_A(x,y)$.

Eşitsizliği bu durumda sağlanır.

$$x \neq y \Rightarrow x \neq z \text{ veya } y \neq z$$

hallerinden en az biri sağlanacağından

$$d_A(x,z) + d_A(z,y)$$

ifadesinin değeri 1 veya 2 olur. Hâlbuki $d_A(x,y) = 1$.

Dolayısıyla bu durumda üçgen eşitsizliği sağlanır.

Bu örnek boş olmayan her bir kümenin bir metrik uzay olarak düşünülebileceğini göstermektedir. [28]

2.2. Yarı Metrik Uzay

Tanım 2.2.1. X boş olmayan bir küme olsun. Eğer d_* fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyor ise d_* fonksiyonuna X kümesin de yarı metrik denir. [29]

i) $d_*(x,y) \geq 0$

ii) $x = y \Rightarrow d_*(x,y) = 0$

iii) $d_*(x,y) = d_*(y,x)$

iii) $d_*(x,y) \leq d_*(x,z) + d_*(z,y)$

Örnek 2.2.2. f , bire bir olmayan bir fonksiyon ve

$$d(x,\mathrm{y}) = \left| f(x) - f(y) \right|$$

olarak tanımlansın. Bu halde d fonksiyonunun X fonksiyonlar kümesinde bir yarı metrik olduğunu fakat metrik olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $x = y$ alalım. Bu halde

$$d(x,y) = d(x,x) = \left| f(x) - f(x) \right| = 0$$

koşulunun gerçeklendiği açıktır. Diğer üç koşulun gerçeklendiği mutlak değerin özelliğinden hemen söylenir. (X,d) bir yarı metrik uzaydır. Fakat

$$d(x,\mathrm{y}) = \left| f(x) - f(y) \right| = 0$$

olduğunda $f(x) = f(y)$ elde edilir.

f fonksiyonu bire bir olmadığı için

$$f(x) = f(y)$$

eşitliğinde $x = y$ olamaz. d bir metrik değildir.

Sonuç 2.2.3. Her metrik uzay bir yarı metrik uzaydır. Fakat her yarı metrik uzayın bir metrik uzay olması gerekmez. Çünkü $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$ olduğu halde $d(x, y) = 0$ koşulu $x = y$ olmasını gerektirmez. [29]

2.3. Rectangular Metrik Uzay

Tanım 2.3.1. X boştan farklı bir küme $\forall x, y \in X$ ve x, y'den farklı ayrı bir $\upsilon, \nu \in X$ için aşağıdaki şartları sağlayan $d : X \times X \to [0, \infty]$ dönüşümü verilsin.

$(RM1)$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$(RM2)$ $d(x, y) = d(y, x)$

$(RM3)$ $d(x, y) \leq d(x, \upsilon) + d(\upsilon, \nu) + d(\nu, y)$.

O halde, d'ye rectangular metrik ve (X, d) ikilisine de rectangular metrik uzay denir. [30]

Örnek 2.3.2. $X = A \cup B$, $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$ ve $B = [1, 2]$ olsun. X'de genelleştirilmiş d metriği aşağıdaki gibi verilsin:

$$d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=d\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)=0.3, \qquad d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)=d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)=0.2,$$

$$d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=d\left(\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right)=0.6,$$

$$d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=d\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=d\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)=0$$

ve

$d(x,y)=|x-y|$, $\forall x,y\in B$ veya $x\in A$, $y\in B$ veya $x\in B$, $y\in A$.

d 'nin A'da üçgen eşitsizliğini sağlamadığı aşikârdır.

$$0.6=d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\geq d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)+d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)=0.5.$$

Dolayısıyla $(RM3)$ şartı sağlanır ve d bir rectangular metriktir.

2.4. Kısmi (Partial) Metrik

Tanım 2.4.1. Kısmi metrik veya p metrik ($p-$metrik diye isimlendirilir) $p:U^2\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olacak şekilde [32]:

(P1) $\forall x,y\in U$, $x=y\Leftrightarrow p(x,x)=p(x,y)=p(y,y)$

(P2) $\forall x,y\in U$, $p(x,x)\leq p(x,y)$

(P3) $\forall x,y\in U$, $p(x,y)=p(y,x)$

(P4) $\forall x,y,z\in U$, $p(x,z)\leq p(x,y)+p(y,z)-p(y,y)$.

Örnek 2.4.2. $\mathbb{R}^+$ tüm negatif olmayan gerçek sayıların kümesini belirtsin. $p:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $y\Leftarrow x$ ise $p(x,y)=x$. Aksi halde y olur. O halde $(\mathbb{R}^+,p)$ kısmi bir metrik uzaydır. Böylece $p(x,y)$ x ve y 'nin maksimumu olarak tanımlanır. O halde $(\mathbb{R}^+,p)$ partial metrik uzaydır. Kısmi metrik uzaylar için $p(x,x)=p(x,y)$ olduğu takdirde $y\Leftarrow x$ alışılmış sırası x , x ' den büyük veya ona eşittir. [32]

2.5. Kısmi (Partial) Sıralı (Ordered) Uzayı

Tanım 2.5.1. Aşağıdaki üç şartı sağlayan $\leqq$ ikili kısmi sıralı bağıntısı ile beraber X soyut kümesine kısmi sıralı uzay denir. [33]:

i) Her $x\in X$ için $x\leqq x$;

ii) Her $x,y,z\in X$ için $x\leqq y$ ve $y\leqq z$ ise $x\leqq z$;

iii) Her $x,y\in X$ için $x\leqq y$ ve $y\leqq x$ ise $x=y$.

Örnek 2.5.2: Şimdi S bir metrik uzay olsun. Burada $d(-,-)$ metriği göstermektedir. Daha sonra X 'i (p,λ) sıralı ikililerinin toplamı olarak tanımlarız, burada $p\in S$ ve λ reel bir sayıdır. X kümesi aşağıdaki şartları sağlarsa kısmi sıralı uzay halini alır: $x=(p,\lambda)$ ve $y=(q,\mu)$ ise o zaman $x\leqq y\Leftrightarrow d(p,q)\leqq\mu-\lambda$. Şimdi kısmi sıralının istenen özelliklerini kanıtlarız. $d(p,p)=0\leqq\lambda-\lambda$ olduğundan $x\leqq x$ olarak görüyoruz. $z=(r,\eta)$ düzenlenip, $x\leqq y$ ve $y\leqq z$ olarak varsayarsak

$$d(p,r)\leqq d(p,q)+d(q,r)\leqq(\mu-\lambda)+(\eta-\mu)=\eta-\lambda$$

elde ederiz; burada $x\leqq z$. $x\leqq y$ ve $y\leqq x$ ise o zaman $d(p,q)\leqq\mu-\lambda$ ve $d(p,q)\leqq\lambda-\mu$; böylece $\lambda=\mu$ ve $d(p,q)=0$ yani $p=q$ ve $x=y$. [33]

3. TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu başlıkta kullanacağımız temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

3.1. Rectangular Yarı Metrik Uzay

Tanım 3.1.1. X boştan farklı bir küme ve $d : X \times X \to [0,\infty]$ olacak şekilde her biri x ve y den farklı $\forall \upsilon, \nu \in X$ ve $\forall x, y \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlayan d dönüşümüne rectangular yarı metrik uzay denir.

$\left(R_q M1\right)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

$\left(R_q M2\right)\ d(x,y) \le d(x,\upsilon) + d(\upsilon,\nu) + d(\nu,y)$.

X 'e $rq-$ metrik ve (X,d) çifti rectangular yarı metrik uzaylar $RqMS$ olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.2. $rq-$metrik uzay (rectanqular yarı metrik uzay) da $\{x_n\}$ dizisi tüm $n,m \ge n_0$ ile $n,m \ge n_0$, $\varepsilon > 0$ alınırsa (X,d) ye Cauchy denir ve $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ veya $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ şeklinde gösterilir ve $\min\{d(x_n, x_m), d(x_m, x_n)\} < \varepsilon$. Bu durumda x, $\{x_n\}$'nin $rq-$limiti olarak adlandırılır. [26]

Tanım 3.1.3. [26] Her Cauchy dizisi rq yakınsak ise (X,d) $rq-$metrik uzayı tamdır.

Lemma 3.1.4. [26] (X,d) bir $rq-$metrik uzay olduğunu varsayalım. Eğer $f : X \to X$ bir büzülme dönüşümü ise bu takdir de her $x_0 \in X$ için $\left\{f^n(x_0)\right\}$ bir Cauchy dizisidir.

Tanım 3.1.5. [26] $(X, \preceq)$ kısmi sıralı küme ve (X,d) Hausdorff ve tam $RqMS$ olduğunu kabul edelim ve de $T : X \times X \to X$ olsun. T karışık monoton özelliğine sahip ise bu taktir de

bazı $x, y \in X$ için x ile birlikte $T(x, y)$ bir monoton azalmayan ve aynı zamanda y ile birlikte monoton artmayan olacak şekilde $\forall x, y \in X$ için

$$x_1, x_2, y \in X, x_1 \leq x_2 \Rightarrow T(x_1, y) \leq T(x_2, y)$$

ve

$$y_1, y_2, x \in X, y_1 \leq y_2 \Rightarrow T(x, y_1) \geq T(x, y_2).$$

Tanım 3.1.6. [26] $T(x, y) = x$ ve $T(y, x) = y$ ise bu takdir de $(x, y) \in X \times X$ elemanına T dönüşümünün ikili sabit noktası denir.

Herhangi bir $(x, y), (\upsilon, \nu) \in X \times X$ için $X \times X$ çarpım uzayı

$$\rho\big((x, y), (\upsilon, \nu)\big) = \frac{d(x, \upsilon) + d(y, \nu)}{2}$$

tarafından tanımlanmış ρ metrik ile donatılmıştır.

Bu yüzden ρ bir $rq-$metriktir.

Teorem 3.1.7. [26] (X, d) bir $rq-$metrik uzay ve $f : X \to X$ bir sürekli büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda f tek sabit noktaya sahiptir.

$C-$sınıfı fonksiyonlarının kavramı H. Ansari tarafından [21]'deki Örnek 2.3 de verilen (1), (2), (9) ve (15) şartları aşağıda verilen tanımda belirtilerek [22], [25] ve [34]'de kullanıldı.

Tanım 3.1.8. [21] Eğer herhangi bir $s, t \in [0, \infty)$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise $F : [0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonuna $C-$ fonksiyonu denir.

(1) $F(s, t) \leq s$;

(2) $F(s, t) = s$ ya $s = 0$ ya da $t = 0$.

F 'de ekstra durumlarda gerekirse $F(0,0)=0$ bazı durumlarda empoze edilebilir. C harfi tüm $C-$ fonksiyonlarının sınıfını belirtmektedir.

Örnek 3.1.9. [21] Aşağıdaki örnekler $C-$ sınıfının boş olmadığını gösterir.

1. $F(s,t)=s-t$

2. $F(s,t)=ms,\ 0<m<1$

3. Bazı $r\in(0,\infty)$ için $F(s,t)=\dfrac{s}{(1+t)^r}$

4. $a>1$ için $F(s,t)=\log(t+a^s)/(1+t)$

5. $a>e$ için $F(s,t)=\ln\left(t+a^s\right)/2.\ s=0$ gösteriyor ki $F(s,1)=s.$

6. $r\in(0,\infty)$ için $(s+l)^{(1/(1+t)^r)}-l\ ,\ l>1.$

7. $a>1$ için $F(s,t)=s\log_{t+a}a$

8. $F(s,t)=s-\left(\dfrac{1+s}{2+s}\right)\left(\dfrac{t}{1+t}\right).$

9. $F(s,t)=s\beta(s)$ burada $\beta:[0,\infty)\to[0,1).$

10. $F(s,t)=s-\dfrac{t}{k+t}.$

11. $F(s,t)=s-\varphi(s)$.

Burada $\varphi(t)=0$ ancak ve ancak $t=0$ olacak şekilde $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ bir sürekli fonksiyondur.

12. $F(s,t)=sh(s,t)$

Burada $\forall t,s>0$ için $h(t,s)<1$ olacak şekilde $h:[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ bir sürekli fonksiyondur.

13. $F(s,t)=s-\left(\frac{2+t}{1+t}\right)t.$

14. $F(s,t)=\sqrt[n]{\ln(1+s^n)}$

15. $F(s,t)=\phi(s).$

Burada $\phi(0)=0$ ve $t>0$ için $\phi(t)<t$ olacak şekilde $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ bir üstten yarı sürekli fonksiyondur.

16. $r\in(0,\infty); F(s,t)=\frac{s}{(1+s)^r}.$

Tanım 3.1.10. Aşağıdaki özellikler sağlanır ise $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonuna değişmeli uzaklık fonksiyonu denir.

i) ψ azalmayan ve süreklidir.

ii) $\psi(t)=0$ ancak ve ancak $t=0.$

Uyarı 3.1.11. ψ 'ya değişmeli uzaklık fonksiyonu denir.

Tanım 3.1.12. [21] φ ultra uzaklık değişim fonksiyonu $\varphi(t)>0, t>0$ ve $\varphi(0)\geq 0$ olacak şekilde $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ dönüşümü sürekli, azalmayan dönüşümdür.

Uyarı 3.1.13. Ultra değişim uzaklık fonksiyonunu ϕ_υ olarak adlandırırız.

Lemma 3.1.14. [26] (X,d) bir rectanqular metrik uzay olsun. $\{x_n\}$'de X de bir dizi olacak şekilde $n\to\infty$ iken $d(x_n,x_{n+1})\to 0$ gider. $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi değil ise o zaman

(i) $\lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)-1},x_{n(k)+1})=\varepsilon;$

(ii) $\lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)},x_{n(k)})=\varepsilon;$

(iii) $\lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)-1},x_{n(k)})=\varepsilon.$

ve

$$d(x_{m(k)},x_{n(k)})\geq\varepsilon,\quad d(x_{m(k)-1},x_{n(k)})<\varepsilon$$

olacak şekilde $m(k)>n(k)>k$ ile birlikte $\{m(k)\}$ ve $\{n(k)\}$ pozitif tam sayılarının dizileri ve $\varepsilon>0$ vardır.

Uyarı 3.1.15. $\lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)+1},x_{n(k)+1})=\varepsilon$ ve $\lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)},x_{n(k)-1})=\varepsilon$.

4.TAM KISMİ SIRALI RECTANGULAR YARI METRİK UZAY

Bu bölümde karışık monoton dönüşümler için [26]'da verilen Teorem 2.1. genelleştirilerek verilir. Tam kısmi sıralı rectangular yarı metrik uzaylarda bir ikili sabit nokta teoremini kanıtlarız. Şimdi ana sonuç aşağıda verilir.

4.1. C – Sınıf Fonksiyonlarıyla Tam Kısmi Sıralı Rectangular Yarı Metrik Uzay

$C-$sınıf fonksiyonlarını kullanılarak aşağıdaki teorem ifade ve ispat edilir.

Teorem 4.1.1. $(X,\preceq)$ kısmi sıralı bir küme ve (X,d) Hausdorff ve tam kısmi sıralı rectangular yarı metrik uzaylar olduğunu varsayalım. $\psi(t)<t,\ \phi(t)<t$ özelliğini sağlayan $\psi,\ \phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonu mevcut ve her bir $t>0$ için $\lim_{r\to t^+}\psi(r)<t,\quad \lim_{r\to t^+}\phi(r)<t$ ve ayrıca X de karışık monoton özelliği sürekli $T:X\times X\to X$ dönüşüm tarafından sağlanır ve $x\le\upsilon,\ y\ge\nu$ sağlayacak şekilde bütün $x,y,\upsilon,\nu\in X$ için

$$d\left(T(x,y),T(\upsilon,\nu)\right)\le F\left(\psi\left(\rho\left((x,y),(\upsilon,\nu)\right)\right),\phi\left(\rho\left((x,y),(\upsilon,\nu)\right)\right)\right) \tag{4.1}$$

özelliği vardır.

İspat: $x_0,y_0\in X$ ile $x_0\prec T(x_0,y_0),\ y_0\succeq T(y_0,x_0),\ x_1=T(x_0,y_0),\ y_1=T(y_0,x_0)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $x_0\prec x_1,\ x_0\ y_0\succeq y_1$ ve $x_0\prec x_1,\ y_0\ge y_1$. Yeniden $x_2=T(x_1,y_1),\ y_2=T(y_1,x_1)$ olsun. T karışık monoton olduğundan $x_1\prec x_2,\ y_1\succeq y_2$ elde edilir. Bunu yapmaya devam etmek için, X de iki $\{x_n\},\ \{y_n\}$ dizileri ile $x_{n+1}=T(x_n,y_n),\ y_{n+1}=T(y_n,x_n)$,

$$x_0\prec x_1\prec x_2\prec\cdots\prec x_n\prec x_{n+1}\prec\cdots \tag{4.2}$$

ve

$$y_0 \succeq y_1 \succeq y_2 \succeq \cdots \succeq y_n \succeq y_{n+1} \succeq \cdots. \tag{4.3}$$

ile oluşturulmuştur.

$$\delta_n = \rho\big((x_n, y_n),(x_{n+1}, y_{n+1})\big) = \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(y_n, y_{n+1})}{2} \tag{4.4}$$

ile gösterilir.

$\delta_n < \delta_{n+1}$ olduğunu gösterelim. Şimdi, tüm $n \geq 0$ için

$$(x, y) = (x_n, y_n),\ (\upsilon, \nu) = (x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Bu eşitliğe (4.1) eşitsizliği uygulanır. ψ 'nin özelliklerini kullanıp,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d\big(T(x_n, y_n), T(x_{n-1}, y_{n-1})\big) \\ &\leq F\begin{pmatrix} \psi\big(\rho\big((x_n, y_n),(x_{n-1}, y_{n-1})\big)\big) \\ ,\phi\big(\rho\big((x_n, y_n),(x_{n+1}, y_{n+1})\big)\big) \end{pmatrix} \\ &\leq \psi\big(\rho\big((x_n, y_n),(x_{n-1}, y_{n-1})\big)\big) \\ &< \rho\big((x_n, y_n),(x_{n-1}, y_{n-1})\big). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Benzer şekilde

$$d(y_{n+1}, y_n) < \rho\big((x_n, y_n),(x_{n-1}, y_{n-1})\big) \tag{4.6}$$

elde edilir.

Böylelikle

$$\frac{d\left(x_{n+1},x_n\right)+d\left(y_{n+1},y_n\right)}{2}<\rho\left(\left(x_n,y_n\right),\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)\right)$$

elde ederiz.

$\delta_n<\delta_{n-1}$. Böylece $\{\delta_n\}$ bir monoton alta sınırlı olarak azalmaktadır. Bundan dolayı $\delta>0$ ile $\lim_{n\to\infty}\delta_n=\delta$ olur.

$\delta=0$ olduğu ispatlanmak istenir. Aksine $\delta>0$ varsayalım. O zaman (4.1) den

$$\begin{aligned} d\left(x_{n+1},x_n\right)&=d\left(T\left(x_n,y_n\right),T\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)\right)\\ &\le F\left(\psi\left(\rho\left(\left(x_n,y_n\right),\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)\right)\right),\phi\left(\rho\left(\left(x_n,y_n\right),\left(x_{n+1},y_{n+1}\right)\right)\right)\right)\\ &\le \psi\left(\rho\left(\left(x_n,y_n\right),\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$d\left(y_{n+1},y_n\right)<\psi\left(\rho\left(\left(x_n,y_n\right),\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)\right)\right) \tag{4.8}$$

elde ederiz.

Böylece

$$\frac{d\left(x_{n+1},x_n\right)+d\left(y_{n+1},y_n\right)}{2}<\rho\left(\left(x_n,y_n\right),\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)\right) \tag{4.9}$$

elde ederiz.

(4.9)'da $n\to\infty$ iken $\delta=\lim_{n\to\infty}\delta_n<\lim_{n\to\infty}\delta_{n-1}=\delta$ elde edilir.

Böylece çelişki elde edilir. Böylece $\delta = 0$. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(\left(x_n, y_n\right), \left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{d\left(x_{n+1}, x_n\right) + d\left(y_{n+1}, y_n\right)}{2} = 0 .$$

Böylece

$$\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+1}\right) = 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} d\left(y_n, y_{n+1}\right) = 0 \qquad (4.10)$$

$\{x_n\}, \{y_n\}$ kısmi sıralı rectangular yarı metrik uzayları Cauchy dizilerini ispatlayalım. Karşıtı kabul etmek için $\{x_n\}$ veya $\{y_n\}$'den en az birinin kısmi sıralı yarı metrik uzaylar Cauchy dizileri olmadığını kabul edelim. O zaman $\varepsilon > 0$ mevcut $\{x_n\}$'nin iki $\left\{\left(x_{n(i)}\right)\right\}$ ve $\left\{\left(x_{m(i)}\right)\right\}$ dizileri elde edilirken $n(i)$ en küçük indistir, burada

$n(i) > m(i) > i,$

$$d\left(x_{m(i)}, x_{n(i)}\right) + d\left(y_{m(i)}, y_{n(i)}\right) \geq \varepsilon . \qquad (4.11)$$

$$d\left(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}\right) + d\left(y_{m(i)}, y_{n(i)-1}\right) \geq \varepsilon \qquad (4.12)$$

elde edilir.

Rectangular yarı metrik uzayın $\left(R_q M 2\right)$ şartının uygulanmasıyla

$$d\left(x_{m(i)}, x_{n(i)}\right) \leq d(\left(x_{m(i)}, x_{m(i)-1}\right) + d\left(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}\right) + d\left(x_{n(i)-1}, x_{n(i)}\right) \qquad (4.13)$$

bulunur.

Böylelikle rectangular yarı metrik uzay $\left(R_q M 2\right)$'den

$$d\left(y_{m(i)}, y_{n(i)}\right) \leq d\left(y_{m(i)}, y_{m(i)-1}\right) + d\left(y_{m(i)-1}, y_{n(i)-1}\right) + d\left(y_{n(i)-1}, y_{n(i)}\right) \qquad (4.14)$$

elde ederiz.

(4.10), (4.11), (4.12), (4.13) ve (4.14)'den

$$\begin{aligned} d\left(x_{m(i)}, x_{n(i)}\right) + d\left(y_{m(i)}, y_{n(i)}\right) \leq & \left[d\left(x_{m(i)}, x_{m(i)-1}\right) + d\left(y_{m(i)}, y_{m(i)-1}\right)\right] \\ & + \left[d\left(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}\right) + d\left(y_{m(i)-1}, y_{n(i)-1}\right)\right] \\ & + \left[d\left(x_{n(i)-1}, x_{n}\right) + d\left(y_{n(i)-1}, y_{n(i)}\right)\right] \end{aligned} \qquad (4.15)$$

elde edilir.

(4.15)'de $i \to \infty$ iken limit alınırsa, (4.10) (4.11)'den

$$\varepsilon \leq \lim_{i\to\infty}\left[d\left(x_{m(i)}, x_{n(i)}\right) + d\left(y_{m(i)}, y_{n(i)}\right)\right] \leq \lim_{i\to\infty}\left[d\left(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}\right) + d\left(y_{m(i)-1}, y_{n(i)-1}\right)\right] \qquad (4.16)$$

elde ederiz.

Böylelikle rectangular yarı metrik uzay $\left(R_q M 2\right)$'den

$$\begin{aligned} d\left(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}\right) + d\left(y_{m(i)-1}, y_{n(i)-1}\right) \leq & \left[d\left(x_{m(i)-1}, x_{m(i)}\right) + d\left(y_{m(i)-1}, y_{m(i)}\right)\right] \\ & + \left[d\left(x_{m(i)}, x_{n(i)}\right) + d\left(y_{m(i)}, y_{n(i)}\right)\right] \\ & + \left[d\left(x_{n(i)}, x_{n(i)-1}\right) + d\left(y_{n(i)}, y_{n(i)-1}\right)\right] \end{aligned} \qquad (4.17)$$

elde ederiz.

(4.17)'de $i \to \infty$ iken limiti olan (4.10), (4.11) ve (4.16)'dan

$$\lim_{i\to\infty}\left[d\left(x_{m(i)},x_{n(i)}\right)+d\left(y_{m(i)},y_{n(i)}\right)\right]=\lim_{i\to\infty}\left[d\left(x_{m(i)-1},x_{n(i)-1}\right)+d\left(y_{m(i)-1},y_{n(i)-1}\right)\right] \qquad (4.18)$$

elde ederiz.

(4.1) eşitsizliğini $(x,y)=(x_{m(i)-1},y_{m(i)-1}),\ (u,v)=(x_{n(i)-1},y_{n(i)-1})$ ile uygulanarak

$$\begin{aligned} d(x_{m(i)},x_{n(i)}) &= d(T(x_{m(i)-1},y_{m(i)-1}),T(x_{n(i)-1},y_{n(i)-1})) \\ &\le \varphi(\rho((x_{m(i)-1},y_{m(i)-1}),(x_{n(i)-1},y_{n(i)-1}))) \\ &< \rho((x_{m(i)-1},y_{m(i)-1}),(x_{n(i)-1},y_{n(i)-1})). \end{aligned} \qquad (4.19)$$

Benzer şekilde

$$d(y_{m(i)},y_{n(i)})<\rho((x_{m(i)-1},y_{m(i)-1}),(x_{(i)-1},y_{n(i)-1})). \qquad (4.20)$$

Öncelikle (4.19) ve (4.20) eşitsizlikleri eklenip $i\to\infty$ iken limit alınırsa

$$\lim_{i\to\infty}[d(x_{m(i)},x_{n(i)})+d(y_{m(i)},y_{n(i)})]<\lim_{i\to\infty}[d(x_{m(i)-1},x_{n(i)-1})+d(y_{m(i)-1},y_{n(i)-1})]$$

elde ederiz.

(4.18)'den bu bir çelişkidir. Sonra $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ rectangular yarı metrik uzayda Cauchy dizileridir. Çünkü (X,d) tamdır, burada $x,y\in X$ ile birlikte

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty}y_n=y \qquad (4.21)$$

X Hausdorff olduğundan ve T'nin sürekliliğinden

$$x=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}T(x_n,y_n)=T(x,y) \quad \text{ve} \quad y=\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=\lim_{n\to\infty}T(y_n,x_n)=T(y,x).$$

□

Sonuç 4.1.2. (X,$\preceq$) kısmi sıralı bir küme ve (X,d) Hausdorff uzayı ve tam rectangular yarı metrik uzayı olduğunu varsayalım. $\varphi(0)=0$ ve $t>0$ için $\phi(t)<\mathrm{t}$ olacak şekilde $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ sürekli fonksiyonu ve ayrıca $T:X\times X\to X$ sürekli dönüşümü X'de karışık monoton özelliğine sahip olsun $x\preceq u, y\succeq v$ ile tüm $x,y,u,v\in X$ için

$$d(T(x,y),T(u,v))\le\varphi(\rho((x,y),(u,v))).$$

Burada $(x_0,y_0)\in X\times X$ ile $x_0\prec T(x_0,y_0), y_0\succeq T(y_0,x_0)$ var ise bu takdirde T tek ikili sabit noktaya sahiptir.

Teorem 4.1.3. $(X,\preceq)$ kısmi sıralı bir küme ve (X,d) Hausdorff ve tam rectangular yarı metrik uzayı olduğunu varsayalım. $T:X\times X\to X$ dönüşümü karışık monoton özelliğe sahip olsun. Teorem 4.1.1 ve $\psi(t)=0\Rightarrow t=0$' deki gibi ψ,ϕ bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. X aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu varsayalım:

a) Tüm n için $\{x_n\}\to x$ bir azalmayan dizi ise bu takdirde $x_n\preceq x$.

b) Tüm n için $\{y_n\}\to y$ bir artmayan dizi ise bu takdirde $\{\mathrm{y}_n\}\succeq y$.

Burada $x_0,y_0\in X$ ile $x_0\prec T(x_0,y_0)$ ve $y_0\succeq T(y_0,x_0)$ mevcut ise o zaman $x,y\in X$ ile $x=T(x,y)$, $y=T(y,x)$ olur, yani T tek ikili sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 4.1.1'in ispatından sonra gelen X'de $\{x_n\}$ azalamayan bir dizi ve X'de $\{y_n\}$ artmayan dizisi ile tüm $n\ge 0$ için

$$x_{n+1}=T(x_n,y_n),\ y_{n+1}=T(y_n,x_n)$$

oluşur ve (4.21) ispatlanır.

Bu nedenle X'in özelliklerine göre tüm $n\ge 0$ için $x_n\preceq u$ ve $y_n\succeq v$ elde edilir.
(4.1)'den

$$d(x_{n+1},T(x,y)) = d(T(x_n,y_n),T(x,y)) \le F(\psi(\rho((x_n,y_n),(x,y)))$$
$$\psi(\rho((x_n,y_n),(x,y))))$$
$$\le \psi(\rho((x_n,y_n),(x,y)))$$

$n \to \infty$ iken (4.21) ve φ'nin özellikleri kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1},T(x,y)) = 0 \qquad (4.22)$$

elde ederiz.

Aksine regular yarı metrik uzaylar (R_qM2)'den

$$d(x,T(x,y)) \le d(x,x_{n+2}) + d(x_{n+2},x_{n+1}) + d(x_{n+1},T(x,y)),$$

$n \to \infty$ iken yukarıdaki eşitsizlikte (4.10), (4.21) ve (4.22)'yi kullanarak

$$d(x,T(\mathrm{x},\mathrm{y})) = 0.$$

Yani $x = T(x,y)$. Benzer şekilde $y = T(y,x)$ olduğu gösterilir.

SONUÇ

Kısmi sıralı rectangular yarı metrik uzaylarda karışık monoton dönüşümler için ikili sabit nokta teoremleri üzerinde $C-$ sınıfı fonksiyonunu kullandık. Teoride her sabit nokta teoremleri ispatı ilginçtir.

KAYNAKLAR

1. Agarwal, R. P., Meehan, M., O'Regan, D., Fixed Point Theory and Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2001, 1-112 s.

2. Altun, I., Türkoğlu, D., Rhoades B. E., Fixed Points of Weakly Compatible Maps Satisfying a General Contractive Condition of Integral Type, Fixed Point Theory and Applications, 2007, 17301: 1-9 s.

3. Altun, İ., Hançer. A. H., Türkoğlu, D., Fixed Point Theorems on D –Complete Topological Spaces, Carpathian J. Math. , 2008, 24 (1): 1-7 s.

4. Berinde, V., Iterative Approximation of Fixed Points, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007, 31-59 s.

5. Border, Kim C., Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1985, 23-38 s.

6. Ćirić, Lj. B. Fixed Point Theory: Contraction Mapping Principle, Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade, Beograd, 2003, 66-72 s.

7. Goebel, K., Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, 1-37 s.

8. Hadžić, O., Pap, E., Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001, 47-91 s.

9. Istratescu, V. I., Fixed Point Theory: an Introduction, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1981, 1-177 s.

10. Kirk, W. A., Sims, B., Handbook of Metric Fixed Point Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001, 1-47 s.

11. Smart, D. R., Fixed Point Theorems, Cambridge University Press, Cambridge, 1974, 1-32 s.

12. Türkoğlu, D., Altun, İ., A Common Fixed Point Theorem for Weakly Compatible Mappings In Symmetric Spaces Satisfying an Implicit Relation, Bul. De La Soc. Math. Mexicana, 2007, 13 (1): 195-205 s.

13. Türkoğlu, D., Altun, İ., A Fixed Point Theorem for Multivalued Mappings and Its Applications to Integral Inclusions, Appl. Math. Lett., 2007, 20: 563-570 s.

14. Hacıoğlu, E. Çoğul Değerli Fonksiyonlar ve Sabit Nokta Teoremleri. Trakya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Analiz ve Fonksiyonlar Anabilim Dalı, Edirne, 2012, 2 s. (Yüksek Lisans Tezi)

15. Brouwer, L. E. J., Uber Abbildung Von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., 1910, 71: 97-115 s.

16. Schauder, J., Der Fix Punktsatz in Funktionalramen, Studia Math., 1930, 2: 171-180 s.

17. Banach, S. , Sur Les Opérations Dans Les Ensembles Abstraits Et Leur Application Aux Équations Intégrales. Fund. Math., 1922, 3, 133-181 s.

18. Khan MS., Swaleh M., Sessa S. Fixed Point Theorems By Altering Distances Between The Points. Bulletin of The Australian Mathematical Society. 1984, 30(1): 1-9 s.

19. Dajun G., Lashmikantham V. Couple Fixed Points of Nonlinear Operators with Applications. Nonlinear Analysis Theory & Applications. 1987, 11(5): 623-632 s.

20. Gnana Bhaskar T, Lashmikantham V. Fixed Point Theorems in Partially Ordered Metric Spaces and Applications. Nonlinear Analysis. 2006; 65: 1379-1393 s.

21. Ansari A. H. Note On $\varphi-\psi-$ Contractive Type Mappings and Related Fixed Point. Payame Noor University. The 2nd Regional Conference on Mathematics and Applications. 2014; 377-380 s.

22. Hoxha Elida, Ansari A. H, Zoto Kastriot. Some Common Fixed Point Results Through Generalized Altering Distances on Dislocated Metric Spaces. Proceedings of EIIC. 2014; 403-409 s.

23. Kadelbulg Z., Radenović S., on Generalized Metric Spaces. a. Survey. TWMS J. Pure Appl. Math. 2014; 5(1): 3-13 s.

24. Dubey AK, Rohit V., Dubey RP. Couple Fixed Points Results with C- Dislance in Cone Metric Spaces. Asia Pasific Journoul of Mathematics. 2015, 2(1): 20-40 s.

25. Latif A., Isikb H., Ansari A. H. Fixed Point Functional Eqution Problems via Cyclic Admissible Generalized Contractive Type Mappings. J Nonlinear Sci. Appl. 2016,9: 1129-1142 s.

26. Mutlu A., Yolcu N., Mutlu B. Fixed Points Theorems in Partially Ordered Rectangular Metric Spaces. British Journal of Mathematics & Computer Science. 2016,15(2): 1-9 s. DOI: 10.9734/BJMCS/2016/24314

27. Mutlu A., Mutlu B., Akdağ S. Using C- Class Function on Coupled Fixed Point Theorems for Mixed Monotone Mappings in Partially Ordered Rectangular Quasi Metric Spaces. British Journal of Mathematics & Computer Science. 2016, 19(3): 1-9 s, DOI: 10.9734/BJMCS/2016/27649

28. Başkan T., Bizim O., Cangül İ. N. Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş. Ankara. 2006, 2. Baskı, Nobel Yayınevi.

29. Mutlu A. Teorik Ve Çözümlü Topoloji Ders Notları, Manisa, 2012

30. Branciari, A. A Fixed Point Theorem of Banach-Caccioppoli Type on a Class of Generalized Metric Spaces. Publ. Math. (Debr.). 2000, 57, 31-37 s.

31. Matthews G. S. Partial Metric Topology. Papers on General Topology and Applications, Eighth Summer Conference at Queens College. Eds. S. Andima Et.Al. Annals of The New York Academy of Sciences, Vol. 728, Pp. 183-197 s.

32. http://www.dcs.warwick.ac.uk/pmetric/ex.html

33. Curtiss J. H. Mathematical Notes. University of Miami (http://about.jstor.org/terms)

34. Mohammed F. Z., Ahmad A. G. B., Ansari A. H., Radonović S., Rajovic M. Some Common Fixed Point Results of Mapping in $0-\sigma-$ Complete metric-like Spaces via New Functions. Applied Mathematical Sciences. 2015, 9(83): 4109-4127 s.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sevinç AKDAĞ

Doğum Yeri ve Yılı : Ardahan, 1991

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : sevincakdag@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Muğla Gazi Anadolu Lisesi, 2009

Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2013

Yayınları

1. Mutlu A., Mutlu B., Akdağ S. Using C- Class Function on Coupled Fixed Point Theorems for Mixed Monotone Mappings in Partially Ordered Rectangular Quasi Metric Spaces. British Journal of Mathematics & Computer Science. 2016, 19(3): 1-9, DOI: 10.9734/BJMCS/2016/27649